MÜLLER-POUILLETS

LEHRBUCH DER PHYSIK

UND

METEOROLOGIE

ERSTER BAND

LEHRBUCH DER PHYSIK

UND

METEOROLOGIE

ZEHNTE UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN VON

LEOP. PFAUNDLER

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GRAZ

UNTER MITARBEITUNG

VON

PROF. DR. O. LUMMER-BRESLAU, PROF. DR. A. WASSMUTH-GRAZ,
HOFRAT PROF. DR. J. M. PERNTER-WIEN, DR. KARL DRUCKER-LEIPZIG,
PROF. DR. W. KAUFMANN-BONN, DR. A. NIPPOLDT-POTSDAM

IN VIER BÄNDEN

MIT ÜBER 3000 ABBILDUNGEN UND TAFELN, ZUM TEIL
IN FARBENDRUCK

ERSTER BAND

MECHANIK UND AKUSTIK

VON

LEOP. PFAUNDLER

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1906

Published January 27, 1906.

VORREDE ZUR ZEHNTEN AUFLAGE.

er Fortschritt der Physik ist gegenwärtig ein so rascher, daß
n wenigen Jahren die Lehrbücher veralten. In den wenigen
, die einem Lehrer und Institutsleiter von den Amtsgeschäften
leiben, ist er nicht imstande, die einzelnen Teile eines aus-
en Lehrbuches der Physik so rasch zu bearbeiten, daß nicht
t vollendete Teil bereits rückständig geworden ist, bevor der
'eil fertig wird. Die gleichzeitige Bearbeitung der einzelnen
lurch mehrere Mitarbeiter hat aber ebenfalls große Schwierig-
und es geht hierbei allzuleicht die Einheitlichkeit des Ganzen
Gleichmäßigkeit der Behandlung verloren. Diese Gründe ins-
re waren es, die mich veranlaßten, die Bearbeitung der zehnten
abzulehnen und einer jüngeren rüstigeren Kraft zu überlassen.
lagsfirma Friedr. Vieweg & Sohn übertrug daher Ende 1901
auflage dem Geheimen Rat Prof. Dr. H. v. Wild in Zürich.
hatte den ersten Band exklusive der Akustik umgearbeitet,
der Tod am 8. September 1902 abberief. Auf Ansuchen der
firma entschloß ich mich nun doch, das verwaiste Werk unter
Obhut zu nehmen und zwar unter der Bedingung, daß ich
Mitarbeiter zu gewinnen imstande sein werde.

Optik war bereits von Prof. v. Wild dem bewährten Mit-
Prof. Dr. Otto Lummer in Charlottenburg anvertraut worden
selbst hatte für die Wärmelehre zugesagt. Es gelang mir, für
fangreiche Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität Herrn
or Dr. W. Kaufmann in Bonn, für die Meteorologie den Herrn
Direktor J. M. Pernter in Wien, für die Lehre vom Erdmagne-
Herrn Dr. A. Nippoldt in Potsdam, für die chemisch-physi-
en Teile den Herrn Dr. Karl Drucker in Leipzig und für die
eitung und Thermodynamik meinen Kollegen, Herrn Professor
Waßmuth in Graz zu gewinnen.

ich den Bearbeitern der einzelnen Teile nicht vorgreifen will,
veise ich bezüglich der Anlage des ganzen Werkes auf die

Das von Prof. v. Wild hinterlassene Manuskript wies in der Lehre von den Flüssigkeiten und den Gasen nur wenige Veränderungen auf. Dagegen hatte der Verfasser, der bekanntlich ein ausgezeichneter Vertreter der Metronomie war, seiner Arbeitsrichtung folgend, den ersten Teil der Mechanik derart umgestaltet, daß sich derselbe einer Meß- und Instrumentenkunde näherte, und hatte, um den hierfür nötigen Raum zu gewinnen, Vieles fortgelassen, was mir für ein methodisches Lehrbuch der Physik unentbehrlich scheint.

Sollte dieser Teil zum Ganzen passen, so mußte er noch einmal umgearbeitet und ergänzt werden. Dabei bestrebte ich mich, die ausgezeichnet bearbeiteten metronomischen Abschnitte möglichst beizubehalten, aber auch dem methodisch-physikalischen Unterricht wiederum gebührend Rechnung zu tragen, was freilich nicht ohne Überschreitung des bisherigen Umfanges möglich war.

Ich gebe mich dabei nicht der Hoffnung hin, den Wünschen und Anschauungen aller Fachgenossen entsprochen zu haben; denn diese gehen allzuweit auseinander. Manche werden meinen, das Buch enthalte zu viel Elementares; wer ein mehrbändiges Lehrbuch der Physik zur Hand nehme, sei über diese elementaren Dinge längst unterrichtet; wozu also die Beschreibung von Hebeln und Flaschenzügen, von Feuerspritzen und Heronsbrunnen; wozu auch die vielen Abbildungen, welche nur vielen Raum einnehmen usw.

Aber irgend wo müssen doch auch diese Dinge behandelt und abgebildet sein! In den theoretischen Lehrbüchern fehlen sie ganz; in den Kompendien der Mittelschulen sind sie meist nur erwähnt, um den Lehrer an sie zu erinnern. Ihre schematischen Abbildungen genügen wohl für den theoretischen Unterricht, aber sie genügen nicht für den Mechaniker, für den das Buch doch auch bestimmt ist. Es schadet auch dem Physikstudierenden durchaus nicht, wenn er z. B. erfährt, wie denn ein Ventil, eine Stopfbüchse, eine Kolbenliderung in Wirklichkeit aussieht, da die schematische Zeichnung davon weit entfernt ist.

Würden diese Dinge fehlen, so würde der entgegengesetzte Vorwurf laut werden, daß das Buch trotz seines Umfanges sehr lückenhaft sei und über die verbreitetsten Apparate keinen oder doch nur ungenügenden Aufschluß gebe. Ich habe daher den Stoff nicht beschränkt, dagegen durch Verkleinerungen mancher Abbildungen Raum zu gewinnen gesucht.

nungen weit auseinandergehen. Um ein Beispiel anzuführen, so ist gewiß keinem Zweifel unterworfen, daß jeder Kraftübertragung am el oder an der Rolle eine Biegung oder Dehnung vorausgeht, und die Übertragung in Wirklichkeit nur indirekt durch elastische fte erfolgt. Allein ich kann der Meinung nicht beipflichten, daß n deshalb von der Fiktion starrer Körper ganz ablassen und von ang an mit elastischen Maschinenteilen operieren soll. Neben den lreichen oft vortrefflich erdachten Vorlesungsexperimenten und neuen oaraten dieser Zeitschrift, so wie jener für Instrumentenkunde, finden doch auch manche beschrieben, deren Verständnis mir schwieriger r doch umständlicher erreichbar scheint, als das, was dadurch er-t werden soll. Wenn ich mich daher oft auf die hergebrachten hoden und Hilfsmittel beschränkt habe, so geschah es durchaus nt aus Geringschätzung gegen neue Vorschläge. Im allgemeinen hat r gute Lehrer seine eigene Methode, die er überdies noch von Fall Fall der jeweiligen Fassungskraft und Vorbildung seiner Schüler außerdem dem verfügbaren Apparate anpassen muß. Um so iger kann man von einem Lehrbuche, das sich an die verschieden-n Leserkreise wendet, verlangen, daß es für jeden derselben die sendste Darstellungsmethode biete.

Was die Anwendung der Mathematik betrifft, so verweise ich auf in der Vorrede zur achten Auflage Gesagte. So lange das vor-sehende Philologentum alle Gymnasiasten zwingt, ihre schönsten re der Erlernung der Grammatik toter Sprachen zu opfern, ist ne Aussicht, den Maturanten die Elemente der Analysis beizu-ngen. Infolgedessen ist der größte Teil der Studierenden, die sich Naturwissenschaften, der Medizin usw. widmen, gezwungen, sich die Benutzung solcher Lehrbücher der Physik zu beschränken, che von der Analysis keinen Gebrauch machen; was um so mehr bedauern ist, als dadurch nicht nur der vorzutragende Stoff wesent-beschränkt, sondern auch die mathematische Begründung erschwert l umständlicher gemacht wird. Man kann zwar manche Resultate Analysis auch durch umständliche elementare Rechnungen ableiten. rvon wurde aber selten Gebrauch gemacht; denn es erscheint in Regel zweckmäßiger, solche weitschweifige Ableitungen, welche den nder mathematisch Gebildeten abschrecken ohne den höher Gebildeten befriedigen, zu unterlassen und lieber das Resultat als die Frucht

gilt von der vollständigen Pendelformel u. a.

Von den in den früheren Auflagen eingeschalteten Kapiteln über die Molekularkräfte wurde nur jenes auf die festen Körper bezügliche (Elastizität, Stoß, Reibung) an dieser Stelle beibehalten. Die Molekularkräfte der flüssigen und gasförmigen Körper werden an geeigneter Stelle in der Wärmelehre behandelt werden.

In der Akustik wurde, ausnahmsweise, eine eingehendere Ableitung der Schallgeschwindigkeit beigefügt, um einer kritischen Bemerkung in einer englischen Zeitschrift zu entsprechen. Auch der Einfluß der Röhrenweite auf die Resonanz wurde demselben Kritiker zuliebe berücksichtigt. Außerdem sind zahlreiche größere oder kleinere Zusätze und Literaturhinweise eingefügt worden.

So hoffe ich denn, daß auch diese zehnte Auflage dem Leserkreis, dem das Buch bisher genügt hat, auch weiterhin genügen werde.

Graz, im September 1905.

Leopold Pfaundler.

INHALTSVERZEICHNIS ZUM ERSTEN BANDE.

(ERSTE ABTEILUNG.)

Einleitung.

Erstes Buch.

Die Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der Messung der Längen, Flächen, Volumina, Winkel, Zeiten und Massen.

schlagen gewöhnlich halbe Sekunden, man zählt aber nur die geraden Schläge — die Sekunden, nach erfolgter Notierung der Stunde und Minute, zählt, bis der bewegte Körper die erste Marke bzw. bei Schwingungen zum ersten Male die Gleichgewichtslage passiert, worauf man sofort die Sekunde unter Weiterzählung der Sekundenschläge notiert. Wenn die Bewegung keine rasche ist, so kann man das den Anfänger leicht störende Weiterzählen der Sekunden unterlassen und nach der Uhr neu zu zählen anfangen, wenn sich der Körper in seiner Bahn der zweiten Marke bzw. dem nächsten Durchgang durch die Gleichgewichtslage nähert, worauf man dann wieder die Sekunde des Durchganges durch diese notiert und ebenso die Stunde und Minute, in welche diese fällt. Nun wird aber im allgemeinen der Durchgang des bewegten Körpers durch die Marke nicht genau auf einen Sekundenschlag fallen, sondern zwischen zwei aufeinanderfolgende und bald näher, bald ferner vom ersten zum zweiten Schlag entfernt. Bei einiger Übung ist es leicht möglich, nach Zehnteln der Sekunde die Zeit zu schätzen, wo nach dem ersten Schlag der Körper die Marke passiert; das wird sehr erleichtert, wenn man sich auf irgend eine Weise räumlich die Stellen merkt, wo beim ersten Schlag der Körper diesseits der Marke und beim folgenden Schlag jenseits derselben sich befand; nach dem Verhältnis dieser beiden Räume lassen sich dann recht gut die Zehntel der Sekunde für den wirklichen Durchgang schätzen. Man habe so z. B. gefunden, daß der Durchgang durch die erste Marke oder zum ersten Male durch die Gleichgewichtslage um $3^h\ 12^m\ 24{,}7^s$ erfolgte und daß darauf der durch die zweite Marke um $3^h\ 13^m\ 6{,}5^s$ stattgefunden habe, so ist das zu messende Zeitintervall $41{,}8^s$ gewesen. Auf diesem Wege wird man unmittelbar die Dauer des Ereignisses kaum genauer als bis auf $0{,}1^s$ ermitteln können.

Wir werden weiter unten bei den Pendelbeobachtungen zeigen, wie man bei isochron schwingenden Körpern durch wiederholte Beobachtung der Schwingungsdauer auch nur mittels einfacher Uhrmessung zu viel größerer Genauigkeit gelangen kann.

In den Fällen, wo die Bewegung eines Körpers eine recht rasche ist oder kurz aufeinanderfolgende Ereignisse ihrem Zeiteintritt nach zu messen sind und das erwähnte Weiterzählen der Sekunden nach den Schlägen des Chronometers wegen geringer Übung oder wegen Geräuschen in der Umgebung schwierig ist, kann man sich mit Vorteil der sog. Chronograph-Chronometer bedienen. Dieselben besitzen außer dem Stunden- und Minutenzeiger noch zwei, übereinander stehende $^1/_5$ Sekunde springende Zeiger, welche beide unabhängig voneinander durch Drücker am Umfang der Taschenuhr arretierbar sind; außerdem kann durch einen zweiten Druck auf die Arretierung des einen Zeigers dieser veranlaßt werden, dem anderen inzwischen fortgehenden Zeiger nachzuspringen. Der Gebrauch ist daher ein doppelter. Für weniger als eine Minute Intervall darbietende zwei Ereignisse wird beim Eintritt des ersteren der eine und beim Eintritt des zweiten der andere Zeiger je durch die betreffenden Drücker arretiert, worauf man ihnen in aller Ruhe die Dauer des Zeitintervalls bis auf $0{,}2^s$ genau ablesen kann. Für wiederholte Beobachtungen, wie z. B. bei Pendelschwingungen, arretiert man bloß den einen Zeiger beim Durchgang des Pendels durch die Gleichgewichtslage, liest rasch seinen Stand am Zifferblatt ab und läßt ihn dann durch einen zweiten Druck auf die Arretierung dem

anderen Zeiger wieder nachspringen, worauf sich die folgende Beobachtung ohne Zählung der Sekunden wieder in gleicher Weise machen läßt.

Handelt es sich aber darum, Zeiten bedeutend genauer als bis $0,1^s$ zu messen, so bedient man sich der eigentlichen **Chronographen mit elektrischer Registrierung der Zeiten.** Durch ein Uhrwerk wird bei ihnen ein mit Papier bedeckter Zylinder mehr oder minder rasch in Umdrehung um seine Längsachse versetzt, wobei er zugleich längs dieser eine langsame Verschiebung erfährt, oder es wird ein endloser Papierstreifen, wie beim bekannten Morseschen Telegraphenapparat, durch das Uhrwerk zwischen zwei kleinen Walzen durchgezogen. Zwei nebeneinander gestellte Federn schreiben auf dem Papier parallele Linien auf, welche im ersteren Fall den Zylinder schraubenförmig umlaufen. Beide Federn sind an den Ankern von Elektromagneten so befestigt, daß beim Anziehen derselben die Federn auf dem Papier seitlich um eine geringe Größe ausweichen. Der eine Elektromagnet ist in den Stromkreis einer Uhr eingeschaltet, welche alle Sekunden auf ganz kurze Zeit, etwa $0,1^s$, einen Kontakt bewirkt und so den Strom der galvanischen Batterie vorübergehend schließt. Die betreffende Ankerfeder wird daher eine Reihe von Zacken auf der von ihr verzeichneten Linie aufweisen, deren Abstand je einer Sekunde Zeit entspricht. Der Elektromagnet der zweiten Feder wird dadurch zum Anziehen seines Ankers bewogen, daß der Beobachter im Moment des Eintritts des seiner Zeit nach zu messenden Ereignisses in einem zweiten, diesen Elektromagnet einschließenden Leitungskreis der Batterie durch Niederdrücken eines Tasters einen Stromschluß bewirkt. Die Marke, welche infolgedessen die zweite Feder auf ihrer Linie macht, wird im allgemeinen zwischen zwei Sekundenmarken der benachbarten Linie fallen und je nach dem Abstande der letzteren ihre Entfernung von der einen derselben auf größere oder kleinere Bruchteile einer Sekunde abzumessen sein. Beträgt z. B. die Entfernung der Sekundenmarken voneinander nur 20 mm, so wird die leichte Abmessung bis zu 0,1 mm bereits einer Genauigkeit von $^1/_{200}$ oder $0,005^s$ in der Zeitbestimmung entsprechen. Die Sicherheit aber der Registrierung von Zeitereignissen nach dieser Methode hängt nicht bloß von der Distanz der Sekundenmarken und der Abmessung ab, sondern auch von der Gleichförmigkeit der Bewegung des Papiers durch sein Uhrwerk und von der guten Funktion der die Sekundenkontakte bzw. Sekundenmarken auf dem Papier bewirkenden Uhr. Man hat in neuerer Zeit sowohl bei Pendeluhren (Krille, Hansen, Hipp und andere), als auch bei Box-Chronometern (Nardin in Locle) solche Kontaktvorrichtungen angebracht, welche auf den Gang der Uhren nur unmerklich oder jedenfalls in so konstanter Weise einwirken, daß die chronometrischen Eigenschaften dieser Uhrwerke dadurch nicht beeinträchtigt werden, und ebenso ist es auch durch besondere Reguliervorrichtungen (schwingende Feder von Hipp, Regulatoren von Foucault, von Siemens usw.) gelungen, den Gang der Laufwerke für die Fortbewegung des Papiers gleichförmig genug zu machen.

Auf andere Apparate zur Messung kleiner Zeitintervalle, welche ganz spezielle Zwecke verfolgen, werden wir bei den betreffenden Anwendungen zu sprechen kommen.

§ 32. Astronomische Methoden der Zeitbestimmung. Stehen dem Physiker ähnliche Einrichtungen wie auf einer Sternwarte zur Disposition,

l. h. ein fest aufgestelltes Passagen- oder Meridian-Instrument mit den nötigen Schutzvorrichtungen gegen die Unbilden der Witterung, unbeschadet ler Möglichkeit, durch zeitweise Entfernung jener den Durchgang der Ge-tirne im Meridian zu beobachten, so besteht die einfachste Methode der Zeit-bestimmung darin, daß man mittels jenes Passagen-Instrumentes event. ines Theodoliten, wie oben beschrieben wurde, die Zeit des Durchganges ines dem Himmelsäquator nahen Fixsternes (in seiner oberen Kulmination) n dem Fadenkreuz (Vertikalfaden) seines Fernrohrs, dessen optische Achse ich nahezu im Meridian des betreffenden Ortes befinden soll, nach der Uhr eobachtet. Heißen wir die beobachtete Uhrzeit des Durchganges U und den esuchten Uhrfehler in diesem Moment ΔU, so folgt aus der Betrachtung ezüglicher sphärischer Dreiecke, daß:

$$\Delta U = \alpha - U - i \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - a \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - c \cdot \frac{1}{\cos \delta} \quad \ldots \quad (1)$$

o α die Rektaszension (gerade Aufsteigung) und δ die Deklination (Ab-weichung) des betreffenden Sternes für diese Zeit, φ die geographische Breite es Beobachtungsortes, ferner i die Neigung der horizontal sein sollenden Drehungsachse des Fernrohrs gegen den Horizont (+, wenn das Westende erselben höher als das Ostende ist), a das Azimut der Normalen dieser Drehungsachse, d. h. ihren Winkel mit dem astronomischen Meridian (+, wenn ie im Süden vom astronomischen Meridian nach Osten abweicht), endlich c ie sogenannte Kollimation der optischen Achse des Fernrohrs, d. h. den Winkel dieser mit der Normalen der Drehungsachse des Fernrohrs (+, wenn as Objektivende des Fernrohrs mit dem Ende der Drehungsachse, an welcher er Höhenkreis befestigt ist, den Winkel 90 + c einschließt), darstellen. Da man ie Breite φ des Ortes als gegeben betrachten kann, α und δ unmittelbar en astronomischen Ephemeriden für die Beobachtungszeit und den betreffen-en Stern zu entnehmen sind, so bleibt nur übrig, die Neigung i der Hori-ontalachse durch das aufzusetzende Niveau (Libelle), die Kollimation c durch Umlegen des Fernrohrs in seinen Lagern unter Anvisierung einer in der Nähe des Horizonts und nahe am Meridian aufgestellten Mire[1]) und jeweilige Abmessung der Distanz des Fadenkreuzes von ihr, sei es durch Drehung am Horizontalkreis, sei es durch ein Okularmikrometer, endlich das Azimut a urch entsprechende Abmessung, wenn das Azimut der fraglichen Mire be-kannt ist, zu bestimmen. Es sind dann alle Größen rechts vom Gleichheits-eichen in (1) gegeben und somit der Uhrfehler ΔU danach zu berechnen. Man wird ihn in Sternzeit erhalten, da man auch die abgelesene Uhrzeit U entweder direkt an einer nach Sternzeit gehenden Uhr beobachtet hat oder, wenn sie nach mittlerer Sonnenzeit reguliert sein sollte, die abgelesene Zeit U vor Einführung in die Gleichung vermittelst der Ephemeriden in absolute Sternzeit zu verwandeln hatte. Es ist dies übrigens auch schon deshalb nötig, um nach den Ephemeriden den Durchgang des Sternes durch das Fernrohr erwarten zu können.

[1]) Unter Mire versteht man einen fernen, zur scharfen Einvisierung ge-eigneten Gegenstand, wie z. B. eine Kirchturmspitze, ein ganz schmales Fenster oder eine Mauerlücke, ein an einer Mauer angebrachtes vertikales Zeichen oder auch geradezu einen Kollimator, d. h. ein im Focus einer Linse befestigtes Fadenkreuz, er auf einem Steinpfeiler sicher aufgestellt ist.

Macht man nun 24 Stunden später mit demselben möglichst unverrückt erhaltenen Instrument eine zweite Durchgangsbeobachtung desselben Sternes, welche zur Uhrzeit U' stattgefunden haben soll, so erhält man entsprechend für den jetzigen Uhrfehler $\Delta U'$:

$$\Delta U' = \alpha - U' - i' \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - a' \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - c' \cdot \frac{1}{\cos \delta} \quad \ldots (1')$$

da α, δ und φ dieselben Werte wie tags zuvor haben.

Aus den beiden Gleichungen (1) und (1′) folgt aber:

$$\Delta U - \Delta U' = U' - U - x \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

wo abkürzend gesetzt wurde:

$$x = (i - i') \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + (a - a') \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + (c - c') \frac{1}{\cos \delta} \ldots (2')$$

Es ist aber $\Delta U - \Delta U'$ nichts anderes als der gesuchte tägliche Gang des Chronometers (in Sternzeit), um den es hauptsächlich dem Physiker zu tun ist, und er ist also unmittelbar durch die Differenz der beobachteten Durchgangszeiten U und U' gegeben, wenn $x = 0$ ist, d. h. das Instrument seine Lage durchaus unverändert beibehalten hat, oder $i = i'$, $a = a'$, $c = c'$ sind.

Hat man aber das Instrument, wie es in § 28 angegeben ist, jeweilen berichtigt, d. h. die Neigung i und die Kollimation c vor der Beobachtung annulliert, so fallen in (1) und (1′) und also auch in (2′) die Korrektionsglieder mit i und c von selbst fort und es bleibt nur das mit dem Azimut a der Normalen der Drehungsachse des Fernrohrs oder jetzt der optischen Achse desselben, da die Kollimation $c = 0$ gemacht worden ist, übrig. Heißen wir A das Azimut der Mire (+, wenn sie im Norden nach Osten, im Süden nach Westen vom Meridian abweicht), durch welches wir a ausdrücken wollen, m die Ablesung am Horizontalkreis des Instrumentes bei der Beobachtung des Sterndurchganges im Fernrohr und m' die weitere Ablesung an jenem bei der Einstellung des Fernrohrs unter Drehung um die Vertikalachse auf die Mire, so ist, wenn wir den Winkel $m' - m = b$ setzen, die gesuchte Größe a:

$$a = b - A.$$

In betreff der Bestimmung des Azimuts A der Mire könnten wir, wie in bezug auf manche andere Details, auf astronomische Handbücher verweisen; da indessen die Bestimmung dieser Größe zur Orientierung überhaupt wie speziell für die später zu betrachtende magnetische Deklination doch nötig ist, so wollen wir sie hier gleich mit erörtern.

Die Bestimmung des absoluten Azimuts einer Mire geschieht am besten durch Beobachtung des Polarsternes mittels des Theodoliten. Heißen wir nämlich am vollständig berichtigten Theodolit die Ablesung am Horizontalkreis bei Einstellung des Fernrohrs auf die Mire h' und diejenige nach Einstellung auf den Polarstern h, so ist das Azimut A der Mire gegeben durch:

$$A = a + h' - h,$$

wenn die Bezifferung auf dem Horizontalkreis im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers wächst und a das Azimut des Polarsternes (+ von Nord nach Ost gerechnet) darstellt. Für den Moment des Durchganges des Polarsternes

durch den Vertikalfaden des Fernrohrfadenkreuzes berechnet sich aber dessen Azimut nach der Formel:

$$tang\, a = \frac{sin\, t}{cos\, \varphi\; tang\, \delta - sin\, \varphi\; cos\, t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, δ die Deklination und t den sogenannten Stundenwinkel des Polarsternes zur Zeit der Beobachtung bedeuten. Dieser Stundenwinkel ist aber gegeben durch:

$$t = s - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

falls s die beobachtete Sternzeit beim erwähnten Durchgang des Polarsternes durch den Vertikalfaden im Fernrohr und α die Rektaszension des Polarsternes für diese Zeit darstellen. δ und α sind wieder für die Zeit der Beobachtung den astronomischen Ephemeriden zu entnehmen. Da α und ebenso s in Zeit angegeben sind, so muß ihre Differenz, um den Wert von t zu erhalten, aus Stunden, Minuten und Sekunden durch Multiplikation mit 15 in Grade-Minuten und Sekunden-Bogen verwandelt werden. Ist aber die Beobachtung nicht mit einem nach Sternzeit gehenden, sondern nach mittlerer Sonnenzeit regulierten Chronometer gemacht worden, so ergibt sich:

$$s = U \cdot r + m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo U die korrigierte Chronometerzeit beim Durchgang, durch Multiplikation mit r in Sternzeit verwandelt oder nach den Ephemeridentafeln in Sternzeit umgerechnet, und m die Sternzeit des mittleren Mittags am Beobachtungsort ist. Die Ephemeriden geben die letztere unmittelbar bloß für Greenwich, Berlin, Paris usw. Ist der Beobachtungsort um die Länge λ ausgedrückt, in Stunden, Minuten und Sekunden, von einem dieser Orte abstehend, so bilde man die Differenz Δ der Sternzeit des mittleren Mittags am Ephemeridenort für den Beobachtungstag und den nächstfolgenden, dann ist zu ersterer hinzuzufügen: $\pm \Delta \frac{\lambda^h}{24}$, wo das positive Zeichen gilt, wenn der Ort westlich vom Ephemeridenort gelegen ist. Man kann den Polarstern in vier Hauptlagen beobachten, in seiner oberen oder unteren Kulmination und in seiner östlichsten oder westlichsten Elongation; man wählt die letzteren Lagen, wenn man der Korrektion des verwendeten Chronometers nicht ganz sicher ist, da ein Zeitfehler da weniger auf das Resultat influiert. Ist dagegen der Uhrfehler gut bekannt, so ist die Durchgangsbeobachtung in den ersten Lagen wegen der rascheren seitlichen Bewegung des Sternes bequemer.

Häufig ist es indessen tunlicher, das Azimut einer Mire durch Beobachtung der Sonne zu bestimmen. Zu dem Ende richtet man nach Vorsetzung des Sonnenglases[1]) das Fernrohr des Theodoliten auf die Sonne und bestimmt nach den Schlägen des nach mittlerer Sonnenzeit gehenden Chronometers die Zeit des Antritts des ersten Sonnenrandes an den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes, wobei man zu dem Ende durch Drehen der Mikrometerschraube am Höhenkreis (der Horizontalkreis bzw. seine Alhidade bleibt geklemmt und unverändert) der Sonne in ihrer Vertikalbewegung mit

[1]) Das Sonnenglas ist ein sehr dunkel gefärbtes Glas, welches die Sonne nur noch als helle Scheibe zeigt, sie also ohne Blendung des Auges zu betrachten erlaubt.

dem Horizontalfaden folgt. Nachdem man rasch die Achsenlibelle abgelesen und umgelegt hat und den Stand des Höhenkreises notiert hat, beobachtet man in gleicher Weise die Zeit des Antritts des zweiten Sonnenrandes an das Fadenkreuz, liest dann wieder die Achsenlibelle und den Höhenkreis ab und nunmehr auch den Horizontalkreis. Darauf löst man dessen Klemme, stellt das Fernrohr auf die Mire ein und notiert wieder die Stellung der Alhidade am Horizontalkreis.

Heißen wir das Mittel aus den für den Fadenantritt des ersten und zweiten Sonnenrandes beobachteten Uhrzeiten U, so berechnet sich damit das Azimut der Sonne a, vom Nordpunkt positiv nach Osten gezählt, wieder nach der Formel (3), wo jetzt δ die Deklination der Sonne zur Zeit der Beobachtung — die mit Berücksichtigung der Längendifferenz des Beobachtungsortes gegen Greenwich und der stündlichen Änderung der Deklination $\varDelta\delta$ dem „Nautical Almanac" zu entnehmen ist — und der Stundenwinkel der Sonne t durch die Formel gegeben ist:

$$t = 15.(U + \varDelta U - Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wenn $\varDelta U$ die Uhrkorrektion und Z die Zeitgleichung darstellen und 15 wieder den Faktor zur Verwandlung von Zeiten in Bogen repräsentiert. Dabei ist zu bemerken, daß zu den am Vormittag am Chronometer abgelesenen Uhrzeiten jeweilen noch 12 Stunden hinzuzuzählen sind.

Bezeichnen wir ferner den aus den Ablesungen am Horizontalkreis sich ergebenden Horizontalwinkel zwischen Sonne und Mire mit d, so ist das gesuchte Azimut A der letzteren:

$$A = a - d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo der Winkel a mit einem positiven Vorzeichen zu nehmen ist, wenn die Sonne, vom Beobachter aus betrachtet, rechts von der Mire steht. An dem Horizontalwinkel d ist für den Fall, daß die Neigung i der Horizontalachse des Fernrohrs nicht nahezu annuliert sein sollte, noch eine Korrektion anzubringen, so daß dann statt d in obiger Gleichung zu setzen ist:

$$d' = d + i \operatorname{tang} h,$$

wo h die am Vertikalkreis abgelesene Höhe der Sonne über dem Horizont bei der Beobachtung darstellt.

Daß das Messungsresultat durch wiederholte Einstellung auf die Mire und durch weitere Beobachtungen des Sonnendurchganges etwa nach Umlegen des Fernrohrs in seinen Lagern usw. sicherer zu gestalten ist, bedarf kaum der Erwähnung.

Zeitbestimmung nach der Methode der korrespondierenden Sonnenhöhen. Viel geringere Hilfsmittel als die erörterte Zeitbestimmung mit dem Passageninstrument erheischt die Methode der korrespondierenden Sonnenhöhen. Nach derselben beobachtet man nämlich an der betreffenden Uhr die Zeiten, wo die Sonne einige Stunden vor und einige Stunden nach Mittag genau gleiche Höhen über dem Horizont einnimmt. Heißen wir die beobachteten Uhrzeiten am Vormittag U_1 und am Nachmittag U_2, sowie U_0 die Uhrzeit des wahren Mittags, so ist, wenn das Chronometer nach mittlerer Sonnenzeit geht:

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{\varDelta\delta}{15}\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin 15t} - \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang} 15t}\right)t \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo abkürzend gesetzt wurde:

$$t = \frac{U_2 - U_1}{2}.$$

Den zweiten Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen heißt man die Mittagsverbesserung. Hat man sie an $\frac{U_1 + U_2}{2}$ angebracht, also U_0 berechnet, so findet man dann die Uhrkorrektion ΔU des Chronometers für den Mittag, bezogen auf mittlere Sonnenzeit, nach der Formel:

$$\Delta U = 24^h - U_0 + Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo Z wieder die Zeitgleichung für den betreffenden Ort und Tag (mittlere Zeit weniger wahre Zeit) darstellt und ein positives Vorzeichen von ΔU ein Zurückgehen des Chronometers gegen mittlere Sonnenzeit bezeichnet. Da die Breite φ des Ortes als bekannt vorauszusetzen ist und die Deklination δ der Sonne am wahren Mittag des Ortes sowie die stündliche Zunahme derselben $\Delta\delta$, ebenso wie Z, unmittelbar den astronomischen Ephemeriden zu entnehmen sind, so ist nach den Formeln (7) und (8) die Uhrkorrektion aus den Beobachtungszeiten U_1 und U_2 leicht zu berechnen, welche des nähern in folgender Weise bestimmt werden.

Steht für die Beobachtung der Sonne bei diesen Messungen ein Theodolit mit Sonnenglas am Fernrohrokular zur Verfügung, so stellt man nach erfolgter Berichtigung desselben sein Fernrohr am Vormittag so auf die Sonne ein, daß dieselbe mit ihrem oberen Rande noch etwas unter dem Horizontalfaden des Fadenkreuzes sich befindet, zieht die Klemme am Höhenkreise an und zahlt nach den Schlagen des Chronometers die ganzen Sekunden mit Schatzung der Zehntel derselben, bis der obere Sonnenrand eben den Horizontalfaden berührt. So erhält man U_1. Ohne die Klemme am Höhenkreise zu lösen, also bei gleicher Höhe des Fernrohrs, richtet man dasselbe am Nachmittag durch Drehung der Alhidade um die Vertikalachse wieder auf die Sonne, und zwar zu einer Zeit, wo der obere Rand desselben noch etwas über dem Horizontalfaden seines Fadenkreuzes sich befindet, und beobachtet wie am Vormittag wieder die Uhrzeit, wo eben die Berührung mit dem Horizontalfaden eintritt. Diese Beobachtung gibt U_2. Man kann aber auch am Vormittag das Fernrohr nach dem Höhenkreise successive auf verschiedene bestimmte, nicht sehr verschiedene Höhen einstellen und jeweilen die Zeiten messen, wo die Sonne mit ihrem oberen Rande durch Berührung des Horizontalfadens diese Höhe erreicht. Verfährt man dann in gleicher Weise am Nachmittag und bildet das Mittel aus allen beobachteten Zeiten am Vormittag einerseits und Nachmittag andererseits, so erhält man für U_1 und U_2 Werte, welche offenbar eine größere Sicherheit darbieten.

Noch einfacher wird diese Beobachtung des Durchganges der Sonne durch bestimmte Höhen mit dem Sextanten oder Prismenkreis unter Benutzung des Quecksilberhorizontes oder künstlichen Horizontes. Während beim Quecksilberhorizont die freie Oberfläche des in einer Schale befindlichen Quecksilbers von selbst einen horizontalen Planspiegel darbietet, wird dieser beim künstlichen Horizont mittels einer sehr empfindlichen Libelle durch Aufsetzen derselben auf eine Planplatte aus schwarzem Glase mit Stellschrauben erreicht. Das Nähere über die Einrichtung der ersteren Instrumente auf ihre Beschreibung in der Optik verschiebend, bemerken wir über das

Messungsverfahren zu obigem Zweck nur kurz folgendes. Man stellt auch da am Teilkreise desselben auf bestimmte Höhen ein und beobachtet ebenfalls am Vormittag und Nachmittag die Zeiten, wo die Sonne diese Höhen erreicht, d. h. bei vertikaler Stellung des in der Hand gehaltenen Kreises das direkt gesehene Bild der Sonne im Quecksilberhorizont mit dem Bilde derselben nach Spiegelung am festen und beweglichen Spiegel des Sextanten koinzidiert oder, was besser ist, die Ränder dieser beiden Bilder der Sonne sich berühren.

Entsprechende Messungen korrespondierender Sonnenhöhen in der einen oder anderen Weise an folgenden Tagen gestatten, aus dem Unterschiede der gefundenen Uhrkorrektionen den täglichen Gang des Chronometers zu berechnen.

§ 33. Begriff der Masse. Die Masse eines Körpers wird gewöhnlich definiert als die Quantität der Materie, die er enthält. Diese viel verbreitete und viel bekämpfte Definition wäre in der Tat eine nichtssagende und deshalb unnütze Phrase, wenn wir sie nicht durch nachfolgende Erläuterungen erklären und vervollständigen würden.

Wir gelangen zunächst zu einer einwurfsfreien Vorstellung von relativen Quantitäten von Materie, wenn wir verschieden große Volumina gleichartiger Materie ins Auge fassen. So enthalten sicherlich 2 Liter Wasser doppelt soviel Materie als 1 Liter desselben Wassers. Setzen wir demnach die Masse, welche in 1 Liter Wasser enthalten ist, gleich Eins, so ist die Masse von n Litern Wassers gleich n.

Wir überlegen weiter, daß die Menge der Materie eines Körpers oder seine Masse nicht geändert wird, wenn wir nichts Materielles von ihm fortnehmen oder hinzugeben, mögen wir sonst was immer für Veränderungen mit dem Körper vornehmen. Lassen wir also n Liter Wasser gefrieren, so ändert sich wohl Volumen und Zustand desselben, aber nicht seine Masse. Sie würde sich auch nicht ändern, wenn wir das Wasser in Dampf verwandeln oder wenn wir es durch einen elektrischen Strom in seine Bestandteile, Wasserstoff und Sauerstoff, zerlegen würden. Das entstehende Gemisch der letztgenannten beiden Gase, das sogenannte Knallgas, hätte also ebenfalls die Masse $= n$ und würde dieselbe auch behalten, wenn wir das Gas beliebig verdichten oder ausdehnen würden. Die Masse eines Körpers ist also dasjenige, was bei allen Verwandlungen desselben unverändert gleich groß bleibt.

Sind wir auf diese Weise in den Stand gesetzt, Massen von Eis, Wasser, Dampf und Knallgas miteinander zu vergleichen und nach gemeinsamem Maße zu messen, so sind wir deshalb noch nicht imstande, die Massen auch solcher Körper miteinander zu vergleichen, welche nicht durch physikalische oder chemische Vorgänge ineinander übergeführt werden können. Wir sind z. B. nicht von vornherein imstande zu ermitteln, wie sich die Masse eines Liters Quecksilber zu der eines Liters Wasser verhält.

Um die Massen solcher Körper zu vergleichen, welche aus verschiedenen chemischen Grundstoffen bestehen, ist es deshalb notwendig, eine Eigenschaft der Materie aufzusuchen, welche ihr unabhängig von der Art der Materie zukommt und allein von der Quantität derselben abhängig ist. Es bieten sich zwei solcher Eigenschaften dar. Die erste derselben ist die Eigenschaft

der Materie, sich gegenseitig anzuziehen (Gravitation, Schwere); die *zweite* ist die Eigenschaft, jeder Änderung der vorhandenen Geschwindigkeit einen Widerstand entgegenzusetzen (Trägheit, Beschleunigungswiderstand).

Durch sorgfältige Versuche, welche freilich nicht immer einfach, sondern meist auf großen Umwegen ausführbar sind, kann man sich zunächst überzeugen, daß die Stärke der gegenseitigen Anziehung der Körper so lange dieselbe bleibt, solange die Quantität der angezogenen Materie (in oben erläuterter Weise verglichen) dieselbe bleibt, mag man sonst was immer für Veränderungen mit ihr vornehmen. Denkt man sich also z. B. auf die eine Schale einer Wage Gewichtsstücke gelegt, auf die andere ein verschlossenes Gefäß gesetzt, welches so viel Wasser enthält, daß die Wage im Gleichgewicht steht, d. h. also, daß beide Belastungen derselben gleich starke Anziehung erleiden, so bleibt diese Gleichheit fortbestehen, wenn das Wasser innerhalb des Gefäßes ganz oder teilweise in Eis oder in Dampf oder in Knallgas verwandelt wird. Wir sagen deshalb, das Wasser, das Eis, der Dampf und das Knallgas haben das gleiche *Gewicht*. Dies ist insbesondere beim Knallgas bemerkenswert, welches ganz anderer chemischer Natur ist als das Wasser.

Denken wir uns ein andermal, wir hätten auf die eine Schale der Wage ein Gefäß gegeben, welches, voneinander getrennt, äquivalente Mengen von Kochsalz (Chlornatrium) und Höllenstein (salpetersaures Silber) nebst einer Quantität von Wasser enthält. Diesen Materialien sei durch Gewichtsstücke auf der anderen Schale das Gleichgewicht gehalten. Vermischen wir dann die erstgenannten Materialien, so zersetzen sie sich gegenseitig, und es entstehen Körper mit ganz anderen chemischen und physikalischen Eigenschaften, nämlich festes Chlorsilber und eine Lösung von Natronsalpeter. Trotzdem wird das Gleichgewicht an der Wage nicht gestört, weil nichts Materielles fortgekommen oder dazugekommen ist, mit anderen Worten, weil die *Masse* der Materie unverändert blieb. Durch unzählige ähnliche Versuche gewinnen wir also die Überzeugung, daß *gleichen Massen gleiche Gewichte entsprechen*.

Durch einen Induktionsschluß, der aber zunächst nur auf einer Hypothese beruht und noch nicht bewiesen ist, kommen wir dann dazu, diesen Satz umzukehren und zu sagen: *Gleichen Gewichten entsprechen immer auch gleiche Massen*. Ein Körper, dessen Gewicht n mal so groß als das Gewicht eines Liters Wasser ist, hat also auch eine Masse n.

Daß diese Verallgemeinerung, vermöge welcher wir auch bei solchen Körpern, die nicht auseinander entstehen können, aus gleichen Gewichten auf gleiche Massen schließen, nicht von vornherein sicher ist, lehrt folgende Überlegung. Es wäre gewiß denkbar, daß die Erde in ihrer Anziehung gewisse Stoffe bevorzuge und deshalb gleiche Massen von diesen stärker anziehe als gleiche Massen anderer Stoffe, so etwa, wie der Magnet eine gleiche Masse Eisen stärker anzieht wie eine gleiche Masse Mangan, Nickel usw. Wir wissen demnach wohl bestimmt, daß 1 kg Eis dieselbe Masse habe wie 1 kg Wasser, aber nicht, ob dies dieselbe Masse habe, wie z. B. 1 kg Quecksilber.

Solange wir also die Definition: „Masse ist die Quantität der Materie“ beibehalten wollen, wird uns die Eigenschaft der Anziehung allein nicht mit Sicherheit die Massen verschiedener Körper vergleichen lassen. Geben wir obige Definition auf und *nennen* willkürlich solche Massen gleiche Massen, welche gleiches Gewicht haben, so entfällt zwar jeder Einwurf, aber auch

jeder Vorteil der Einführung des Namens Masse, der dann neben dem Ausdruck Gewicht überflüssig ist.

Wir müssen uns also nach einem weiteren Kriterium umsehen, nach welchem wir die Quantität der Materie beurteilen können, und wir werden später ein solches finden in der Eigenschaft der Materie, unter dem Einflusse einer Kraft eine Beschleunigung zu erleiden, deren Größe nur allein abhängt von der Quantität der Materie, auf welche die Kraft wirkt. Da wir die Begriffe Kraft und Beschleunigung noch nicht erklärt haben, so müssen wir uns hier vorläufig mit der Festsetzung begnügen, daß wir jene Massen als gleich annehmen, welche sich auf der Wage das Gleichgewicht halten.

§ 34. Die Masseneinheit und die daraus abgeleitete Volumeinheit (Liter). Dieselbe französische Kommission, welche im Jahre 1799 das Meter als den 10 millionten Teil des Erdquadranten definierte, hatte auch festgesetzt, daß als Einheit der Masse unter dem Namen Gramm die Masse eines Cubikcentimeters reinen Wassers, gemessen bei der Temperatur seiner größten Dichte, nämlich 4° C, gelten solle.

Lefèvre-Gineau und Fabbroni wurden mit der schwierigen Aufgabe betraut, nach dieser Definition die Masseneinheit, bzw. ein zweckmäßiges Vielfaches derselben materiell herzustellen. Sie benutzten dazu einen von Fortin angefertigten, möglichst genauen, geschlossenen Zylinder aus Messing von rund 11 Cubikdecimeter Inhalt, dessen äußeres Volumen durch sorgfältige Abmessung genau ermittelt wurde, worauf sie die diesem Volumen entsprechende Wassermasse durch den scheinbaren Gewichtsverlust bestimmten, welchen der Zylinder infolge des Archimedischen Prinzips beim Einsenken in reines Wasser erfuhr. Dem Resultate dieser Messungen zufolge stellte dann Fortin als Normalmasseneinheit (Kilogrammetalon des Archives) einen Platinzylinder her, dessen Höhe gleich dem Durchmesser war, und der im leeren Raume ebensoviel wiegen sollte wie ein Cubikdecimeter reinen Wassers bei 4° C. Da die Wägung im Wasser nicht bei 4°, sondern bei einer anderen Temperatur und nicht im luftleeren Raume vorgenommen werden konnte, so waren verschiedene Korrektionen anzubringen, deren Ausmittelung schwierig ist und im Verein mit anderweitigen Fehlerquellen verursacht haben, daß ebenso wie das Meter nicht genau als der 10 millionte Teil des Erdmeridians, auch das Kilogramm nicht genau als die Masse eines Cubikdecimeters Wasser von 4° erhalten worden war. Spätere Messungen haben im Mittel ergeben, daß das ursprüngliche Platinkilogramm der Archive zu Paris gegenüber seiner Definition einige Centigramm zu groß ausgefallen war. Der mittlere Fehler aller Einzelmessungen betrug ± 142 Milligramm[1]).

Da nun aber bei der Vergleichung zweier Kilogramme auf der Wage eine Genauigkeit von ± 0,0022 Milligramm zu erreichen ist, so hat die Internationale Meterkommission vom Jahre 1872 ohne weiteres darauf verzichtet, das neue internationale Kilogramm nach seiner idealen Definition herzustellen, sondern festgesetzt, daß dasselbe dem bestehenden Platinkilogramm der

---

[1]) H. Wild, De la détermination du poid, d'un décimètre cube d'eau destillée à 4° C. Bull. de l'Acad. de St. Pétersbourg 15 (1870). — Deutsch: Über die Bestimmung des Gewichtes von einem Cubikdecimeter destillierten Wassers bei 4° C. Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 5, 15, 1871. Siehe die neuesten Resultate S. [illegible]

Drittes Kapitel.

om Gleichgewicht und den Bewegungen der festen Körper.

Archive möglichst gleich, jedoch aus der widerstandsfähigeren Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium hergestellt werde. Im Jahre 1889 wurde das neue Prototyp im Internationalen Bureau fertiggestellt und eine Anzahl gleichwertiger Kopien desselben an die betreffenden Staaten verteilt. Dieses Prototyp stellt einen gleichseitigen Zylinder mit ganz schwach abgerundeten Kanten aus der erwähnten Platiniridiumlegierung dar, dessen Oberfläche zum Hochglanz poliert und ohne Marke ist, um das Ansetzen von Staub zu vermeiden. Die 40 nationalen Kopien sind ebenso hergestellt, nur tragen sie auf der Seitenfläche ganz schwach in matt gehaltenen Zügen die unterscheidenden Nummern. Alle Kilogramme ruhen für gewöhnlich auf einer polierten Quarzplatte auf, die im Grunde einer Vertiefung der messingenen Fußplatte liegt, und sind alle von einem polierten Platinringe umgeben, welcher sie vor der Berührung mit dem Messing schützt. Über die Zylinder sind zwei auf der ebenen Fußplatte staubdicht aufruhende Glasglocken gestülpt, von denen die äußere durch einen besonderen, mit Schlüssel zu öffnenden Verschluß an der Platte festgeklemmt ist. Das internationale Prototyp ist im eisernen Schranke noch unter eine besondere tubulierte Glasglocke gestellt, welche luftleer gepumpt werden kann. Von allen Kopien des Prototyps wurde das Volumen durch Wägung in Wasser genau ermittelt und das genaue Gewicht derselben im Vergleich mit dem des Prototyps, bezogen auf den luftleeren Raum, mit einer Genauigkeit von ± 0,0022 Milligramm festgestellt[1]).

Die Masse dieses Platiniridiumkilogramms, bzw. ihr tausendster Teil gilt nunmehr als Masseneinheit, also nicht mehr die Masse eines Cubikdecimeters Wasser.

Durch decimale Unterteilung und Vervielfachung entstehen folgende Massenmaße:

1 Tonne (t)	1000000	Gramm (g)
1 Kilogramm (kg)	1000	"
1 Hektogramm (Hg)	100	"
1 Dekagramm (Dg)	10	"
1 Gramm (g)	1	"
1 Decigramm (dg)	0,1	"
1 Centigramm (cg)	0,01	"
1 Milligramm (mg)	0,001	"
1 Mikrogramm	0,000001	"

Bedeutung des Liters als Volumeinheit. Nach neueren sehr sorgfältigen Untersuchungen ergaben sich für die Masse eines Cubikdecimeters Wasser bei 4° C und Normaldruck, gemessen nach dem eben definierten Kilogramm, nachfolgende Werte:

Macé de Lépinay, 1. Methode	0,999954
Macé de Lépinay, Pérot et Fabry, 2. Methode .	0,999974
Chappuis	0,999976
Guillaume, Mittel aus vier Versuchen	0,999936

[1]) Rapport sur la construction, les comparaisons et les autres opérations ayant servi à determiner les équations des nouveaux prototypes métriques par le directeur du bureau international R. Benoit et présenté par le comité international à la première Conférence générale. September 1889. Paris, Gauthier-Villars.

Hieraus wurde mit Berücksichtigung aller Umstände das Gesamtresultat abgeleitet, daß die

Masse eines Cubikdecimeters Wasser $= 0{,}999\,960 \pm 0{,}000\,010$ kg

sei. Das Kilogrammprototyp ist also um etwa 40 Milligramm zu groß geraten.

Da man nun den Inhalt von Hohlmaßen viel sicherer durch Abwägen ihres Masseninhaltes als durch Ausmessen ihrer Dimensionen ermittelt, so hat die Internationale Kommission vom 2. Oktober 1880 behufs präziser Definition festgesetzt, daß

Die Einheit des Volumens für Präzisionsmessungen jenes Volumen sein solle, welches von der Masse eines Kilogramms Wasser im Maximum seiner Dichte (bei 4° C) und beim Normaldruck[1]) eingenommen wird. Diese Volumeinheit (also nicht das Cubikdecimeter) wird fortan Liter genannt.

Die vom Liter abgeleiteten Maße Kiloliter, Hektoliter, Dekaliter, Deciliter, Centiliter, Milliliter und Mikroliter sind also im Einklange mit dem Kilogramm und dort anzuwenden, wo das Volumen durch Wägung ermittelt wird, während die Maße Cubikmeter, Cubikdecimeter, Cubikcentimeter und Cubikmillimeter im Einklange mit dem Meter stehen und streng genommen nur dann anzuwenden wären, wenn das Volumen durch Abmessungen mit dem Längenmaße ermittelt würde. Die internationale Generalversammlung von 1901 sanktionierte diese Festsetzung und fügte in Anbetracht der oben erwähnten Messungen hinzu, daß für Volumbestimmungen, deren Genauigkeit $^1/_{25000}$ der zu messenden Größe nicht übersteigt, der Unterschied zwischen Cubikdecimeter und Liter vernachlässigt werden kann[2]).

§ 35. Gewicht; Gewichtssätze. Man versteht unter dem Gewichte eines Körpers die Kraft, mit welcher derselbe von der Erde angezogen wird[3]). Demnach ist das Gewicht eine Größe ganz anderer Art als die Masse. Das geht schon daraus hervor, daß die letztere unveränderlich ist, während das Gewicht von Umständen abhängt, die außerhalb des Körpers liegen. Wenn man mit einem Kilogramm auf Reisen geht, so behält es, solange es nicht beschädigt wird, seine Masse unverändert bei, hingegen verringert sich sein Gewicht, so oft wir eine Höhe ersteigen oder in geringere geographische Breite kommen. Ein Körper, dessen Gewicht in

---

[1]) Nach Beschluß des Internationalen Maß- und Gewichtskomitees gilt als Normaldruck der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° C unter 45° Breite im Meeresniveau. Dabei sei die Dichte des Quecksilbers bei 0° = 13,595 93 und die Beschleunigung der Schwere unter 45° Breite und im Meeresniveau = 980,665 cm-s. Letzterer Wert abgeleitet aus den Bestimmungen von Desforges für das Internationale Bureau = 980,991, und multipliziert mit dem Reduktionskoeffizienten 0,999 668 zur Reduktion auf 45° und Meereshöhe.

[2]) Procès-verbaux des séances du Comité intern. des p. et m. de 1901, 2. série, T. 1. Annexe: Décisions prises par la conférence générale des p. et m. et par le Comité international concernant les unités et les prototypes métriques.

[3]) Die Definition: „Gewicht ist der Druck, den ein Körper infolge der Schwere auf die Unterlage, oder der Zug, den er auf den Aufhängepunkt ausübt", ist nicht zweckmäßig, weil sie nicht anwendbar ist auf fallende, geworfene Körper, auf Luftballons usw., die doch auch ein Gewicht haben, da die Erde eine Kraft auf sie ausübt.

Madrid = 1 gesetzt wird, hat in Christiania das Gewicht 1,0018, es ändert sich vom Äquator bis zum Nordpol um ein halbes Prozent.

Das Kilogramm ist eine Masse und kein Gewicht, man kann nur sagen, es habe ein Gewicht und kann diesem die Bezeichnung Kilogrammgewicht beilegen[1]).

Auch die sogenannten Gewichtssätze sollten richtiger Massensätze heißen, denn die auf den Gewichtsstücken angebrachten Zahlen bedeuten nur die Größe der Massen, nicht aber die Anziehungskräfte, welche die Gewichtsstücke von der Erde erleiden. Auch haben wir beim Wägen in der Regel gar nicht die Absicht, irgend etwas über diese Anziehungskräfte zu erfahren, wir wollen nur, fußend auf dem Satze, daß gleichen Gewichten unter gleichen Umständen auch gleiche Massen entsprechen, die letzteren unter sich vergleichen.

Ein richtig adjustierter Gewichtssatz soll so beschaffen sein, daß er im luftleeren Raume mit den Platiniridiumprototypen übereinstimmt. Wäre der Gewichtssatz aus demselben Material, so würde er auch bei Wägung in Luft damit übereinstimmen. Wegen der Kostbarkeit dieses Materials fertigt man aber die Gewichtssätze in der Regel aus Messing und nur die Bruchteile des Grammes aus Platin (oder Aluminium). Da nun aber Messing bei gleicher Masse ein mehr als doppelt so großes Volumen hat als Platiniridium (die Volumina verhalten sich wie $\frac{1}{8,39} : \frac{1}{21,45} = 1:2,55$), so verdrängt es auch mehr Luft und erleidet nach dem Archimedischen Prinzip einen größeren Auftrieb als Platiniridium. Folglich kann ein richtig adjustiertes Messinggewichtsstück mit einem richtigen Platiniridiumgewichtsstücke bei Wägung in Luft nicht übereinstimmen. Der Unterschied beträgt bei einem Kilogramm und Luft mittlerer Beschaffenheit ungefähr 0,09 g, also einen Betrag, der schon auf einer gewöhnlichen Krämerwage noch bemerkbar ist, also keineswegs vernachlässigt werden darf. Bei Präzisionswägungen ist es deshalb auch erforderlich, daß alle Gewichtsstücke aus gleich dichtem Material seien, da man sonst für jedes einzelne den Auftrieb besonders bestimmen müßte. Darum dürfen Präzisionsgewichte auch keine Hohlräume enthalten. Gewichtsstücke mit eingeschraubten Stielchen sind deshalb als solche nicht zulässig, denn ist der Hohlraum unter dem Stielchen von der Atmosphäre abgeschlossen, so hat er Einfluß auf den Auftrieb, ist er aber mit der Atmosphäre in Verkehr, so gibt er zu anderen Fehlern infolge des Eindringens von Staub oder Feuchtigkeit Anlaß. Ferner müssen die Messinggewichte mit einem nicht oxydierbaren Metall überzogen sein, da Firnisschichten nicht unveränderlich sind. Man pflegt daher solche Gewichte zu vergolden oder zu vernickeln. Vergoldete Gewichte haben den

[1]) Die dritte Generalversammlung für M. u. G. hat in ihrer Sitzung vom 22. Oktober 1901 zu Paris einstimmig die Erklärung adoptiert:

1. Das Kilogramm ist die Einheit der Masse und gleich der Masse des internationalen Prototyps des Kilogramms.
2. Der Ausdruck Gewicht bezeichnet eine Größe gleicher Natur wie eine Kraft; das Gewicht eines Körpers ist das Produkt seiner Masse in die Beschleunigung der Schwere und speziell das Normalgewicht das Produkt seiner Masse in die Normalbeschleunigung der Schwere (980,665 cm-s).

Nachteil, daß sie gegen Quecksilber ungemein empfindlich sind, auch ist der Nickelüberzug härter. Galvanische Platinüberzüge haben sich nicht bewährt.

Um solche vergoldete oder vernickelte Gewichtsstücke leichter rektifizieren zu können, ohne deren schützenden Überzug zu verletzen, pflegt man sie mit einem Eichstifte aus massivem Golde oder Nickel zu versehen. Für chemische Laboratorien, in denen die sauren Dämpfe die Gewichtsstücke gefährden, sind Bergkristallgewichte empfehlenswert. Hohle, mit Quecksilber oder mit Bleischroten gefüllte Glasgewichte sind aus den oben angeführten Gründen wegen ungleichen Auftriebes und wohl auch wegen der hygroskopischen Eigenschaften des Glases für Präzisionswägungen nicht brauchbar. Die Bezeichnung der Gewichtsstücke durch vertiefte Zahlen ist wegen des in den Vertiefungen sich ansammelnden Staubes zu vermeiden.

Für die Rektifikation der Gewichtsstücke ist notwendig, daß die gleichwertigen Stücke voneinander kenntlich gemacht seien. Daß Präzisionsgewichte nie mit den Händen berührt, sondern nur mittels Pinzetten mit beinernen oder lederumhüllten Spitzen angefaßt werden dürfen und auch nur in Etuis mit weichen Umhüllungen aufbewahrt werden sollen, erscheint selbstverständlich.

Auf die Richtigkeit gekaufter Gewichtssätze darf sich der Physiker nie verlassen, er muß sie stets von Zeit zu Zeit einer Prüfung unterziehen. Er benötigt dazu ein verifiziertes Normalgewicht, am besten in der Höhe der Summe der Nennwerte der zu prüfenden Gewichtstücke, also z. B. ein Normalkilogramm oder ein Normalhektogramm, wenn das größte Gewichtsstück des Satzes 500 oder 50 g beträgt. Der Gewichtssatz enthalte z. B. drei 1 g-Stücke, ein 2 g-Stück, ein 5 g-Stück, zwei Zehner, einen Zwanziger und ein 50 g-Stück. Man vergleicht dann zunächst durch Vertauschung auf derselben Schale, während auf der anderen eine Tara liegt, die drei Einser, dann zwei Einser zusammen mit dem Zweier, dann die Summe $1 + 1 + 1 + 2$ mit 5 usf. Man erhält dann die Gewichte aller Stücke zunächst ausgedrückt durch einen der Einser als Einheit mit gewissen kleinen Korrektionen. Indem man schließlich die Summe aller Stücke mit dem Normalgewichte vergleicht, erhält man die wahren Werte aller Stücke. Sind die Abweichungen nicht groß, so kann man sie für die gröberen Wägungen vernachlässigen, für die genaueren Wägungen in Rechnung bringen, indem man statt der Nennwerte die wahren Werte addiert. Dazu müssen, wie oben erwähnt, die gleichwertigen Stücke voneinander kenntlich sein.

Sind die Abweichungen alle gleichen Zeichens und ungefähr proportional den Nennwerten, so gelingt es vielleicht, einen gemeinsamen Reduktionsfaktor zu berechnen, mit dem man die Summe der Nennwerte einer Wägung multipliziert, um das wahre Gewicht bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler zu erhalten.

Diese Verfahrungsweisen führen fast immer sicherer und schneller zum Ziele als eine wirkliche Abänderung der Gewichtsstücke, die man am besten dem Mechaniker überläßt.

Über die Ausführung der Wägungen, die Korrektion wegen des Auftriebes usw. soll bei der Wage das Nähere besprochen werden.

§ 36. Dichte. Spezifisches Gewicht. Zu dem Begriffe der Dichte gelangen wir zunächst in einwurfsfreier Weise, indem wir von der Tat-

sache ausgehen, daß sich die Körper durch Druck oder Abkühlung auf einen kleineren Raum bringen lassen. Wir können uns dies in der Weise vorstellen, daß sich die kleinsten Teile des Körpers gegenseitig nähern, sich also, wie man sagt, dichter anordnen. Für ein und denselben homogenen Körper erhalten wir demnach ein sicheres Maß der Dichte in dem Verhältnis zwischen der Maßzahl seiner Masse und der Maßzahl seines Volumens, da ja die Anzahl seiner Teile der Masse proportional sein muß. Hat also die Masse des Körpers die Größe M, das Volumen die Größe V, so ist die Dichte d gegeben durch

$$d = \frac{M}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Dagegen ist es nicht möglich, von Körpern verschiedener Materie zu sagen, wie ihre Dichten sich verhalten, weil wir nicht wissen, ob ihre Teilchen einander näher oder ferner stehen. Wenn wir trotzdem die Beziehung $d = \frac{M}{V}$ verallgemeinernd auch zur Vergleichung der Dichten verschiedener Körper gelten lassen, so geben wir die ursprüngliche Dichtevorstellung auf und ersetzen sie durch ein konventionelles Zahlenverhältnis. Wir definieren dann die Dichte als die Masse der Volumeneinheit des Körpers.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir erfahren, daß es zwei Volumenmaße gibt: Cubikdecimeter (Cubikcentimeter) einerseits und Liter (Milliliter) andererseits, welche nahe aber nicht genau übereinstimmen.

Messen wir die Massen nach Kilogrammen (Grammen), die Volumina nach Litern (Millilitern), so erhalten wir für das Wasser von 4° die Dichte = 1, während wir bei Zugrundelegung des Cubikdecimeters (Cubikcentimeters) diese Dichte = 0,99996 finden müßten. Behalten wir, was zweckmäßiger ist, die erstere Meßweise bei, so entspricht dieselbe auch folgender Definition der Dichte: Die Dichte eines Körpers ist das Verhältnis seiner Masse zur Masse eines gleichen Volumens Wasser größter Dichte.

Sobald ferner feststeht, daß am selben Orte die Massen proportional sind den Gewichten, kann man das Verhältnis der Massen durch das Verhältnis der Gewichte ersetzen. Daher stammt dann der Ausdruck spezifisches Gewicht für Dichte.

Die Dichte (spezifisches Gewicht) der festen Körper und Flüssigkeiten pflegt man auf Wasser von 4°, die der Gase und Dämpfe entweder auf Luft oder auf Wasserstoffgas, beide bei 0° und Normaldruck genommen, zu beziehen.

Ausnahmsweise bezieht man die Dichte von Gasen und Dämpfen bei irgend einer Temperatur und irgend einem Drucke auf Luft oder Wasserstoffgas von derselben Temperatur und demselben Drucke. Das muß aber jedesmal ausdrücklich bemerkt werden.

Über die Ausführung der Dichtebestimmungen können wir erst später Näheres mitteilen.

Zweites Kapitel.

Von den Bewegungen und den Kräften im allgemeinen.

§ 37. Einteilung der Bewegungen: gleichförmige Bewegung, Begriff der Geschwindigkeit. Wenn ein Punkt seine Lage gegenüber anderen Punkten innerhalb einer gewissen Zeit stetig, d. h. ohne Überspringung von Zwischenlagen ändert, so sagt man, er bewege sich.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns eigentlich nur mit den Bewegungen einzelner materieller Punkte oder solcher Systeme von materiellen Punkten, bei welchen die letzteren samtlich die gleiche Bewegung miteinander machen.

Die Lehre von den Bewegungen ohne Rücksicht auf die bewegten Massen und die bewegenden Kräfte heißt Phoronomie.

Die Bewegungen eines Punktes können eingeteilt werden entweder in räumlicher Beziehung, d. h. in bezug auf die Gestalt einer Bahn, oder in zeitlicher Beziehung, nämlich in bezug auf die Zeitdauer, in welcher die einzelnen Teile der Bahn zurückgelegt werden.

Die Bahn der Bewegung ist entweder eine gerade Linie, was den einfachsten Fall darstellt, oder sie ist eine ebene Kurve, z. B. ein Kreis, oder sie ist eine Raumkurve, z. B. eine Schraubenlinie.

Die Richtung der Bewegung ist bei der geradlinigen Bewegung diese Gerade selbst, also immer gleichbleibend, bei der krummlinigen Bewegung ist sie veränderlich. Unter der momentanen Richtung versteht man dann die Tangente an den Punkt der Bahn, wo sich momentan der bewegliche Punkt befindet.

Der Sinn der Bewegung (im gewöhnlichen Sprachgebrauche ebenfalls mit „Richtung“ bezeichnet) drückt aus, ob dieselbe vorwärts oder rückwärts stattfindet. Nach welcher Seite man ursprünglich die Bewegung als vorwärts oder + rechnet, ist willkürlich und gleichgultig, wenn nur der entgegengesetzte Sinn dann rückwärts genannt und durch das Zeichen bezeichnet wird.

In bezug auf den zeitlichen Verlauf können wir die Bewegungen nach folgendem Schema einteilen:

Bewegung

- 1. gleichförmige
- ungleichförmige oder veränderliche
  - 2. gleichmäßig veränderliche
  - 3. ungleichmäßig veränderliche usw.

Die **gleichförmige Bewegung** ist diejenige, bei welcher in unter sich gleichen Zeiträumen stets unter sich gleiche Weglängen zurückgelegt werden.

Die **Geschwindigkeit** ist ein unmittelbar gegebener Begriff, dessen quantitative Unterschiede wir schon im täglichen Leben mit den Ausdrücken langsam, schnell ausdrücken. **Die Größe der Geschwindigkeit wird gemessen durch das Verhältnis der Maßzahl des zurückgelegten Weges zur Maßzahl des inzwischen verflossenen Zeitraumes.**

Bei der gleichförmigen Bewegung ist dieses Verhältnis, also die Geschwindigkeit, konstant.

Sind also:

$s_1, s_2 \ldots s_n$ beliebig ausgewählte Wegstrecken,

$t_1, t_2 \ldots t_n$ die zugehörigen Zeitlängen,

so ist die Geschwindigkeit gegeben durch:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \ldots = \frac{s_n}{t_n}.$$

Setzt man also für die Länge irgend einer Wegstrecke das allgemeine Zeichen s und für die zugehörige Zeitdauer das allgemeine Zeichen t, endlich für die Geschwindigkeit das Zeichen c, so gelten die Beziehungen:

$$c = \frac{s}{t}, \quad s = c\,t, \quad t = \frac{s}{c}\,^{1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

[1] Man drückt diese fundamentalen Beziehungen oft mit den Worten aus: die Geschwindigkeit ist gleich dem Wege dividiert durch die Zeit; der Weg ist gleich Geschwindigkeit, multipliziert mit der Zeit; die Zeit ist gleich dem Wege, dividiert durch die Geschwindigkeit. Wenn diese Ausdrucksweise auch im Gespräche als Abkürzung zulässig sein mag, so müssen wir doch darauf aufmerksam machen, daß sie nicht korrekt ist, denn man kann nicht ein Ding durch ein anderes dividieren oder mit einem anderen multiplizieren. Man kann dagegen eine Weglänge in eine Anzahl Teile teilen oder so und so viel mal nehmen, oder das Verhältnis zwischen zwei Weglängen suchen, weil beide gleichartige Größen sind.

Die Gleichung $c = \frac{s}{t}$ kann also nur den Sinn haben: Man teile die Länge des Weges s in so viele Teile, als die Zeit t Zeiteinheiten enthält. Das Resultat dieser Teilung ist natürlich selbst eine Weglänge, und diese Weglänge ist das Maß der Geschwindigkeit c. Hat die Bewegung überhaupt nur eine Zeiteinheit lang gedauert, so entfällt die Teilung durch den Nenner Eins, und wir erhalten die Definition:

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung wird gemessen durch die Länge des Weges in der Zeiteinheit.

Hat die Bewegung nicht eine Zeiteinheit lang, sondern länger oder kürzer gedauert, so kann diese Definition beibehalten werden, wenn man sie dahin erweitert, daß die Geschwindigkeit durch die Weglänge gemessen wird, welche zurückgelegt worden wäre, wenn die Bewegung eine Zeiteinheit lang gedauert hätte.

Indem man die Geschwindigkeit in dieser Weise definiert, kann man auch den beiden anderen Formeln unter (1) eine physikalische Anschaulichkeit und einen korrekten Ausdruck in Worten geben.

Die Gleichung $s = c\,t$ sagt einfach: Der Weg in t Zeiteinheiten ist t mal so lang als der Weg c einer Zeiteinheit.

Die Gleichung $t = \frac{s}{c}$ sagt: Die Zeitdauer t einer gleichförmigen Bewegung ist gleich dem Verhältnis der Länge s des zurückgelegten Weges zur Länge c jenes Weges, der in der Zeiteinheit zurückgelegt würde.

Es versteht sich von selbst, daß die Zahl, welche man für die Geschwindigkeit berechnet, von den Einheiten abhängt, nach welchen man die Längen und die Zeiten mißt. Es ist deshalb notwendig, das Längen- und Zeitmaß beizufügen. Im (C.G.S.)-System mißt man die Wege in Centimetern, die Zeiten in Sekunden.

§ 38. Die gleichmäßig veränderliche Bewegung; Begriff der Beschleunigung. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit immer gleich groß bleibt, ändert sich dieselbe bei der ungleichförmigen Bewegung fortwährend, sie nimmt zu oder ab. Den nächst einfachsten Fall bildet dann diejenige Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit zu- oder abnimmt. Es ist dies dann zwar keine gleichförmige, aber doch eine gleichmäßig veränderte Bewegung. Je nachdem die Geschwindigkeit derselben mit der Zeit zunimmt oder abnimmt, nennen wir sie eine gleichmäßig beschleunigte oder eine gleichmäßig verzögerte Bewegung. Wir wollen die veränderliche Geschwindigkeit zum Unterschiede von der konstanten mit v bezeichnen.

Hat die Bewegung nach der Zeit t die Geschwindigkeit v, nach der Zeit t' die Geschwindigkeit v' erreicht, so ist $t' - t$ die Zeitdauer, während welcher sich die Geschwindigkeit um $v' - v$ verändert hat. Für die gleichmäßig veränderliche Bewegung ist das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zum Zeitfortschritt also die Größe $\frac{v' - v}{t' - t} = q$ eine Konstante und wird Beschleunigung genannt. Dabei wird dieselbe als positiv betrachtet, wenn die Geschwindigkeit wächst. Nimmt dagegen die Geschwindigkeit ab, erleidet also die Bewegung eine Verzögerung, so wird dieselbe als negative Beschleunigung angesehen. Wählt man für $t' - t$ den Wert Eins, so ist $q = v' - v$. Daraus folgt die Definition: Die Beschleunigung bei der gleichmäßig veränderten Bewegung wird gemessen durch den Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit.

Endlich ist noch zu bemerken, daß eine entgegengesetzte Geschwindigkeit durch entgegengesetztes algebraisches Zeichen ausgedrückt wird.

Beispiele der Berechnung der Geschwindigkeit:

1. Ein Punkt des Äquators beschreibt in 24 Stunden (= 86400 Sekunden) einen Kreis gleich dem Umfang der Erde, welcher am Äquator 40070 km beträgt, folglich ist seine Geschwindigkeit:

$$v = \frac{40\,070\,000}{86\,400} = 464 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}} = 46\,400 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}.$$

2. Nach Regnaults Versuchen durchläuft der Schall in einer Minute in einer 1,1 m weiten Röhre eine Strecke von 19851 m, folglich ergibt sich für die Geschwindigkeit des Schalles:

$$v = \frac{19\,851}{60} = 331 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}} = 33\,100 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}.$$

3. Cornu hat nach Fizeaus Methode gefunden, daß das Licht in der Luft eine Entfernung von 10310 m in 0,000 034 55 Sekunden durchläuft, mithin ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes (in Luft):

$$v = \frac{10{,}31}{0{,}000\,034\,55} = 298\,400 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Sekunden}} = 2984 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}.$$

Um die Beschleunigung zu finden, sollte man die am Anfange und am Ende eines beliebig langen, aber bekannten Zeitintervalls vorhandenen Geschwindigkeiten ermitteln und ihre Differenz durch die Dauer des Intervalls dividieren. Dabei stoßen wir auf die Schwierigkeit, daß wir die aus der gleichförmigen Bewegung (im vorigen Paragraphen) abgeleitete Definition der Geschwindigkeit hier nicht ohne weiteres anwenden können. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Rechnungsregel: Geschwindigkeit $= \frac{\text{Weglänge}}{\text{Zeitdauer}}$ stets zu demselben Werte führt, wie groß man auch den Weg oder die Zeit wählt, so ist dies bei einer veränderlichen Bewegung nicht mehr der Fall. Wir können bei dieser nicht von einer andauernden, konstanten Geschwindigkeit, sondern nur von einer **momentanen (augenblicklichen) Geschwindigkeit** sprechen, welche gar keine **Zeitlänge** hindurch und keine **Wegstrecke** entlang dauert, sondern nur in einem **Zeitpunkte** und an einem **Punkte** des Weges vorhanden ist.

Wir kommen zu einer stichhaltigen Definition dieser momentanen Geschwindigkeit auf folgende Weise. Wir denken uns von dem gegebenen Punkte der Zeit und des Weges an, für welchen die Geschwindigkeit gesucht wird, die Bewegung noch eine kleine Zeit τ hindurch dauern und während derselben die kleine Weglänge σ zurücklegen. Das Verhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ gibt dann zunächst einen angenäherten Wert der gesuchten Geschwindigkeit. Hierauf geben wir dem σ und dem τ immer kleinere und kleinere zusammengehörige Werte. Dabei nähert sich ihr Verhältnis immer mehr und mehr einem **Grenzwerte**. Dieser Grenzwert ist die gesuchte momentane Geschwindigkeit. Man drückt dies oft auch so aus, daß man sagt, die Geschwindigkeit sei das Verhältnis einer unendlich kleinen Wegstrecke zur zugehörigen unendlich kleinen Zeitdauer [1]).

Auf diese Weise definiert, ist die momentane Geschwindigkeit eine mathematische Abstraktion. Die physikalische Bedeutung der momentanen Geschwindigkeit ist auch hier die einer Weglänge, nämlich jener Weglänge, welche der bewegte Punkt in einer Zeiteinheit zurücklegen **würde**, wenn seine Geschwindigkeit von dem ins Auge gefaßten Zeitmomente an keine Veränderung mehr erleiden würde.

Wir haben jetzt noch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen **Zeit** t, **Geschwindigkeit** v, **Beschleunigung** φ und **Weg** s in der mathematischen Zeichensprache auszudrücken.

Wir beschränken uns dabei hier auf den einfachsten Fall, daß zur Zeit $t = o$, wo wir uns die Bewegung beginnend denken, die Geschwindigkeit und der (bereits zurückgelegte) Weg $= o$ seien. Wir haben es demnach hier nur mit der gleichmäßig **beschleunigten**, nicht mit der verzögerten Bewegung zu tun. Den allgemeinen Fall, wo v und s Anfangswerte haben, werden wir später bei der Zusammensetzung von Bewegungen in Behandlung nehmen.

---

[1]) In der Analysis bezeichnet man diese unendlich kleinen Größen mit ds und dt und nennt ihr Verhältnis $\frac{ds}{dt}$ den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Da binnen der Zeit von o bis t die Geschwindigkeit von o bis v zug nommen hat, so berechnet sich die Zunahme per Zeiteinheit, d. i. die B schleunigung:

$$\varphi = \frac{v}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

woraus folgt:

$$v = \varphi t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

und

$$t = \frac{v}{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

Um den Weg s zu erhalten, wollen wir eine geometrische Darstellungs weise zu Hilfe nehmen, welche nach mehrfacher Richtung nützliche Dienst leistet und schon dem Schöpfer der Bewegungslehre G. Galilei zu demselbe Zwecke gedient hat.

Wir haben bei der gleichförmigen Bewegung die Größe des zurück gelegten Weges durch ein Produkt aus der Größe der Zeitdauer und de

Fig. 78.

Größe der Geschwindigkeit zu berechnen gelernt. In der Geometrie kan jedes Produkt aus zwei Größen durch den Flächeninhalt eines Rechteck dargestellt werden, dessen Seitenlängen die beiden Faktoren sind. Trägt man daher auf einer Abszissenachse ox, Fig. 78, Längen ot_1, ot_2, ot_3 . . auf, welche den Zeiten t_1, t_2, t_3 entsprechen, ebenso auf der Ordinatenachse ein Stück ov, welches die Größe der Geschwindigkeit v darstellt, so repräsentieren die Flächenräume der Rechtecke über den Grundlinien ot_1, ot_2, ot_3 . . . die Größen der entsprechenden zurückgelegten Wegstrecken.

Fig. 79.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Geschwindigkeit v veränderlich, und zwar proportional der Zeit anwachsend. Wollen wir demnach dieselbe Darstellungsweise verallgemeinernd auf diese Bewegung anwenden, so müssen wir an Stelle der horizontalen Geraden eine schiefe Gerade zeichnen, Fig. 79, welche vom Punkte o bis zum Punkte v über dem

Viertes Kapitel.

Mechanik nichtstarrer, fester Körper.

bszissenpunkte t ansteigt. Es werden dann offenbar die bei dieser Be-
egung zurückgelegten Wegstrecken der Größe nach durch die Flächen-
iume dargestellt, welche begrenzt sind einerseits durch die Abszissen-
chse und die schiefe Gerade, andererseits durch die Ordinaten, welche den
eitpunkten der Bewegung entsprechen[1]. Der Weg in der Zeit bis t_1 ist
lso der Größe nach dargestellt durch den Flächeninhalt des Dreiecks $o\, t_1\, v_1$,
er Weg von t_1 bis t_2 durch den Flächeninhalt des Trapezes $t_1\, t_2\, v_2\, v_1$ und
 fort. Der ganze Weg in der Zeit von o bis t ist also der Größe nach gleich
em Flächeninhalt des Dreiecks $o\, t\, v$; daraus folgt:

$$s = \frac{v \cdot t}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

voraus mit Rücksicht auf (2)

$$s = \frac{q\, t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

rhalten wird.

Es bietet nun keine Schwierigkeit, aus den abgeleiteten fünf Gleichungen urch Substitution noch sieben weitere abzuleiten, so zwar, daß jede der vier irößen v, t, q, s durch je zwei von den drei übrigen ausgedrückt erscheint. Vir geben dieses System von Beziehungen hier in übersichtlicher Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}
v &= q\, t = \frac{2\, s}{t} = \sqrt{2\, s\, q} \\
t &= \frac{v}{q} = \frac{2\, s}{v} = \sqrt{\frac{2\, s}{q}} \\
q &= \frac{v}{t} = \frac{2\, s}{t^2} = \frac{v^2}{2\, s} \\
s &= \frac{v\, t}{2} = \frac{q\, t^2}{2} = \frac{v^2}{2\, q}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Beispiele zur Anwendung dieser Gleichungen werden sich später bei der 'allbewegung darbieten.

Denkt man sich die ganze Zeitdauer der Bewegung in kleinere Zeit- ntervalle, z. B. Sekunden, geteilt und berechnet die Wegstrecken für die inzelnen Zeiträume, so stellt sich diese Rechnung in übersichtlicher Weise vie folgt dar:

[1] Dieser Sachverhalt ist für jeden klar Denkenden so unmittelbar einleuchtend, laß es uns nicht nötig scheint, denselben durch die sonst übliche „Staffelmethode" noch näher zu erläutern. Man kann auch so überlegen: Zur Berechnung einer Vegstrecke darf offenbar weder die größte Geschwindigkeit am Ende v, noch die leinste Geschwindigkeit am Anfang v_0, sondern nur die mittlere Geschwindigkeit rerwendet werden. Diese ist aber bei gleichförmiger Zunahme gleich dem arith- netischen Mittel $\frac{v_0 + v}{2}$. Diese, mit der Zeit t multipliziert, gibt den Weg $\frac{v_0 + v}{2}\, t$ oder, wenn $v_0 = o$, den Weg $\frac{v\, t}{2}$.

Zeitdauer der Bewegung von Anfang an:	Weglängen von Anfang an gerechnet:	Weglängen in den einzelnen au einander folgenden Ze intervallen:
0	0	
1	$\frac{g}{2}$	$\frac{g}{2}$
2	$4\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$
3	$9\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$
4	$16\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$
5	$25\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$
⋮	⋮	⋮
t	$t^2\frac{g}{2}$	$(2t-1)\frac{g}{2}$

Das Resultat dieser Rechnung kann mit Worten in folgender W ausgesprochen werden:

1. Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung verhal sich die von Anfang an zurückgelegten Wege wie die Quadr der Zeiten.

2. Die Wege innerhalb der aufeinander folgenden gleic Zeitintervalle verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

3. Der Weg in der ersten Zeiteinheit ist gleich der hal Beschleunigung.

Dazu kommt noch das früher erwähnte Gesetz von der Geschwindigk

4. Die erlangte Geschwindigkeit wächst proportional der Zeit.

§ 39. Begriff der Kraft, Newtons Bewegungsgesetze. So wir beobachten, daß ein Bewegungszustand sich verändert, vermuten hierfür eine Ursache; diese Ursache nennen wir Kraft.

Die Änderung der Bewegung kann sich entweder auf den zeitlic Verlauf derselben, also auf die Geschwindigkeit, oder auf die Form der B beziehen.

Die Änderung der Geschwindigkeit kann verschiedener Art sein. E weder hatte der Körper vorher die Geschwindigkeit Null und bekommt j eine Geschwindigkeit nach der Richtung der Kraft. Oder die vorher v handene Geschwindigkeit wird durch einen Zuwachs in derselben Richt vermehrt, oder durch den Hinzutritt von entgegengesetzter Geschwindigk vermindert oder ganz aufgehoben, oder in entgegengesetzte Richtung bracht, oder endlich der Geschwindigkeitszuwachs hat eine seitliche Ri tung. Wenn wir den letzteren Fall mit einbeziehen, so haben wir auch Änderung der Bahn bereits berücksichtigt. Wir kommen somit zur Definiti

Kraft ist die Ursache, welche bewirkt, daß eine Masse ihre Geschwindigkeit (nach Größe oder Richtung) ändert[1].

Diese Definition beruht auf den Anschauungen, welche zuerst Galilei 1602 ausgesprochen hat, als er das Gesetz der Trägheit oder des Beharrungsvermögens aufstellte[2]. Dasselbe lautet in der Fassung, die ihm Newton[3] gegeben hat, folgendermaßen:

I. **Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern**[4].

Dieser Satz wird als das erste Bewegungsgesetz Newtons bezeichnet. Das zweite Bewegungsgesetz Newtons lautet:

II. **Die Bewegungsänderung ist proportional der bewegenden Kraft und hat mit ihr gleiche Richtung.**

---

[1]) Im Altertum war das Kausalitätsbedürfnis sicherlich ebenso lebhaft wie jetzt, trotzdem kamen die Alten zu einer anderen Auffassung über den Zusammenhang von Bewegung und Kraft. Der Grund war der, daß sie die Frage: was bestimmt den Zustand eines Körpers und wann ändert sich derselbe? ganz abweichend beantworteten. Sie suchten das Wesentliche des Zustandes des Körpers in seiner Lage. Jede Änderung derselben, also jede Bewegung, auch die gleichförmige, erschien ihnen konsequenterweise als eine fortdauernde Änderung des Zustandes und erforderte daher in ihren Augen zur Erklärung die Annahme einer fortdauernden Ursache. Daher die Vorstellung, daß der geworfene Stein, solange er fliegt, Kraft brauche und, da er solche von außen nicht mehr erhält, aus sich heraus entwickele. Daß der geworfene Stein weiterfliegt, wurde demnach nicht als die Folge eines durch die Kraft des Armes hervorgebrachten Bewegungszustandes angesehen, sondern als die fortdauernde Wirkung einer während des Fluges fortdauernden Kraft. Man kann diese Ansicht der Alten nicht als unrichtig bezeichnen. E. Mach („Die Mechanik in ihrer Entwickelung") hat gezeigt, daß von vornherein nicht herausphilosophiert werden kann, ob durch eine Kraft eine Lage oder eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung verändert wird. Nur kommt man auf diese Weise dazu, einen anderen Begriff als Kraft zu definieren, welcher von Leibniz 1686 als „lebendige Kraft" bezeichnet wurde. Wir kommen hierauf später zurück. Es handelt sich darum, welcher Begriff sich zur Darstellung der Erscheinungen besser eignet.

[2]) Durch Druck veröffentlicht wurde dieselbe in Galileis Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed ai movimenti locali. Leiden 1638. Die wichtigste Stelle findet sich Bd. II der Ausgabe Florenz 1718, im Dialogo quarto, Giornata quarta. De motu projectorum, p. 631.

[3]) Newton: Philosophiae naturalis principia mathematica. III. Auflage übersetzt von J. Wolfers, Berlin 1872.

[4]) C. Neumann hat in einer Antrittsvorlesung „Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie" darauf aufmerksam gemacht, daß das so ausgesprochene Gesetz an einer Unbestimmtheit leide. Da nämlich jede fortschreitende Bewegung nur eine relative ist in bezug auf einen anderen Körper, auf den die Bewegung bezogen wird, so entsteht die Frage, welcher Körper als solcher Bezugskörper zu gelten hat. Es kann ja eine Bewegung, welche, von der Erde aus betrachtet, geradlinig ist, von der Sonne aus als krummlinig erscheinen. H. Streintz schlug daher nach einer kritischen Untersuchung anderer Versuche folgende erweiterte Formulierung des Trägheitsgesetzes vor: „Ein materieller Punkt, der keiner fremden Einwirkung unterworfen ist, bewegt sich hinsichtlich eines Körpers, der gleichfalls keiner fremden Einwirkung unterworfen ist und keine Drehbewegung vollführt, in gerader Linie und mit konstanter Geschwindigkeit." Näheres in seiner Schrift „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik", S. 3 bis 24.

Dieses Gesetz wird uns dazu dienen, ein Maß der Kraft zu gewinnen. W wollen gleich das dritte Bewegungsgesetz Newtons hier anführen, obw wir erst später dessen Bedeutung auseinandersetzen können.

III. **Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander Größe gleich und der Richtung nach entgegengesetzt.**

Unsere nächste Aufgabe ist, die Arten der Kräfte und ihre Einteilu kennen zu lernen.

§ 40. Einteilung der Kräfte, Maß und Wirkung derselben. F die Einteilung der Kräfte nach ihrem zeitlichen Verlaufe können wir analoges Schema aufstellen wie jenes in § 37 für die Einteilung der B wegungen. Auch wollen wir gleich mitteilen, daß die gleich numeriert Kräfte und Bewegungen als Ursache und Wirkung zusammengehören.

Kraft
- 1. momentane
- kontinuierliche
  - 2. konstante
  - 3. veränderliche

Eine **konstante Kraft** ist eine solche, welche fortwährend die gleic Stärke beibehält, d. h. eine solche, welche fortwährend in gleichen Zeiträume gleich große Änderungen der Geschwindigkeit bewirkt. Die Größe der Kra ist also proportional der Größe der Beschleunigung. Nun lehrt aber, w wir sehen werden, die Erfahrung außerdem, daß die Größe dieser Beschleun gung bei gleichen Kräften verkehrt proportional ist der Masse, deren B wegung beschleunigt werden soll. Bezeichnen wir die Größe der Kraft m P, die Größe der Masse mit M, die Größe der Beschleunigung mit q, u ist C eine Konstante, so gilt demnach

$$q = C\frac{P}{M}$$

Setzen wir überdies jene Kraft $P = 1$, welche der Masse $M = 1$ d Beschleunigung $q = 1$ erteilt, so entfällt die Konstante C, da sie $= 1$ wi und es gilt

$$q = \frac{P}{M}$$

woraus

$$P = q\,M$$

und

$$M = \frac{P}{q}$$

folgt.

Im (C.G.S.)-**Maßsystem** ist die Einheit der Masse das **Gramm**, d Einheit des Weges das **Centimeter**, die Einheit der Zeit die **Sekund** die Einheit der Geschwindigkeit demnach gegeben durch 1 Centimeter p Sekunde, die Einheit der Beschleunigung durch den Zuwachs der Geschwi digkeit um diese Einheit pro Sekunde. Folglich ist die **Einheit der kor stanten Kraft nach diesem Maßsystem diejenige, welche der Mas 1 Gramm während einer Sekunde die Beschleunigung 1 Centimet pro Sekunde erteilt.** Diese Einheit wird **Dyne** genannt.

Unter einer „momentanen Kraft" verstehen wir eine solche, welche e eine verschwindend kurze Zeit dauert und dann aufhört. Eine solche t es, streng genommen, gar nicht, denn es ist nicht möglich, daß einer sse Geschwindigkeit erteilt wird, ohne daß die wirkende Ursache eine gesse Zeit hindurch dauert.

Als Beispiel einer solchen momentanen Kraft können wir einen plötzlen Stoß (Impuls) ansehen. Wenn z. B. ein Billardspieler mit dem Queu Kugel stößt, so bleibt auch bei kürzester Stoßdauer doch die Spitze des eus auf eine gewisse kurze Strecke und durch eine gewisse kurze Zeit in rührung mit der Kugel. Während dieser kurzen Zeit wird auf die Masse Kugel eine gewisse Geschwindigkeit übertragen. Vermöge des Gesetzes Trägheit bewegt sich dann die Kugel mit dieser Geschwindigkeit fort l würde sie, wenn ihr dieselbe nicht durch Reibung oder andere Kräfte der entzogen würde, immerfort beibehalten.

Die Wirkung des Stoßes, nämlich die erlangte Geschwindigkeit, wird sto größer sein, je stärker der Stoß, d. h. je stärker die sogenannte momene Kraft ist, andererseits ist auch diesmal der Geschwindigkeitszuwachs kehrt proportional der gestoßenen Masse. Setzen wir wiederum jene mentane Kraft $F = 1$, welche der Masse 1 die Geschwindigkeit $v = 1$ eilt, so gilt

$$F = Mv.$$

Man nennt das Produkt Mv die **Bewegungsgröße** (auch Bewegungsge oder Bewegungsmoment).

Fassen wir das Gesagte zusammen, so erhalten wir die Sätze:

Die momentane Kraft oder der Impuls wird gemessen durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.

Die konstante Kraft wird gemessen durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung.

Die **momentane** Kraft bringt eine **gleichförmige**, die **konstante** ft eine **gleichmäßig beschleunigte** Bewegung hervor[1]).

Daraus folgt dann von selbst der Schluß, daß eine **veränderliche** Kraft e Bewegung mit **veränderlicher Beschleunigung** hervorbringt.

§ 41. Dynamisches Maß der Masse. Im § 33 haben wir als vorfiges Mittel zur Vergleichung zweier Massen die Vergleichung ihrer Ge-

[1]) Wir haben schon oben bemerkt, daß es eine „momentane" Kraft streng ommen nicht gibt. Was wir so nennen, ist eine Kraft, die innerhalb einer vissen Zeit fortdauert, also auch kontinuierlich ist. Innerhalb dieser Zeit bringt nach auch diese Kraft nicht eine gleichförmige, sondern eine beschleunigte vegung hervor. Andererseits wird auch die von einer konstanten Kraft hervorufene beschleunigte Bewegung zu einer gleichförmigen in dem Moment, wo die ft aufhört. Somit haben wir es eigentlich immer nur mit kontinuierlichen äften zu tun. Die Art der durch dieselben schließlich entstehenden Bewegung gt also auch nicht von deren kürzerer oder längeren Dauer, sondern von dem stande ab, ob die Kraft noch fortdauert oder bereits aufgehört hat, auf die sse einzuwirken. Wenn wir trotzdem die mathematische Fiktion einer momenen Kraft festhalten, so geschieht es nur, weil diese Vorstellung unter Umständen ktische Vorteile gewährt.

wichte mittels der Wage angegeben, aber hinzugefügt, daß dieses Maß, welches wir das **statische** Maß nennen können, nicht von vornherein als sicher zu betrachten ist, denn, falls etwa die Erde bei ihrer Anziehung das Platiniridium bevorzugen würde, so wie der Magnet das Eisen mehr anzieht als gleiche Massen anderer Stoffe, so könnten das Platiniridiumkilogramm und ein Liter Wasser sich auf der Wage das Gleichgewicht halten und trotzdem das erstere weniger Masse enthalten als das letztere. Nun haben wir im vorangegangenen Paragraphen als gleiche Kräfte solche angenommen, welche gleichen Massen gleiche Beschleunigung erteilen. Daraus folgt umgekehrt, daß Massen, welche durch gleiche Kräfte gleiche Beschleunigung erfahren, unter sich gleich sein müssen. Um also beispielsweise zu prüfen, ob auch nach diesem **dynamischen** Maße gemessen das Platiniridiumkilogramm und ein Liter Wasser gleiche Massen enthalten, müssen wir auf beide eine gleiche Kraft wirken lassen, von der wir überzeugt sein können, daß sie unabhängig von der Art der Materie ist, auf welche sie wirkt. Eine solche Kraft ist die Federkraft. Wir denken uns also folgenden Versuch ausgeführt [1].

Auf einer glatten Bahn (Fig. 80) sind zwei leicht gebaute Wägelchen von gleicher Masse ohne merkliche Reibung über geteilten Maßstäbchen verschiebbar. Sie sind durch Schnüre mit den Enden einer elastischen Drahtspirale oder eines Kautschukfadens FF' verbunden. Wir belasten den einen Wagen mit einem Normalkilogramm, den anderen mit einem Liter Wasser (bei 4° gemessen). Das Gefäß denken wir uns entweder so leicht, daß seine Masse vernachlässigt werden kann, oder dasselbe durch eine Tara aus gleichem Material und gleichem Gewicht auf dem anderen Wagen ausgeglichen. Ziehen wir nun die Wagen auseinander, bis die Zeiger z und z' auf die Anfangspunkte der Maßstäbe zeigen, so wirkt die elastische Kraft der Spiralfeder auf beiden Seiten gleich stark, denn da diese elastische Kraft zu den Materialien auf den Wagen in keiner Beziehung steht und nur von den Vorgängen in der Feder selbst abhängt, die nach beiden Seiten vollständig symmetrisch sind, so ist kein Zweifel, daß beide Wagen mit ihren Lasten mit gleicher Kraft angezogen werden, welche Kraft auch während der Kontraktion der Feder beiderseits gleich bleiben muß. Lassen wir dann die beiden Wagen zu gleicher Zeit frei, so werden sie **erfahrungsgemäß** gleichzeitig an den Hemmstiften h und h' ankommen, welche um gleiche Wegstrecken von den Ausgangspunkten entfernt sind. Die beiden Massen haben also in jedem Zeitpunkte unter sich gleiche Beschleunigungen erhalten, denn die Wege gleicher Zeiten verhalten sich wie die Beschleunigungen.

---

[1] Die **Präzisionsversuche**, welche zum wissenschaftlich strengen Beweise der Gültigkeit von Gesetzen dienen, sind wegen der vielen zu berücksichtigenden Nebenumstände selten einfach und übersichtlich; auch erfordert meistens ihr Verständnis die Bekanntschaft mit Lehrsätzen und Apparaten, die erst später besprochen werden können; sie eignen sich daher selten zu **Demonstrationsversuchen**, bei denen es nicht auf Genauigkeit, wohl aber auf Übersichtlichkeit und Einfachheit ankommt. Häufig ist man sogar genötigt, rein ideelle Versuche zu beschreiben, bei welchen Annahmen gemacht werden, die sich nie ganz verwirklichen lassen, wie z. B. die Annahme von Kolben ohne Reibung, Gefäßwänden ohne Wärmeleitung usw. Auch der hier beschriebene Versuch ist solcher Art. Der präzise Nachweis, daß gleiche Massen verschiedener Stoffe von der Erde gleich stark angezogen werden, wird durch Pendelversuche geführt, von denen erst später die Rede sein kann.

Wir könnten die beschriebene Vorrichtung eine dynamische Wage nennen. Die Versuche mit ihr sind zwar sicher viel weniger genau als die mit der statischen Wage, aber sie haben eben den prinzipiellen Vorzug, daß sie einen etwaigen Einfluß der Verschiedenheit des Materials ganz ausschalten, während bei dem Abwägen auf der statischen Wage, wo die Schwerkraft unmittelbar auf die Materialien wirkt, deren Einfluß nicht von vorn herein ausgeschlossen ist.

Haben die Vergleichungen mit unserer dynamischen Wage aber einmal ergeben, daß sie mit denen der statischen Wage übereinstimmen, dann können wir von da an die Massen durch ihre Gewichte vergleichen.

Würden wir die Feder $F'F''$ aus einem so leichten Material (Kautschukfaden) wählen, daß wir ihre eigene Masse gegenüber denen der belasteten Wagen vernachlässigen dürfen, so könnten wir unseren Apparat auch zur Bestimmung des Verhältnisses zweier ungleichen Massen verwenden. Angenommen die Masse links (samt der des Wagens) sei M, die rechts M', die Beschleunigungen seien links q, rechts q', so müssen, da die Wege s und s' sich in gleichen Zeiten wie die Beschleunigungen verhalten, die Produkte Ms und $M's'$ gleich groß sein, also die Proportion gelten:

$$M : M' = s' : s.$$

Wählen wir also die Massen links 1 kg, rechts $^1/_2$ kg, und stellen den Hemmstift rechts doppelt so weit vom Anfangspunkte als links, so müssen wieder beide Wagen zugleich an ihr Ziel gelangen.

Die wirksamen Kräfte bei diesem Experimente sind keine konstanten, sondern, wie jede Federkraft, veränderliche. Das hat zwar keinen Einfluß auf die Stichhaltigkeit der Schlüsse, da es hier nur darauf ankommt, daß in jedem Moment die Kräfte auf beiden Seiten gleich sind. Wollte man aber mit einer konstanten Federkraft, die überdies in bekanntem Verhältnis vergrößert werden kann, derlei Versuche anstellen, so könnte man sich der folgenden Modifikation bedienen (Fig. 81).

Der elastische Faden ist an der Handhabe bei a befestigt und reicht mit dem anderen Ende je nach der Spannung bis b oder b'. Der Wagen wird mit dem Schlage eines Sekundenpendels losgelassen und während seiner Bewegung durch Anziehen mit der Hand die Spannung der Feder möglichst konstant erhalten, was einige Übung erfordert. Man belastet den Wagen nacheinander mit verschiedenen Massen, variiert auch die Spannung der Feder oder nimmt den elastischen Faden doppelt und mißt die Wege, die bis zum nächsten Sekundenschlage zurückgelegt

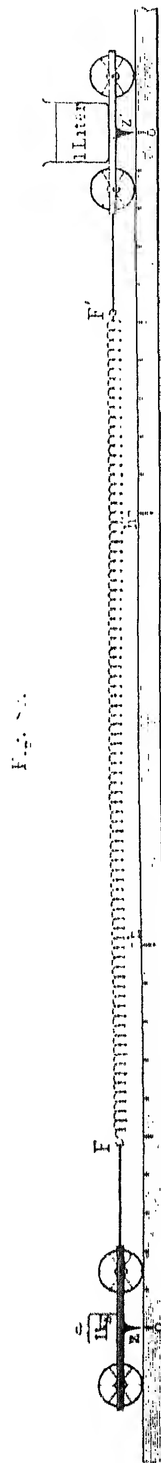
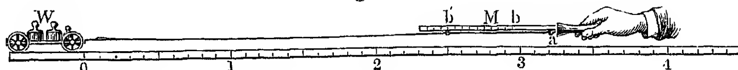


Fig. [illegible]

werden. Die Beschleunigungen sind doppelt so groß wie diese Wege. Auf diese Weise läßt sich das Gesetz $p = \varphi m$ bestätigen [1]).

Fig. 81.



§ **42. Dimensionen der verschiedenen Größenarten.** Da, wie wir hier gesehen haben und in der Folge noch weiter erfahren werden, alle Größenarten sich als Funktionen der Zeit T, Länge L und Masse M darstellen lassen, so ist man nach dem Vorschlage von Maxwell übereingekommen, dieselben im absoluten Maßsystem nach den Dimensionen zu bezeichnen, in welchen obige drei Fundamentalgrößen in ihnen auftreten. Diese Dimensionsausdrücke gestatten, in einfachster Weise von einer Gruppe von Grundeinheiten zu einer solchen von anderen Einheiten überzugehen und ebenso auch die Richtigkeit physikalischer Gleichungen zu prüfen, da bei Einsetzung der Dimensionen für die darin vorkommenden Größenarten beiderseits vom Gleichheitszeichen schließlich derselbe Dimensionsausdruck entstehen muß. Um Verwechselungen zu verhüten, pflegt man die Dimensionsausdrücke in steile Klammern einzuschließen.

Es sind demnach die Dimensionsausdrücke oder kurzweg Dimensionen, wenn wir die obigen Abkürzungen

Zeit: T, Länge: L, Masse: M

beibehalten:

Fläche F	$= [L^2]$
Volumen V	$= [L^3]$
Geschwindigkeit v	$= [L \,.\, T^{-1}]$
Beschleunigung φ	$= [L \,.\, T^{-2}]$
Bewegungsgröße $M \,.\, v$	$= [ML \,.\, T^{-1}]$
Konstante Kraft P	$= [ML\,T^{-2}]$
Arbeit, Energie [2]) A	$= [ML^2\,T^{-2}]$
Effekt [2]) E	$= [ML^2\,T^{-3}]$

und die obigen Einheiten im (C. G. S.)-System wären also durch folgende Dimensionensymbole darzustellen:

Geschwindigkeitseinheit	$1\,[C\,S^{-1}]$
Beschleunigungseinheit.	$1\,[C\,S^{-2}]$
Einheit der Bewegungsgröße	$1\,[C\,G\,S^{-1}]$
Eine Dyne	$1\,[C\,G\,S^{-2}]$
Ein Erg [2])	$1\,[C^2\,G\,S^{-2}]$
Einheit des Effekts [2])	$1\,[C^2\,G\,S^{-3}]$

Um die Anwendung der obigen Dimensionen zu veranschaulichen, sei z. B. eine Kraft P, die im (C. G. S.)-System ausgedrückt ist, in dem von

---

[1]) Leichter und genauer geschieht dies mit der Fallmaschine von Atwood; doch hat die beschriebene Ausführung den didaktischen Vorzug der größeren Einfachheit und Anschaulichkeit.

[2]) Wird später erklärt werden.

Gauss und Weber seinerzeit begründeten Millimeter-Milligramm-Sekunden-System (mm . mg . s) anzugeben. Dann ist, wenn B eine gewisse Zahl darstellt

$$P = B[C, G, S^{-2}] = B[\text{mm} . 10 . \text{mg} . 10^3 . \text{s}^{-2}] = 10000 B[\text{mm} . \text{mg} . \text{s}^{-2}].$$

Im (mm.mg.s)-System würde also der Zahlenwert von P, wie wir sehen, 10000 mal größer sein.

§ 43. Die Schwere oder Gravitation. Die für uns wichtigste Kraft ist die Schwerkraft. J. Newton hat sich unsterblichen Ruhm erworben, indem er 1687 zuerst die Aufstellung gemacht hat, daß die Schwere auf der Erde nur eine spezielle Äußerung einer ganz allgemeinen Kraft im Weltall sei, die er die allgemeine Schwere oder Gravitation nannte. Daß eine solche Kraft bestehe, und nach welchem Gesetze sie wirke, leitete Newton aus den Kepplerschen Gesetzen über die Bewegung der Planeten um die Sonne ab. Es hatte nämlich schon im Jahre 1609 und vollständiger 1619 der Mathematiker und Astronom Keppler, von der Kopernikanischen Weltanschauung ausgehend, aus den astronomischen Beobachtungen seiner Zeit, namentlich denen von Tycho Brahe in Prag, seine Gesetze über die Bewegung der Planeten um die Sonne abgeleitet. Sie lauten:

1. Jeder Planet bewegt sich in einer durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene.
2. Die Bahnkurven der Planeten in diesen Ebenen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet.
3. Die Planeten bewegen sich in diesen Bahnen derart, daß der Radius vector (die Verbindungslinie von der Sonne zum Planeten) in gleichen Zeiten gleiche Wege beschreibt.
4. Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten um die Sonne verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Aus diesen Gesetzen folgerte Newton auf mathematischem Wege, daß sich die Planeten so bewegen, als ob sie von der Sonne mit einer Kraft angezogen würden, welche ihrer Größe nach dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional und dem Produkte der Massen direkt proportional wirke, welche Kraft aber unabhängig sei von der qualitativen Natur dieser Massen. Newton zeigte dann ferner, daß auch die Bewegung der Satelliten (Monde) um die Planeten und ebenso diejenige eines fallenden Steines auf der Erde durch die Annahme derselben Kraft erklärt werden könne, welche dabei nach demselben Gesetze wirke. Woher diese Kraft stammt und ob sie wirklich von einer Masse zur anderen durch den absolut leeren Raum hindurch ohne vermittelndes Medium wirkt, diese Fragen hat Newton selbst offen gelassen, und sie haben bis heute noch keine abschließende Beantwortung gefunden [1]).

Nur so viel scheint festzustehen, daß die Vorstellung einer wirklichen actio in distans, einer unvermittelten Fernwirkung der Körper durch den leeren Raum hindurch immer weniger Anhänger findet und das Bedürfnis einer anderen Erklärung immer allgemeiner empfunden wird.

---

[1]) Hierüber sowie über die Versuche älterer und jüngerer Physiker zur Beantwortung dieser Frage sehe man das interessante Buch von C. Isenkrahe: „Das Rätsel der Schwerkraft“, Braunschweig 1879.

Der experimentelle Nachweis der Gravitation, die genaue Bestimm ihrer Größe und alle einschlägigen Folgerungen können wir erst weiter u nach Erklärung des physischen Pendels behandeln.

§ 44. Prinzip der Wechselwirkung; der freie Fall; Fallmaschi

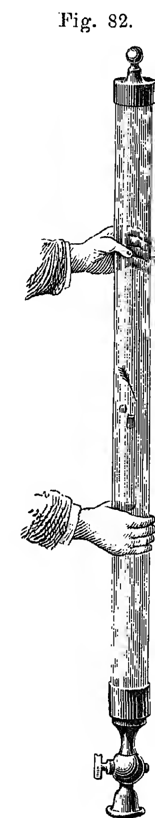
Im § 39 wurde als das dritte Bewegungsgesetz von Newton der Satz gesprochen:

„Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander an Größe gleich der Richtung nach entgegengesetzt."

So oft also ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, erfähr stets von dem letzteren eine rückwirkende Kraft gleicher Größe. Man h diesen Satz kürzer das Prinzip der Wechselwirkung.

Dies gilt daher auch von der Anziehung zwischen der Erde und auf ihr befindlichen Körpern. Der Körper drückt auf die Unterlage und gleich stark von ihr gedrückt. Entzieht man ihm Unterlage, so setzt die gegenseitige Anziehungskraft sow den Körper als auch die Erde in Bewegung, beide fa gegeneinander. Da aber die gegenseitig durch die gle Kraft erteilten Beschleunigungen den Massen verk proportional sind, so ist bei der unverhältnismäßig größe Masse der Erde ihre Beschleunigung verschwindend k gegenüber der Beschleunigung, die der Körper enthält.

Fig. 82.



Man kann daher in der Regel die Erde als ruhig steh und den Körper allein als fallend ansehen. Findet Fallbewegung ohne jede Hemmung statt, so nennt man den freien Fall.

Über den freien Fall der Körper hatte man vor Gal ganz unrichtige Vorstellungen. Man behauptete, daß Körper desto schneller fallen, je größer ihre Masse Gewicht) sei. Der einfachste Versuch reicht hin, sich der Unrichtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. L man mehrere Kugeln aus Blei, Stein, Holz, Kork gle zeitig aus Zimmerhöhe auf den Boden fallen, so beme man kaum einen Unterschied in den Fallzeiten. Bei K pern von sehr geringem spezifischen Gewichte, sowie relativ großem Querschnitte beobachtet man allerdings Zurückbleiben, welches aber offenbar nur von dem stö den Widerstande der Luft herrührt. Daß dem so sei, z ein Versuch im luftleeren Raume. Dieser Versuch ist bequemsten mit dem in Fig. 82 abgebildeten Appa anzustellen. Eine etwa $1^1/_2$ m lange, ungefähr 7 cm w Glasröhre ist an beiden Enden verschlossen und an ein derselben mit einem Hahn und einem Ansatzstücke v sehen, welches auf die Luftpumpe aufgeschraubt werden kann. Die Rö enthält eine kleine Bleikugel, ein Stück Kork und ein Vogelfederchen o dergleichen.

Hat man in später zu erklärender Weise die Luft aus der Röhre entfe und richtet die letztere rasch in die senkrechte Lage auf, so beobachtet m leicht, daß alle jene Körperchen gleich schnell fallen. Läßt man dann wie

Sechstes Kapitel.

Mechanik gasförmiger Körper.

Luft einströmen, so zeigt sich wieder der Einfluß des Widerstandes, den diese der Bewegung entgegenstellt.

Noch einfacher, wenn auch weniger sicher und instruktiv ist folgender Versuch. Man bedeckt eine Münze mit einem kreisförmig geschnittenen Papierblättchen von etwas kleinerem Durchmesser und läßt dann die Münze in horizontaler Lage fallen. Das darauf liegende Papierblättchen fällt dann gleich schnell, da der Widerstand der Luft durch das vorausgehende Metallstück bereits beseitigt wird.

Die unrichtige Behauptung, daß Körper desto schneller fallen, je größer ihr Gewicht, je größer also die Kraft ist, mit der sie von der Erde angezogen werden, beruht auf dem Übersehen des Umstandes, daß in demselben Verhältnisse auch die Masse größer ist, die in Bewegung gesetzt werden muß. Das Irrtümliche jener Behauptung dürfte ganz treffend dargetan werden, wenn man analog behaupten würde, daß zwei Schnelläufer zusammen doppelt so schnell laufen können als ein Schnelläufer allein, weil sie zusammengenommen doppelt so stark sind als einer. Gerade so, wie in diesem Falle die doppelte Kraft sich auf die doppelte Körpermasse verteilt, so daß auf einen Körper immer nur die einfache Kraft trifft, so ist es auch bei der Anziehung der Körper durch die Erde. Ein Körper von doppelter Masse wird allerdings doppelt so stark angezogen, aber von dieser Anziehungskraft entfällt auf die einfache Masse nur die Hälfte.

Alle Körper fallen daher (im luftleeren Raume) gleich schnell, oder mit anderen Worten ausgedrückt: alle Körper erhalten durch die Schwerkraft die gleiche Beschleunigung. Dies ist das erste Gesetz des freien Falles.

Die Tatsache der gleich großen Beschleunigung aller Körper durch die Schwere wird auch wohl ausgedrückt durch die Redensart: alle Körper sind gleich schwer, was aber nicht sagen will, sie hätten gleiches Gewicht oder sie würden mit gleich großer Kraft zur Erde gezogen.

Das zweite Gesetz des freien Falles bezieht sich auf die Art der Bewegung, d. h. auf den zeitlichen Verlauf derselben, also auf die Geschwindigkeit und die Fallräume.

Da wir die Schwerkraft für geringe Fallhöhen als eine konstante Kraft ansehen dürfen und in § 40 erörtert haben, daß eine solche Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erzeuge, so folgt daraus, daß die Fallbewegung durch dieselben Gleichungen und Regeln dargestellt werde, welche wir im § 38 unter (6), sowie am Schlusse desselben mitgeteilt haben.

Ist also g die Beschleunigung der Schwere, t die Fallzeit, s der Fallraum, v die momentane Geschwindigkeit, so gelten die Beziehungen

$$v = gt,\ s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

sowie die Regeln:

Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten die Fallräume der einzelnen aufeinander folgenden Zeitintervalle verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Zahlenbeispiel: Ein Mensch fällt aus einem Luftballon von 4410 m Höhe zur Erde, wieviel Zeit bleibt ihm, um sich zum Tode zu bereiten?

Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

$$\text{Antwort: } t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{8820}{9,8}} = \sqrt{900} = 30 \text{ Sekunden}$$

$$v = gt = 9,8 \,.\, 30 = 294 \text{ m pro Sekunde.}$$

Um die Fallgesetze durch das Experiment zu bestätigen und damit auch den Beweis zu erbringen, daß konstante Kräfte gleichmäßig beschleunigte Bewegungen bewirken, kann man sich verschiedener Methoden bedienen.

Entweder man behält den freien Fall bei, verfeinert aber die Beobachtungsmethoden für die verhältnismäßig kurzen Zeiträume, in denen die Fallbewegung vor sich geht, oder man ersetzt die Bewegung des freien Falles durch eine künstlich verlangsamte gleicher Art, indem man das Verhältnis zwischen der wirksamen Kraft und der zu bewegenden Masse verringert, so daß der Quotient $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ = Beschleunigung kleiner wird. Die so verringerte Beschleunigung gestattet eine leichtere Beobachtung der verlangsamten Bewegung, aus deren Ergebnis dann auf die Bewegung des freien Falles zurückgeschlossen werden kann.

Zu den Apparaten, bei welchen direkt der freie Fall beobachtet und die dabei zurückgelegten Wege gemessen werden, gehören die Fallmaschinen von Morin[1]), Laborde[2]), F. Lippich[3]), J. Müller[4]), Rabs, dann der Fallapparat von Edelmann in Verbindung mit dem Vibrationschronoskop von v. Beetz[5]).

Zu der zweiten Klasse von Apparaten, an denen die künstlich verlangsamte Fallbewegung beobachtet und gemessen wird, gehören die Fallrinne von Galilei und die Fallmaschine von Atwood.

Bei der Fallmaschine von Morin zeichnet ein zwischen Führungsleisten fallender schwerer Körper mittels eines Schreibstiftes eine Linie auf eine senkrecht stehende Schreibfläche, welche während des Falles in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorbei bewegt wird. Die so gezeichnete Linie stellt hiermit eine Kurve dar, deren Abszissen den Fallzeiten, deren Ordinaten den Fallräumen entsprechen.

Da die Versuche als Kurve die Hälfte einer Parabel mit senkrecht stehender Achse ergeben, bei welcher, wie bekannt, die Ordinaten sich verhalten wie die Quadrate der Abszissen, so folgt daraus die Richtigkeit des Fallgesetzes, daß die Fallräume proportional den Quadraten der Fallzeiten sind.

Bei den Apparaten von Laborde, Lippich, Müller und Rabs ist der fallende Körper eine Platte, welche zugleich als Schreibfläche für einen Stift dient. Dieser Stift wird durch einen elastischen Körper zu Schwingungen in horizontaler Richtung veranlaßt, wodurch auf der Platte während ihres Falles eine sogenannte Schwingungskurve aufgezeichnet wird, aus welcher in unten beschriebener Weise das Fallgesetz abgeleitet werden kann. Von den eben zitierten Apparaten dürfte jener von Lippich die genauesten Messungen gestatten. Da es aber bei Vorlesungsversuchen mehr auf Ein-

---

1) Beschrieben und abgebildet in Jamin, Cours de Physique.

2) Cosmos 1860, XVII.

3) Wien. Akad. Ber. 52 [2], 549.

4) Dieses Buches X. Auflage 1, 277.

5) M. Th. Edelmann, Neuere Apparate usw. 1, 37.

fachheit als Genauigkeit ankommt, so wollen wir hier den Apparat von Rabs in München beschreiben. Derselbe ist in Fig. 83 abgebildet.

Ein schwerer Dreifuß aus Eisen trägt eine eiserne Schiene *rr*, welche durch die Seitenstücke *ss* festgehalten wird.

Die Schiene *r* ist auf jeder Seite mit zwei Zuschärfungsflächen versehen, wie man aus Fig. 84 deutlicher sieht, welche die Schiene *r* samt dem Fallschlitten in ein Drittel der natürlichen Größe im Auf- und Grundriß darstellen. Diese genau abgehobelten und geglätteten Zuschärfungsflächen sind es, welche zur Leitung des Fallschlittens dienen, dessen Einrichtung gleichfalls aus Fig. 84 ersichtlich ist. Die beiden Stücke *A* und *B* des Fallschlittens sind durch zwei eiserne Stangen *z* verbunden, welche 50 bis 60 cm lang und in Fig. 84 nur der Raumersparnis wegen viel zu kurz gezeichnet sind. Das Brett *b* ist im Aufriß der Fig. 84 ganz weggelassen. Um gute Resultate zu erzielen, muß der ganze Apparat sorgfältig gearbeitet und die einzelnen Teile der Fallschiene so disponiert sein, daß der Schwerpunkt des ganzen fallenden Systems in die vertikale Mittellinie der Schiene *r* fällt.

Fig. 83.

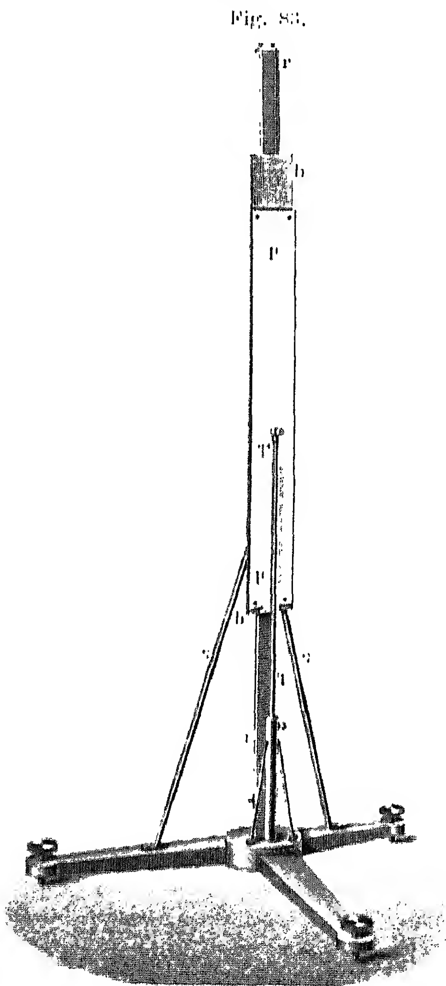


Fig. 85 stellt das am unteren Ende des Fallbrettes *b* angebrachte Häkchen dar, welches dazu dient, das obere Ende der Feder *T* seitlich festzustellen; Fig. 86 endlich stellt das obere Ende der Feder mit dem Schreibstifte von hinten und von der Seite gesehen dar.

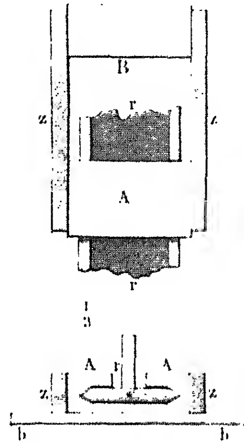
Bei Ausführung des Versuches wird der Fallschlitten mit einem Streifen glatten Papiers überspannt, dann so weit gehoben, daß der Vorsprung der seitwärts gebogenen Feder in das erwähnte Häkchen eingelegt werden kann. Läßt man nun den Schlitten fallen, so wird gleichzeitig die Feder losgelassen, und ihr Stift schreibt auf der Papierfläche eine Kurve, welche in Fig. 87 abgebildet ist.

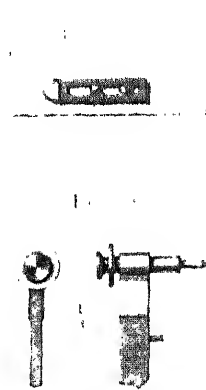
Durch diese Schwingungskurve, Fig. 87, wird nun das Fallgesetz sehr anschaulich dargestellt. Während der ersten, zweiten, dritten Oszillation des Stabes *T* werden die Räume *ab*, *bc*, *cd* durchfallen, und die Messung dieser

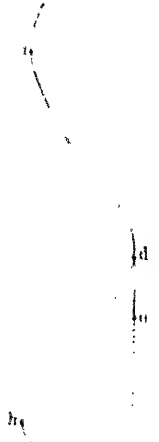
Fallraume zeigt, daß $ac = 4ab$, $ad = 9ab$, daß sich also die Fallra[illegible] wirklich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Zieht man von bc und cd die Längen [illegible] ab, also Längen [illegible] welche dem Fallraume während der ersten Vibration gleich sind, so blei[illegible] die Längen bn und cn, welche die Wege darstellen, welche während [illegible]

Fig. 84.







zweiten und dritten Vibration vermöge der Endgeschwindigkeiten durchlaufen werden, mit welchen der [illegible] Körper in b und c ankommt.

In gleichen Zeiten nehmen die Fallräume um gleich viel zu, und zwar während jeder Vibration um die Länge $bn = bc - ab$. Es ist also auch [illegible] cb [illegible] ab. Ferner ist ih [illegible] hg [illegible] ha [illegible] usw.

Um den absoluten Wert der Accelration zu finden, hat man die Oszillationsdauer der Feder [illegible] zu kennen. Wir können aber die hierzu taugliche Methode hier nicht auseinandersetzen. Überdies eignet sich der [illegible] schriebene Apparat hierzu nicht gut, weil die Reibung des Schlittens an der eisernen Schiene und der [illegible] immer eine geringe Verzögerung der Bewegung veranlaßt. Bei dem Apparate von La[illegible] pich ist diese Fehlerquelle vermieden, da der die [illegible] tragende Korper vollständig frei fällt.

Bei dem Apparate von Edelmann geschieht die Zeit[illegible] durch ei[illegible] schwingende Stimmgabel, welche jedoch nicht auf dem fallenden Korper [illegible] schreibt. Die Zeitmarken für den Abgang und die Ankunft eines fallend[illegible] Körpers werden dabei auf elektrischem Wege vermittelt. Wir werden die[illegible] Methode erst später beschreiben.

Von der zweiten Klasse von Apparaten zur [illegible] einer kan[illegible] verlangsamten Fallbewegung wollen wir die Fallmaschine von Atwood [illegible] schreiben. Die Fallrinne von Galilei kann erst nach der Erklärung d[illegible] Zerlegung der Kräfte in Verhandlung kommen.

Fallmaschine von Atwood. Die Bewegung beim freien Falle erfolg[illegible] wie bereits erwähnt, zu schnell, als daß man ohne feinere Hilfsmittel [illegible]

Wege messen könnte, welche innerhalb der ersten, zweiten, dritten usw. Sekunde zurückgelegt werden. Gäbe es ein Mittel, diese Bewegung etwa auf ein Hundertstel zu verlangsamen, so daß die Wege, welche sonst so und so viele Meter betragen, nur mehr ebensoviele Centimeter umfassen, so wäre die direkte Messung ermöglicht.

Wir gelangen zu dieser Verlangsamung, wenn wir einen Körper von der Masse 100 g durch die Kraft in Bewegung setzen, mit welcher 1 g von der Erde angezogen wird. Wir müssen also eine solche Anordnung treffen, daß die Anziehung der Erde auf 99 von den 100 g aufgehoben wird und nur noch die Anziehung auf 1 g übrig bleibt, welche auf alle 100 g gleich verteilt wirken und sie in Bewegung setzen muß. Es kommt dann auf jedes einzelne Gramm nur $^1/_{100}$ der Schwerkraft zur Wirkung, die Beschleunigung, welche sonst 9,8 m beträgt, wird nur mehr 9,8 cm betragen; die ganze Bewegung spielt sich im 100mal verkleinerten Maßstab ab.

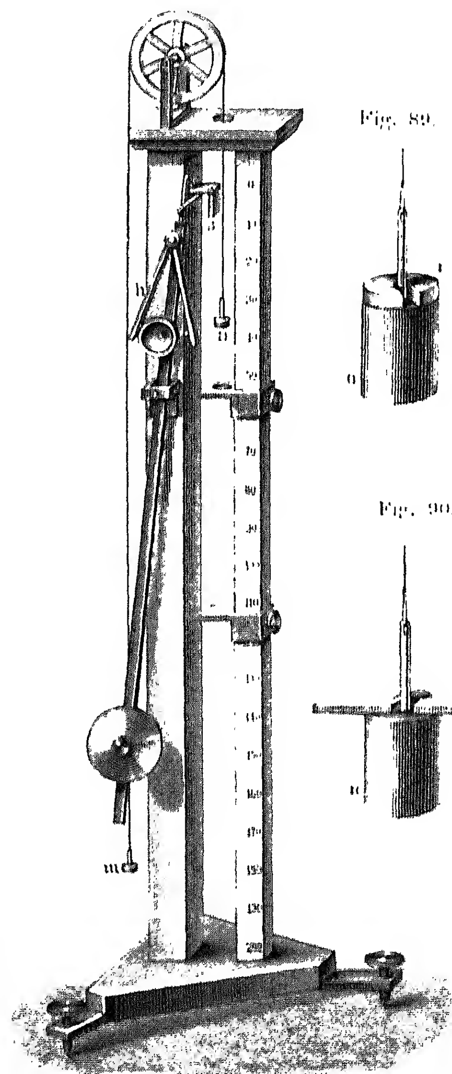


Fig. 88. Fig. 89. Fig. 90.

Hängen wir über eine Rolle Fig. 88, welche ohne merkliche Reibung um eine horizontale Achse drehbar und von verschwindend kleiner Masse ist, einen Faden und an jedes Ende desselben ein Gewicht von 50 g, so halten sich die Zugkräfte das Gleichgewicht und es erfolgt keine Bewegung. Nehmen wir aber jetzt von der einen Seite $^1/_2$ g fort und legen dasselbe zu den 50 g der anderen Seite, so sind die beiderseitigen Kräfte die von $49^1/_2$ und $50^1/_2$ g. Es ist also auf der letzteren Seite ein Überschuß von 1 g, dessen Anziehung durch die Erde nicht aufgehoben ist, während die Anziehung auf die übrigen 99 neutralisiert ist. Damit wäre also unser Zweck erreicht.

Nun ist es aber nicht möglich, eine Rolle zu finden, welche eine verschwindend kleine Masse hat. Gesetzt, wir könnten die Masse ihrer Achse und der Speichen so klein machen, daß wir sie vernachlässigen dürften, so bliebe nur der Umfang der Rolle zu berücksichtigen. Eine einfache Über-

legung lehrt uns, daß die am Umfange der Rolle befindliche Masse bei der durch das Übergewicht eingeleiteten Bewegung dieselbe Geschwindigkeit annehmen muß wie die angehängten Gewichte. Gesetzt, die am Umfange befindliche Masse der Rolle betrage 79 g, so hängen wir an die Fadenenden nur die Massen 10 und 11 g, dann haben wir wiederum im ganzen 79 + 10 + 11 = 100 g in Bewegung gesetzt durch den Zug von 1 g.

Die Atwoodsche Fallmaschine besteht nun aus einer solchen Rolle, welche auf einer Säule von ungefähr 2 m Höhe befestigt ist, Fig. 88, 89 und 90.

Eine in Centimeter geteilte Skala gestattet die Abmessung der Fallräume. Die Fallzeiten werden meistens durch ein Sekundenpendel gemessen, welches bei jeder Schwingung an eine Glocke schlägt. Außerdem ist eine bei verschiedenen Apparaten mannigfach abgeänderte Vorrichtung vorhanden, welche bewirkt, daß das an den Nullpunkt der Skala gestellte Schälchen mit dem Übergewichte zuerst festgehalten und dann im Augenblicke des ersten Sekundenschlages losgelassen wird. An der Skala sind zwei Schieber mit horizontalen Platten verschiebbar, von denen die eine in der Mitte kreisförmig ausgeschnitten ist, so zwar, daß die an den Faden gehängten zylindrischen Gewichtchen, Fig. 89 *r*, nebst gleichgeformter Schale *n* ohne anzustoßen hindurchgehen können. Dem Übergewichtchen, welches die Bewegung hervorbringt, gibt man die Form eines länglichen Plättchens von solcher Größe, daß es beim Durchgange durch die erwähnte kreisförmige Öffnung der einen Platte abgehoben und zurückbehalten wird, Fig. 90 *r*.

In einer ersten Versuchsreihe prüft man die Wegstrecken, welche in 1, 2, 3 usw. Sekunden zurückgelegt werden. Man berechnet zu diesem Zwecke diese Wegstrecken voraus, stellt den nicht durchbrochenen Schieber nacheinander an die berechneten Stellen der Skala und beobachtet dann, ob der Aufschlag der das Übergewicht tragenden Schale genau mit dem betreffenden Sekundenschlage zusammenfällt. Man hat also beispielsweise folgendes Schema:

Masse der Rolle	=	79 g
„ „ gleichen Gewichte	=	20 „
„ des Übergewichtes	=	1 „
Bewegte Gesamtmasse . . .	=	100 g

$$\text{Acceleration} = 9{,}80\ \frac{1}{100}\ \text{m} = 9{,}80\ \text{cm}.$$

Versuch Nr.	Zeitdauer der Bewegung in Sekunden	Fallraum berechnet
1	1	4,9
2	2	19,6
3	3	44,1
4	4	78,4
5	5	122,5

Die Beobachtung ergibt gewöhnlich ein geringes Zurückbleiben, d. h. eine Verspätung, weil die Reibung an der Achse der Rolle und der Luftwiderstand die Bewegung etwas hemmen. Auch ist die Masse der Speichen und der

Achse der Rolle nicht ganz ohne Einfluß, endlich noch der Umstand etwas störend, daß das Übergewicht des Fadens im Anfange gegen die Bewegung, später im Sinne derselben wirksam ist. Will man, daß die Versuche möglichst genau eine bestimmte Acceleration geben, so vergrößert man probeweise das Übergewichtchen so lange, bis die berechneten Fallräume herauskommen. Das Mehrgewicht des Übergewichtchens kommt dann auf Rechnung der Reibung und der übrigen störenden Umstände.

In einer zweiten Versuchsreihe prüft man die momentanen Geschwindigkeiten, welche nach dem Falle von 1, 2, 3 usw. Sekunden erlangt werden. Zu diesem Zwecke setzt man die Platte mit der kreisförmigen Öffnung der Reihe nach auf dieselben Punkte der Skala, welche nach 1, 2, 3 usw. Sekunden erreicht werden, und setzt die volle Platte so weit unter die ausgeschnittene, daß die sinkenden Gewichte eine Sekunde nach dem Durchgange durch die letztere zum Aufschlage gelangen. Im Moment dieses Durchganges wird das Übergewichtchen abgehoben und damit jede Ursache zu einer weiteren Beschleunigung entfernt, so daß die Gewichte nur vermöge ihrer Trägheit die Bewegung mit der erlangten Geschwindigkeit fortsetzen. Läßt man also diese gleichförmige Bewegung eine Sekunde andauern, so ist der während derselben zurückgelegte Weg (der Abstand der beiden Platten) gleich der zu beobachtenden Geschwindigkeit. Das Schema wäre also etwa folgendes:

Versuch Nr.	Zeit bis zum Abheben des Übergewichtes in Sekunden	Teilstrich der Skala, wo das Abheben erfolgte	Teilstrich der Skala, wo die Gewichte eine Sekunde später ankommen	Erlangte Geschwindigkeit im Moment des Abhebens
1	1	4,9	14,7	9,8
2	2	19,6	39,2	19,6
3	3	44,1	78,5	29,4
4	4	78,4	117,6	39,2
5	5	122,5	171,5	49,0

Die Zahlen sind die berechneten und müssen durch die Versuche bestätigt werden.

Eine dritte Versuchsreihe kann dazu benutzt werden, um die fundamentale Beziehung: Beschleunigung $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ experimentell zu bestätigen. Zu diesem Zwecke ändert man zunächst die Kraft allein, indem man Gewichtsstücke von einem der Schälchen ins andere legt, wodurch wohl die Größe des Übergewichtes, nicht aber die der gesamten in Bewegung gesetzten Masse geändert wird. Dann ändert man die Gesamtmasse allein, indem man auf beide Schälchen gleich große Gewichte zulegt. Endlich können beide Änderungen gleichzeitig vorgenommen werden.

Erster Versuch. Man nimmt beispielsweise von den 10 g des einen Schälchens $^1/_2$ g fort und legt es zu den 11 g des anderen Schälchens, dadurch wird das Übergewicht $=$ 2, also die Kraft verdoppelt, also auch die Beschleunigung und die Fallräume sowie die momentanen Geschwindigkeiten, was der Versuch bestätigen muß.

Zweiter Versuch. Man macht die beiderseitigen Gewichte = 58 un 59 g, folglich ist die Gesamtmasse = 79 + 58 + 59 = 196 g, das Über gewicht beträgt nur 1 g, also die treibende Kraft im (C. G. S.)-Syster = 980 Dynen. Daraus ergibt sich die Beschleunigung $\gamma = \frac{980}{196} = 5$ cm die Fallräume in 1, 2, 3, 4, 5 Sekunden berechnen sich daraus zu 2,5, 1(22,5, 40, 62,5 cm, was durch den Versuch zu bestätigen ist.

Dritter Versuch. Durch Überlegen eines halben Gramms von der einen Schälchen auf das andere macht man ihre Belastungen = 57,5 un 59,5, also das Übergewicht = 2 g, ohne an der Gesamtmasse 196 g etwas z ändern. Dadurch wird nur die Kraft verdoppelt, die Beschleunigung wir mithin = 10 cm. Die Fallräume werden = 5, 20, 45, 80, 125 cm.

Endlich wollen wir darauf aufmerksam machen, daß man unter Voraus setzung der Richtigkeit des Fallgesetzes die in Betracht kommende Mass der Rolle durch den Versuch ermitteln kann.

Hätte man z. B. nur durch den letzten Versuch konstatiert, daß be einer Belastung der beiden Schalen = 57,5 g und 59,5 g, also 2 g Über gewicht in fünf Sekunden der Fallraum 125 cm beträgt, so hatte man zuers die Beschleunigung $\gamma = 2 \cdot \frac{125}{5^2} = 10$ cm zu berechnen und dann di Gleichung

$$10 = \frac{2{,}980}{x + 5{,}75 + 59{,}5}$$

nach x aufzulösen. Man erhält daraus die in Betracht kommende Masse de Rolle $x = 79$ g. Unter dieser „in Betracht kommenden Masse" der Roll ist diejenige Masse zu verstehen, welche, am Umfange der Rolle allein vor handen, der Beschleunigung denselben Tragheitswiderstand entgegensetze würde wie die wirklich vorhandene Masse der Rolle, von der ein Teil sic näher der Achse befindet. Wir werden auf diesen Umstand später bei de Besprechung des Trägheitsmomentes zurückkommen.

§ 45. Unabhängigkeitsprinzip, Zusammensetzung gleichförmige Bewegungen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten. Wir haben i § 7 darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht zulässig sei, von einem Punkt zu behaupten, er sei in absoluter Ruhe oder in absoluter fortschreitende Bewegung, da wir nur relative Ruhe oder relative fortschreitende Bewegun zu erkennen vermögen. Wenn wir folglich irgend einen Körper gegenübe einem anderen in eine relative Geschwindigkeit versetzen, so müssen wi stets daran denken, daß er vorher schon eine relative Geschwindigkeit i bezug auf einen anderen Körper besitze, oder vielmehr, daß er in bezug au mehrere andere Körper gleichzeitig schon mehrere relative Geschwindigkeite besitze, während er wieder anderen Körpern gegenüber in relativer Ruhe sic befinde. Wäre nun der Verlauf der von uns eingeleiteten relativen Bewegun des Körpers abhängig von den vorher in ihm vorhandenen relativen Be wegungen, so würde daraus folgen, daß wir in bezug auf den Verlauf de ersteren gar nichts Bestimmtes voraussagen könnten, denn je nachdem wi diesen oder jenen Bezugskörper als ruhig stehend annehmen wollten, war vorher diese oder jene Bewegung vorhanden. Soll also die von uns einer

Körper erteilte Geschwindigkeit eine vorauszusagende bestimmte Folge haben, so ist das nur möglich, wenn die einzelnen einem Körper erteilten relativen Geschwindigkeiten voneinander unabhängig sind. Da wir dem Körper nur dadurch eine (gleichförmige) Bewegung, d. h. eine Geschwindigkeit erteilen können, daß wir eine gewisse Zeit hindurch auf ihn eine beschleunigende Kraft wirken lassen, welche nach dem Aufhören eine Endgeschwindigkeit hinterläßt, so folgt daraus, daß auch die Wirkung einer beschleunigenden Kraft unabhängig sein muß von dem Vorhandensein einer anderen Bewegung, also auch von dem Vorhandengewesensein einer anderen beschleunigenden Kraft. Dieses Prinzip, welches schon von Galilei implicite vorausgesetzt, von Newton zuerst ausgesprochen ist, wird das Prinzip der Unabhängigkeit der Kräfte genannt.

Zusammensetzung zweier Geschwindigkeitskomponenten. Fassen wir folgendes Beispiel näher ins Auge. In Fig. 91 stelle das Rechteck AB den Boden eines Waggons vor, welcher in einer bestimmten Zeit,

Fig. 91.

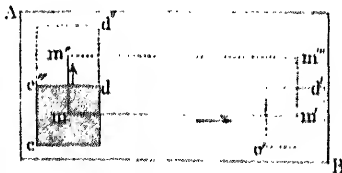
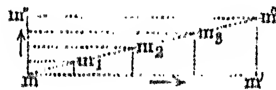


Fig. 92.



z. B. in einer Sekunde, um eine Strecke gleich der Länge mm' nach rechts gleichförmig bewegt werde. Auf dem Boden des Waggons befinde sich eine Kiste cd, welche gleichzeitig von Menschenhand mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Strecke mm'' verschoben werde, so daß sie in die Lage $c''d''$ gelangt. Fassen wir einen Punkt m auf dem Deckel der Kiste ins Auge, so erfährt derselbe zunächst mitsamt dem Waggon in bezug auf die Erde eine relative Bewegung nach m' und zugleich in bezug auf den Waggon eine relative Bewegung nach m''. Welches ist dann die relative Bewegung des Punktes m in bezug auf die Erde? Es ist wohl unmittelbar einleuchtend, daß sich der Punkt m nach Verlauf der Sekunde in m''' befinden muß; nämlich dort, wo sich die gegenüberliegende Ecke eines Parallelogramms befindet, das wir mit den Seiten mm' und mm'' konstruieren können[1]). Fragen wir in ähnlicher Weise nach dem Orte, wo sich der Punkt m nach der Hälfte dieser Zeit befinden muß, so werden wir durch dieselbe Überlegung zu dem Resultate gelangen, daß er sich in der gegenüberliegenden Ecke eines Parallelogramms aus den Hälften der Seiten mm' und mm'' befinden müsse. Suchen wir so fort die Orte auf für beliebige Bruchteile oder

[1]) Man kann sich zunächst vorstellen, daß zuerst eine Sekunde lang der Waggon, dann eine Sekunde lang die Kiste allein sich bewegen oder umgekehrt zuerst die Kiste verschoben, dann der Waggon bewegt werde. Beide Male gelangt der Punkt m nach m'''; er gelangt auch dann dahin, wenn abwechselnd einen Bruchteil der Zeit die eine, dann die andere Bewegung stattfindet, wenn nur jede der Bewegungen im ganzen eine Sekunde dauert. Da also die schließliche Lage des Punktes von diesen Umständen unabhängig ist, so leuchtet ein, daß sie auch bei Gleichzeitigkeit dieser Bewegungen resultieren wird. Trotzdem lassen wir es dahingestellt, ob dieses Resultat durch Spekulation strenge abzuleiten oder nur durch Erfahrung zu gewinnen sei.

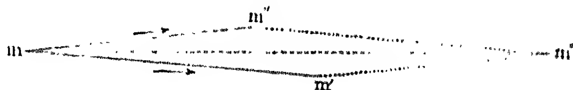
Vielfache der Sekunde, so werden wir, wie Fig. 92 erläutert, unmittelbar zur Einsicht geführt, daß der Punkt m in bezug auf die Erde die relative Bewegung längs der Diagonale mm''', und zwar ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit ausführen müsse. Wir heißen diese Bewegung die resultierende Bewegung oder kurz die Resultierende; die beiden, aus denen sie sich zusammensetzte, die komponierenden Bewegungen oder die Komponenten. Da mm' und mm'' Wege pro Sekunde, also Geschwindigkeiten darstellen, so stellt auch die Diagonale mm''' den Weg pro Sekunde, also die resultierende Geschwindigkeit vor.

Das eben gewonnene Resultat ist offenbar ganz unabhängig von dem Winkel, den die Geschwindigkeitsrichtungen mm' und mm'' miteinander einschließen; wir können es in folgende Worte zusammenfassen: Wenn einem Körper in bezug auf ein System anderer Körper zwei Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen erteilt werden, so erhält er hierdurch in bezug auf dasselbe Körpersystem eine resultierende Geschwindigkeit, welche der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms gegeben ist, dessen Seiten durch Größe und Richtung der komponierenden Geschwindigkeiten dargestellt werden.

Dieser außerordentlich wichtige Satz heißt der Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten (auch Bewegungsparallelogramm).

Für den Fall, daß die komponierenden Geschwindigkeiten den Winkel $= 0$ oder 180^0 einschließen, d. h. in ein und dieselbe Gerade zu liegen

Fig. 93.



kommen, läßt sich kein Parallelogramm mehr konstruieren; man übersieht aber sofort aus solchen Beispielen, Fig. 93 und Fig. 94, bei welchen der

Fig. 94.



Winkel der Komponenten sich dem Werte Null oder 180^0 nähert, daß an die Stelle der zu konstruierenden Diagonale im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Seitenlängen zu treten hat.

Rechnet man die Geschwindigkeitskomponenten nach entgegengesetzten Richtungen mit entgegengesetzten Zeichen, so ist die Resultierende gegeben durch die algebraische Summe der Komponenten. Durch die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen auf ein und derselben Geraden entsteht also wiederum eine gleichförmige Bewegung auf derselben Geraden. In dem speziellen Falle, daß die Geschwindigkeitskomponenten gleich groß sind und entgegengesetztes Zeichen haben, ist die resultierende Geschwindigkeit $= 0$; d. h. es tritt relative Ruhe ein.

Zusammensetzung mehrerer Geschwindigkeitskomponenten in einer Ebene. Gehen wir noch einmal auf das Beispiel mit der Kiste auf dem Waggon zurück, Fig. 95. Im Punkte s befinde sich eine Spinne,

welche zu gleicher Zeit, während der Waggon den Weg *sw*, die Kiste auf dem Waggon den Weg *sk* beschreibt, auf der Kiste den Weg *ss'* mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklege.

Ziehen wir *s's''* und *wk'* parallel zu *sk*, *ks''* und *k's'''* parallel zu *ss'* und ziehen *ss''* und *ss'''*, so erhalten wir, was wohl keiner weiteren Erklärung bedarf, folgende Wege:

Die Spinne bewegt sich relativ zur Kiste auf dem Wege *ss'*
" " " " " zum Waggon auf dem Wege *ss''*
" " " " " zur Erde " " " *ss'''*

Diese Wege werden sämtlich mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurückgelegt, deren Größe durch die Länge der Linien *ss'*, *ss''* und *ss'''* vorgestellt wird, falls die Bewegung gerade eine Sekunde lang dauert. Den Weg bzw.

Fig. 95.

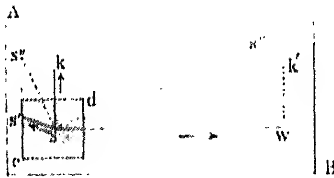
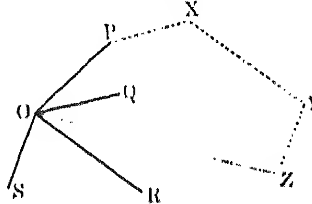


Fig. 96.



die Geschwindigkeit *ss'''* nennen wir die Resultierende der drei Komponenten *ss'*, *sk* und *sw*.

In Fig. 96 ist der Fall dargestellt, daß noch mehr Komponenten, nämlich *OP*, *OQ*, *OR* und *OS* zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden sollen.

Man zieht zuerst *PX* parallel und gleich lang mit *OQ*, dann *XY* parallel und gleich lang mit *OR*, dann *YZ* parallel und gleich *OS*, endlich die Resultierende *OZ*. Die so entstehende Figur *OPXYZ* wird das **Geschwindigkeitspolygon** genannt. Wenn die Konstruktion dieses Polygons ergibt, daß der Endpunkt der zuletzt angefügten Komponenten in den Ausgangspunkt *O* fällt, so ist die Resultierende = 0. Die sämtlichen Bewegungen heben einander dann auf. Der Punkt *O* bleibt in Ruhe.

Zusammensetzung von Geschwindigkeitskomponenten im Raume. Fig. 97 stelle wiederum, aber diesmal in perspektivischer Darstellung, den Boden des oben erwähnten Waggons mit der darauf befindlichen parallelepipedischen Kiste vor. Während der Waggon um ein Stück *sw* nach rechts geht, werde die Kiste um *sk* nach rückwärts geschoben, und während derselben Zeit krieche eine in *s* befindliche Spinne längs der Diagonale der vorderen Wandfläche nach *s'*.

Es ist dann die relative Bewegung der Spinne in bezug auf den Waggon von *s* nach *s''* gerichtet, die relative Bewegung derselben in bezug auf die Erde ist *ss'''*. Um den Punkt *s'''* zu finden, konstruieren wir zuerst das Parallelogramm aus den Seiten *sw* und *sk* in der Ebene des Waggonbodens; dann denken wir uns von *k'* eine schief aufsteigende Gerade *k's'''* parallel und gleich mit *ss'* gezogen. Die Diagonale des Parallelogramms *sk's'''s'*, nämlich die Gerade *ss'''*, ist daher die gesuchte Resultierende der drei Komponenten *sw*, *sk* und *ss'*.

In ähnlicher Weise kann man immer vorgehen, indem man nach und nach die Komponenten zur Konstruktion von Parallelogrammen heranzieht.

Um den Satz vom Geschwindigkeitsparallelogramm durch einen Vorlesungsversuch zu belegen, kann man sich (unter Beschränkung auf einen speziellen Fall) einer von A. F. Weinhold[1]) beschriebenen einfachen Vorrichtung bedienen. Dieselbe ist in Fig. 98 in perspektivischer Ansicht in ein Sechstel natürlicher Größe abgebildet und wohl ohne weitere Beschreibung verständlich. Beim Versuche wird die Vorrichtung auf eine horizontale Tischplatte gestellt, an die Ecke eine Elfenbeinkugel an die beiden Hämmer angelegt, dann zuerst jeder Hammer für sich, endlich beide zugleich fallen gelassen. Hatte man hierbei die (gleich schweren) Hämmer gleich hoch gehoben, so geben sie beide der Kugel gleiche Geschwindigkeiten und folglich eine resultierende Bewegung, welche den Winkel der Komponenten halbiert.

Fig. 97.

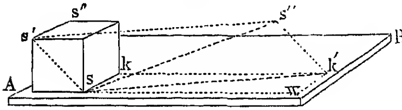
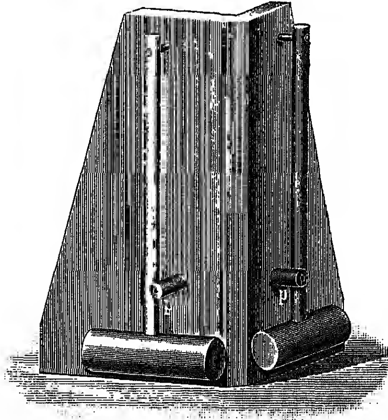


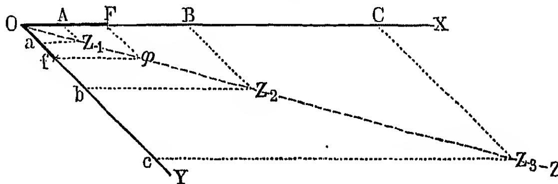
Fig. 98.



Für andere quantitative Versuche ist der Apparat wohl nicht geeignet, doch läßt sich zeigen, daß sich die Richtung der Resultierenden desto mehr einer der beiden Komponenten nähert, je mehr man dieselbe (durch Höherheben des betreffenden Hammers) vergrößert. Die Kautschukpuffer pp verhindern ein Zusammenschlagen der Hämmer.

§ 46. Zusammensetzung gleichmäßig beschleunigter Bewegungen; Parallelogramm der Beschleunigungen. Auf einen materiellen Punkt O, Fig. 99, wirken zwei konstante Kräfte, deren Richtungen OX und OY einen

Fig. 99.



beliebigen Winkel einschließen und deren Größen durch die Beschleunigungen OF und Of vorgestellt seien.

Unter dem Einflusse dieser Kräfte werden in der ersten Sekunde Wege zurückgelegt, welche gleich der halben Beschleunigung sind. Die Wege der folgenden Sekunden sind dann 3 mal, 5 mal, 7 mal usw. so groß.

[1]) Physikalische Demonstrationen, S. 64.

Wäre also bloß die Kraft nach X vorhanden, so wären die vom Punkte O zurückgelegten Wege der ersten drei Sekunden $OA = \frac{1}{2} OF$, dann $AB = 3\,OA$, dann $BC = 5\,OA$ und so fort. Wäre nur die Kraft nach Y vorhanden, so wären die entsprechenden Wege Oa, ab, bc usw. Auf Grund des im vorausgehenden Paragraphen besprochenen Unabhängigkeitsprinzips folgt nun, daß, wenn beide Kräfte zugleich wirken, der Punkt nach 1, 2 und 3 Sekunden in Stationen angelangt sein wird, die wir finden, wenn wir uns die beiderseitigen Bewegungen nacheinander ausgeführt denken. Hierdurch gelangen wir zur Einsicht, daß diese Stationen in den Punkten Z_1, Z_2, Z_3 gelegen sein müssen, die wir durch Konstruktion der Parallelogramme mit den Seiten OA und Oa, OB und Ob, OC und Oc erhalten. Denken wir uns nun die Zeiteinheit (Sekunde) in kleinere Teile zerlegt, z. B. in Zehntelsekunden, und wiederholen wir die Konstruktion mit den diesen kleineren Zeiteinheiten entsprechenden Wegen, so wird dadurch wohl die Zahl der zu konstruierenden Parallelogramme vermehrt, jedoch müssen wiederum alle gefundenen Stationspunkte in die Diagonale OZ fallen, welche mithin die Bahn des Punktes O darstellt. Daß die resultierende Bewegung wiederum eine gleichmäßig beschleunigte sein werde, ersieht man aus dem Verhältnis der aufeinander folgenden Wegstrecken, die sich ebenfalls verhalten wie 1 : 3 : 5 usw. Die **resultierende Beschleunigung** ist dargestellt durch das Doppelte des Weges OZ_1 der ersten Zeiteinheit, also durch die Länge Oq.

Man nennt deshalb das Parallelogramm $OFqf$ das **Parallelogramm der Beschleunigungen** oder, da bei gleicher Masse die Beschleunigung als Maß der Kraft gilt, das **Parallelogramm der Kräfte**.

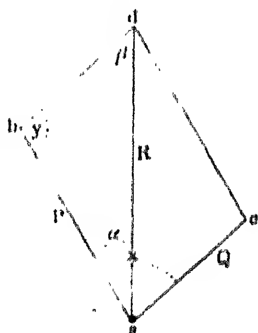
Fassen wir die Resultate zusammen:

1. **Durch die Zusammensetzung zweier geradliniger, gleichmäßig beschleunigter Bewegungen entsteht wiederum eine geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung.**

2. **Größe und Richtung der Beschleunigung dieser resultierenden Bewegung ergibt sich durch die Größe und Richtung der Diagonale des Parallelogramms der Beschleunigungen.**

Bezüglich der speziellen Fälle, in denen die zusammensetzenden Beschleunigungen in eine Gerade fallen, wobei sie im selben Sinne oder gegeneinander gerichtet sein können, gilt genau dasselbe wie bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Die resultierende Beschleunigung ist in diesen Fällen die algebraische Summe der Komponenten.

Fig. 100.



Ebenso kann man bei mehreren in einer Ebene wirksamen Kräften ein Beschleunigungspolygon konstruieren. Endlich lassen sich Komponenten, welche nicht in einer Ebene liegen, ganz so zusammensetzen wie Geschwindigkeitskomponenten.

So oft bei der Zusammensetzung von Beschleunigungen (Kräften) die Resultierende $= 0$ ausfällt, heben sich die Kräfte gegenseitig auf, man sagt, es herrsche **Gleichgewicht der Kräfte.**

Die Resultierende zweier Geschwindigkeiten oder zweier Beschleunigungen läßt sich nach Größe und Richtung außer durch die Konstruktion des Parallelo-

gramms auch durch Rechnung ableiten. Nehmen wir an, daß auf den Punkt a, Fig. 100, zwei Kräfte P und Q wirken, welche sich verhalten wie die Linien ab und ac, während ihre Richtungen den Winkel x miteinander einschließen, so ist die Resultierende durch die Diagonale ad dargestellt, die wir mit R bezeichnen wollen. ad ist aber eine Seite des Dreiecks abd. Einem bekannten trigonometrischen Satze zufolge ist also:

$$ad^2 = ab^2 + bd^2 - 2\,ab\,.\,bd\,.\cos y$$

oder

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2\,P\,.\,Q\,\cos y,$$

wenn man mit y den Winkel abd bezeichnet. Nun aber ist $y = 180^0 - x$, also $\cos y = -\cos x$, folglich

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,.\,Q\,\cos x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Es sei z. B. $P = 3$, $Q = 2$ und der Winkel x gleich 75^0, so ergibt sich

$$R^2 = 9 + 4 + 2\,.\,3\,.\,2\,.\cos 75^0$$
$$R^2 = 13 + 12\,.\,0{,}259 = 16{,}1$$

mithin

$$R = 4{,}0 \ldots$$

Ist einmal die Größe der Resultierenden mit Hilfe der Gleichung (1) ermittelt, so kann man leicht auch die Winkel berechnen, welche die Resultierende mit den Seitenkräften bildet. Bezeichnen wir den Winkel bad mit α, so ergibt sich aus dem Dreieck abd

$$R : Q = \sin y : \sin \alpha,$$

also

$$\sin \alpha = \frac{Q \sin y}{R} = \frac{Q \sin (180 - x)}{R}$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{Q \sin x}{R},$$

da $\sin x = \sin (180 - x)$ ist. Für unser obiges Beispiel ergebe sich also

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin 75^0}{4} = 0{,}5\,.\,0{,}966 = 0{,}483,$$

mithin

$$\alpha = 28^0\,52'.$$

Bezeichnen wir mit β den Winkel, welchen Q mit R macht, so ist

$$\beta = x - \alpha,$$

also in unserem Falle

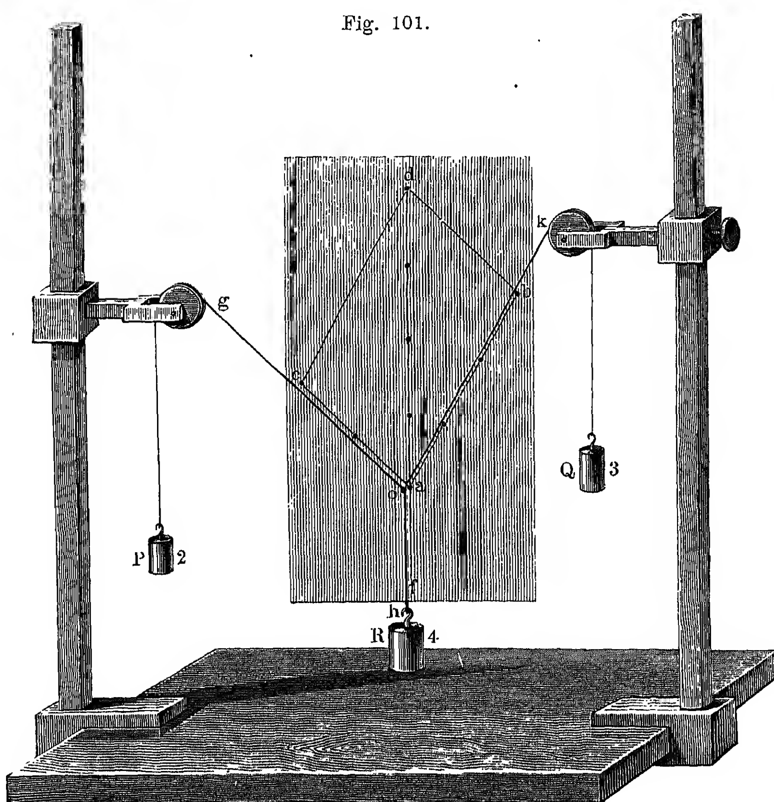
$$\beta = 75^0 - 28^0\,53' = 46^0\,7'.$$

Die experimentelle Bestätigung des Satzes vom Kräfteparallelogramm ist am leichtesten in dem Falle durchzuführen, in welchem durch drei in einem Punkte angreifende Kräfte Gleichgewicht hergestellt wird, indem je zwei dieser Kräfte eine Resultierende geben, welche der dritten Kraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Die konstanten Kräfte werden hierbei durch den Zug von Gewichtsstücken hervorgebracht. Fig. 101 zeigt eine hierzu geeignete Vorrichtung.

aler Ebene leicht bewegliche Rolle trägt; die Stäbe müssen so angeschraubt ein, daß die Vertikalebenen beider Rollen zusammenfallen. Schlingt man ne Schnur über die Rollen, hängt an dem einen Ende ein Gewicht P, am deren Ende ein Gewicht Q, zwischen den Rollen ein Gewicht R an, so wird

Fig. 101.

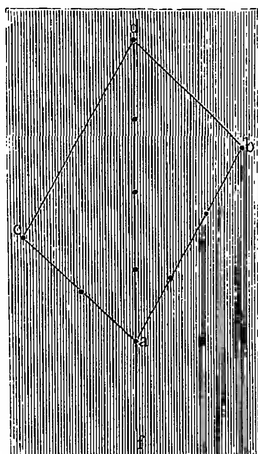


ich bei irgendeiner bestimmten Lage der Fäden alles ins Gleichgewicht stellen; nan hat nun drei auf den Punkt o nach der Richtung og, ok und oh wirkende Kräfte, und es ist leicht zu prüfen, ob zwischen der Größe und Richung derselben diejenigen Beziehungen wirklich stattfinden, wie sie das Gesetz les Parallelogramms der Kräfte verlangt.

Es sei z. B. $P = 2$ dg, $Q = 3$ dg und $R = 4$ dg, so konstruiere man ein Parallelogramm $abcd$, Fig. 102, in welchem die Seite ac 2 dm, die Seite ab 3 dm und die Diagonale ad 4 dm lang ist, und verlängere noch die Diagonale da nach f hin. Wenn nun das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte richtig ist, so muß der Winkel cab dieses Parallelogramms dem Winkel gleich sein, welchen unter den gegebenen Umständen die Schnüre og und ok miteinander einschließen; daß dies in der Tat der Fall ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Konstruktionsfigur so hinter die Schnüre hält, daß der Punkt a hinter o und af hinter oh fällt, wie dies in Fig. 101 angedeutet ist.

Einen auf denselben Grundsätzen beruhenden, ebenfalls sehr zw mäßigen Apparat zur experimentellen Bestätigung der Lehre vom allelogramm der Kräfte hat Crahay[1]) schrieben.

Fig. 102.



§ 47. Zerlegung einer Geschwindig oder einer Kraft in ihre Komponenten.

haben uns hier mit der umgekehrten Auf von jener zu beschäftigen, welche in den be vorausgegangenen Paragraphen behandelt wu Es ist eine gleichförmige oder eine gleichm beschleunigte Bewegung gegeben, und es so je zwei oder auch mehrere solche Bewegu aufgesucht werden, durch deren Zusamı setzung die gegebene Bewegung hervorg würde.

Die Zerlegung einer geradlinigen, gl förmigen Bewegung fällt zusammen mit Zerlegung einer Geschwindigkeit in ihre K ponenten. Die Zerlegung einer geradlini gleichmäßig beschleunigten Bewegung führt zu einer Zerlegung einer schleunigung in ihre Komponenten. Da wir ferner die Größe der K durch die Größe der Beschleunigung ausdrücken, so fällt die letztere

Fig. 103.

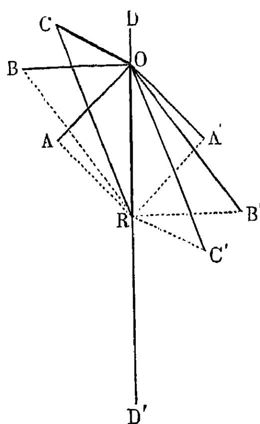
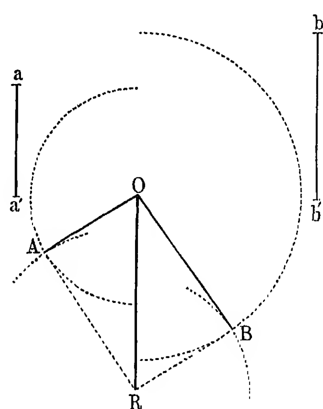


Fig. 104.



ration auch zusammen mit der Zerlegung einer gegebenen Kraft in meh Kräfte solcher Richtung und Stärke, daß ihre Wirkung gleich ist der kung der ursprünglich gegebenen Kraft.

Diese sämtlichen Zerlegungen erfolgen nach derselben Methode. betrachten zunächst die Zerlegung einer Resultierenden (Geschwindigkeit Beschleunigung) in zwei Komponenten.

Da man zu einer gegebenen Diagonale eine unbegrenzte Menge Parallelogrammen zeichnen kann, so ist es auf unbegrenzt viele Weisen

[1]) Poggend. Ann. 60, Fricks physik. Technik, 6. Aufl., S. 176.

lich, eine Resultierende in zwei Komponenten zu zerlegen. In Fig. 103 z. B. ist die Resultierende OR zerlegbar in OA und OA' oder in OB und OB', oder in OC und OC', oder in OD und OD'.

Die Aufgabe bleibt also unbestimmt, solange nicht einschränkende Bedingungen über Richtung oder Größe der Komponenten gegeben sind. Dabei sind folgende drei Hauptfälle möglich.

Es ist nämlich gegeben entweder:

1. Die Größe beider Komponenten.
2. Die Richtung beider Komponenten.
3. Die Größe der einen und die Richtung der anderen Komponente.

Erster Fall. Fig. 104. OR sei zu zerlegen in zwei Komponenten, deren Größen links und rechts durch die Längen aa' und bb' dargestellt sind. Zieht man mit diesen Längen als Radien aus O und R Kreisbögen, so erhält man die Durchschnittspunkte A und B und damit die beiden Komponenten OA und OB.

Man ersieht sofort, daß diese Aufgabe nur dann möglich ist, wenn $aa' + bb'$ größer als OR ist. Für $aa' + bb' = OR$ fallen die Richtungen mit OR zusammen.

Zweiter Fall. Fig. 105. OR sei zu zerlegen in zwei Komponenten nach den Richtungen Ox und Oy. Zieht man die Parallelen $RA \mathbin{/\!/} Oy$ und $RB \mathbin{/\!/} Ox$, so sind OA und OB die gesuchten Komponenten.

Fig. 105.

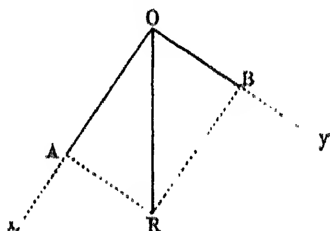
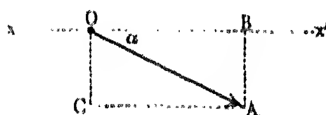


Fig. 106.



Dieser Fall kommt sehr häufig in folgender Weise vor. Ein Punkt O, Fig. 106, sei nur in einer bestimmten Richtung xx' beweglich. Es werde auf ihn eine Geschwindigkeit oder Beschleunigung in der Richtung und Größe OA übertragen, und es fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit oder Beschleunigung er sich gegen x' bewegen werde. Wählt man die Richtung der zweiten Komponente senkrecht auf Ox', so ist einzusehen, daß nun von beiden Komponenten OB und OC nur die erstere zur Ausführung kommen kann. Die zweite Komponente OC könnte nur einen Druck auf das Hemmnis hervorbringen, welches den Punkt zwingt, in der Geraden xx' zu bleiben. Offenbar ist $OB = OA \cos\alpha$ und wird die Projektion der Geschwindigkeit oder der Kraft auf die Richtung der Bewegung genannt.

Dritter Fall. Fig. 107. OR sei zu zerlegen in eine Komponente von der Größe aa' auf der linken Seite und in eine Komponente von der Richtung Oy auf der rechten Seite. Man beschreibt mit dem Radius $= aa'$ Kreisbögen um O und R. Hier sind nun wieder drei Fälle möglich.

a) Fig. 107, der von R aus beschriebene Kreisbogen schneidet die Gerade Oy in zwei Punkten B und B'. Man zieht die Parallelen $OA \mathbin{/\!/} BR$ und

$OA' \,/\!/\, B'R$ und erhält so die Aufgabe doppelt gelöst, denn sowohl die Komponenten OA und OB, als auch die Komponenten OA' und OB' geben mitsammen die Resultierende OR.

Fig. 107.

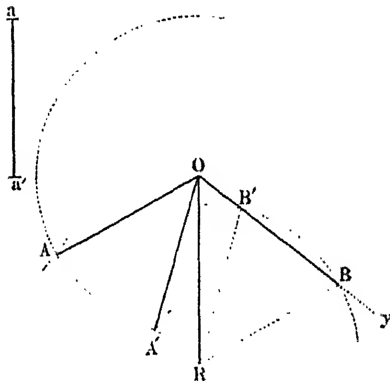
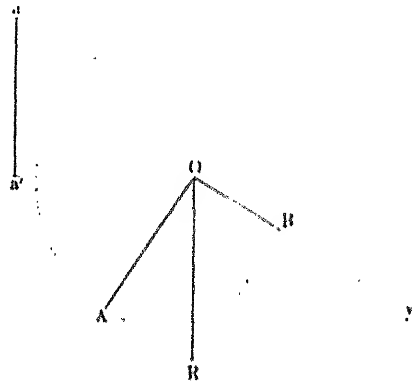
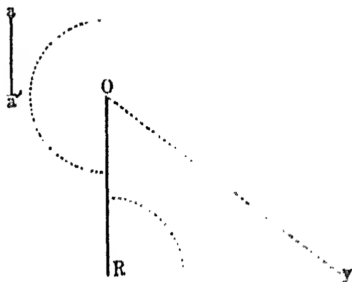


Fig. 108.



b) Fig. 108, der von R aus beschriebene Bogen hat mit der Geraden Oy nur einen Punkt gemeinsam, dann gibt es nur eine Lösung.

Fig. 109.



c) Fig. 109, der um R gezogene Kreisbogen erreicht die Gerade Oy gar nicht, dann ist die Lösung unmöglich.

Die Zerlegung in mehr als zwei Komponenten erfolgt durch Wiederholung des Verfahrens.

Wählt man bei der wiederholten Zerlegung als Konstruktionsebene eine von der ursprünglichen Ebene abweichende, so liegen dann die Komponenten ebenfalls nicht in einer Ebene, sondern im Raume.

Beispiele: Einfache Zerlegung. Von den überaus zahlreichen Anwendungen der Zerlegung der Kräfte wollen wir hier die Wirkung des Steuers an einem Schiffe darstellen.

Es sei SS', Fig. 110, die Kielrichtung, d. h. Längsachse des Schiffes, $S'O$ das um eine vertikale Achse bei S' drehbare Steuerruder, auf welches in der hier angenommenen Seitenstellung der Widerstand des Wassers in der Richtung des Pfeiles P' eine Kraft ausübt, wenn das Schiff durch die Ruderschläge in der Richtung des Pfeiles P in Bewegung gesetzt wird. OR stelle die Größe und Richtung dieser Kraft vor. Dieselbe ist in zwei Komponenten zerlegbar, von denen die eine parallel dem Steuerruder OB unbenutzt bleibt, die andere auf dem Steuer senkrechte OA das Hinterteil des Schiffes nach links zu verschieben trachtet. Hierdurch wird ein nach rechts Lenken des Vorderteiles erreicht.

Hängt das Schiffchen an seiner Spitze mittels eines der Strömung parallelen Seiles und einer Laufrolle an einem den Fluß quer überspannenden Seile, so wird es durch den besprochenen Seitendruck auf das Steuer vom linksseitigen Flußufer auf das rechtsseitige (den Blick stromabwärts gedacht)

übergeführt. Um dann wieder an das frühere Ufer zurückzukehren, muß man das Steuerruder umstellen.

Wiederholte Zerlegung. Ein interessantes Beispiel für die wiederholte Zerlegung einer Kraft ist die Anwendung des Segels zur Bewegung des Schiffes.

In Fig. 111 stelle SS' ein kleines Segelboot von oben gesehen vor. VV' sei die Ebene des Segels, auf welches der Wind in der Richtung des Pfeiles

Fig. 110.

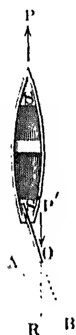
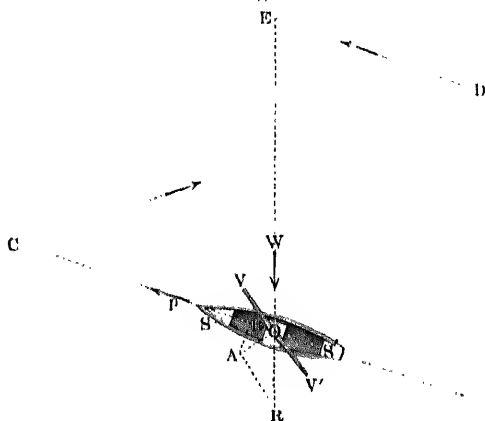


Fig. 111.



W mit einer konstanten Kraft drücke, welche durch die Strecke OR nach Größe und Richtung vorgestellt werde. Von dieser schief auf die Segelfläche ausgeübten Kraft kommt nur die senkrechte Komponente OA zur Wirkung. Sie sucht das Schiff von O nach A zu bewegen. Da jedoch das Schiff sich fast nur in der Richtung des Kieles bewegen läßt und jedenfalls jeder Verrückung quer auf den Kiel ein großer Widerstand entgegensteht, so kommt von der Kraft OA wieder nur die Projektion auf die Richtung OS, nämlich OB zur Wirkung. Das Schiff bewegt sich also mit einer gewissen Kraft in der Richtung des Pfeiles p. Stellt man es dann nach einiger Zeit z. B. in C mit der Spitze gegen D und wendet das Segel um, so daß seine Fläche wiederum den Winkel zwischen jener Richtung, aus welcher der Winkel bläst und der Richtung des Laufes des Schiffes halbiert, so wird das letztere gegen D hingetrieben. Auf diese Weise kommt es zu dem auffallenden Resultate, daß das Schiff, im Zickzack hin und her fahrend (lavierend), durch den Wind getrieben, sich jener Gegend nähern kann, von welcher der Wind weht. Auf ähnliche Weise werden in nördlichen Gegenden Segelschlitten durch den Wind in einer Richtung in Bewegung gesetzt, die keineswegs mit der Richtung des Windes zusammenfallen muß. Es läßt sich vielmehr zeigen, daß der Segelschlitten in dem Falle, wo die Windrichtung quer auf die Richtung der Fahrt gerichtet ist, in größere Fahrgeschwindigkeit, als die des Windes selbst ist, versetzt werden kann, was nicht möglich ist, wenn die Windrichtung in die Fahrtrichtung fällt.

§ 48. Fall über die schiefe Ebene. Nachdem wir die Zerlegung einer Kraft in Komponenten kennen gelernt, können wir nun auch den Fall über die schiefe Ebene, an welchem Galilei zuerst die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung studiert hat, in Behandlung ziehen.

In Fig. 112 stelle ab die schiefe Ebene vor, welche mit der Horizonta
bc den Winkel α einschließe. An die höchste Stelle bei a denken wir
eine kleine Kugel gelegt, welche einen beweglichen, materiellen Pu vertreten soll. Die Kraft, mit wel diese Kugel von der Erde längs Richtung ac angezogen wird, durch die Beschleunigung g freien Falles gemessen und we durch die Länge ac vorgestellt.

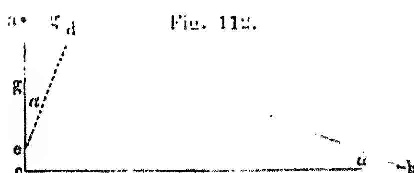


Fig. 112.

Ziehen wir dann $cd \perp ab$, so stellt ad jene Komponente der Schw kraft vor, durch welche die Kugel ab in Bewegung gesetzt wird. Die and Komponente senkrecht auf ab von der Größe cd bringt nur einen Druck die schiefe Ebene hervor. Bezeichnen wir die Komponente ad mit g', ergibt sich

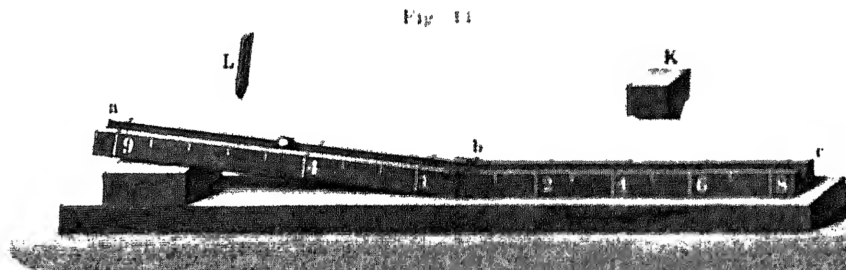
$$g' : g = ac : ab,$$

d. h. die Beschleunigung der Bewegung über die schiefe Ebene verhält zu jener des freien Falles wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Län Oder, wenn wir den Winkel einführen

$$g' = g . \sin\alpha,$$

d. h. die Beschleunigung der Bewegung über die schiefe Ebene ist gl jener des freien Falles, multipliziert mit dem Sinus des Neigungswink Man kann daher durch passende Neigung die Bewegung beliebig verla samen[1]. Zur Anstellung der Galileischen Fallversuche bedient man s am besten einer etwa 2 bis 4 m langen hölzernen Fallrinne ab, Fig. 1

Fig. 113.



welche durch zwei wohl polierte, unter rechtem Winkel sich schneide ebene Flächen gebildet wird. Der Länge nach ist diese Fallrinne, de Neigung gegen die Horizontale beliebig geändert werden kann, in Decime (oder nach einer größeren Einheit) eingeteilt, wie Fig. 113 zeigt. Ist Fallrinne so gestellt, daß $g' \sin\alpha = 2$ dcm, daß also der Fallraum der ers Sekunde 1 dcm ist, so wird man finden, daß die Kugel in 2, 3 usw. Sekun

[1]) Die hier abgeleiteten Gesetze gelten, streng genommen, nur für e materiellen Punkt oder auch einen Körper, der über die schiefe Ebene ohne bung gleitet. Bei einem rollenden Körper wird ein Teil der Kraft zur Rotati bewegung verwendet und ist deshalb die fortschreitende Geschwindigkeit erheb geringer. Es wird dieser Sachverhalt an späterer Stelle näher auseinanderges werden.

INHALTSVERZEICHNIS ZUM ERSTEN BANDE.
(ZWEITE ABTEILUNG.)

Zweites Buch.

Die Akustik.

Erstes Kapitel.

Von den Schallwellen.

inen Weg von 4, 9 usw. Decimetern in der Fallrinne durchläuft, daß sich lso die Fallräume wirklich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Statt des Sekundenpendels mit hörbarem Schlag kann man mit Vorteil uch das Metronom[1]) benutzen, weil es gestattet, statt der Sekunde auch ine beliebig kleinere Zeiteinheit in Anwendung zu bringen.

Um den Versuch anzustellen, wird der Klotz K so gestellt, daß seine orderfläche (links) bei b gerade auf den Nullpunkt der Teilung zu stehen ommt. Läßt man dann die Kugel mittels des Brettchens L beim Schlage es Sekundenpendels bei 1, 4 oder 9 los, so schlägt sie nach 1, 2 oder Sekunden am Klotz K an.

Ist der Apparat so konstruiert, daß sich die Rinne vom unteren Ende b er schiefen Ebene an in horizontaler Richtung bc fortsetzt, so läßt sich venigstens mit angenäherter Genauigkeit zeigen, daß die erlangten End-eschwindigkeiten der Fallzeit proportional sind. Stellt man den Klotz K ei den Teilstrichen 2, 4, 6 der horizontalen Rinne bc auf, so wird die Kugel n ihn 2, 3, 4 Sekunden später anschlagen, als man sie in den Punkten 1, , 9 der schiefen Ebene losgelassen hat. Ist also die Kugel in 1, 2 oder Sekunden von 1, 4 oder 9 bis b auf der schiefen Ebene herabgefallen, so iuft sie vermöge der erlangten Geschwindigkeit (ohne weitere Beschleuni-ung) auf der horizontalen Ebene in der folgenden Sekunde von b an noch , 4 oder 6 dcm weiter.

Eine interessante Folgerung aus dem Gesetze des Falles über die schiefe bene ist ein unter dem Namen „Fall durch die Sehne" bekannter, schon on Galilei abgeleiteter Lehrsatz. Derselbe lautet: Alle Sehnen eines Kreises, die vom oberen Ende eines vertikalen Durchmessers aus-ehen oder zum unteren Ende desselben hinführen, werden in erselben Zeit durchlaufen wie der vertikale Durchmesser selbst eim freien Falle.

Denken wir uns in einem Kreise, dessen Ebene vertikal steht, den verti-alen Durchmesser ac, Fig. 114, ferner von irgendeinem Punkte d des Um-

Fig. 114.

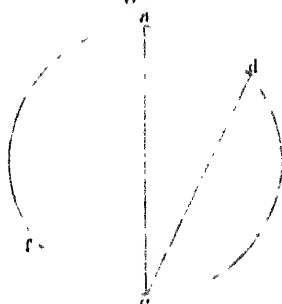
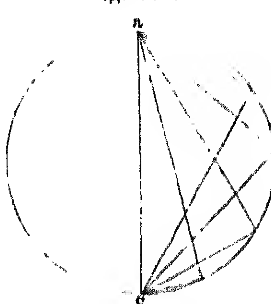


Fig. 115.



anges aus die Sehnen da und dc gezogen, so ist bekanntlich dac ein recht-vinkeliges Dreieck, und wenn man mit x den Winkel bezeichnet, welchen dc nit der Vertikalen macht, so ist x auch der Winkel zwischen ad und der Horizontalen; ferner ist $ad = ac \cdot \sin x$, es wird also die Sehne ad in der-elben Zeit durchlaufen, welche ein frei fallender Körper braucht, um den ertikalen Durchmesser ac zu durchfallen.

[1]) Siehe § 100.

Dies gilt, welche Stellung der Punkt *d* auch auf dem Kreisumfange einnehmen mag; alle von *a*, Fig. 115, ausgehenden Sehnen werden in gleicher Zeit durchlaufen wie der vertikale Durchmesser *ac*.

Denken wir uns durch *c* in Fig. 114 eine Sehne *cf* parallel mit *ad* gezogen, so hat *cf* nicht allein gleiche Neigung gegen die Horizontale wie *ad*, sondern auch gleiche Länge, woraus dann folgt, daß alle in *c* zusammenlaufenden Sehnen des Kreises in gleicher Zeit durchlaufen werden wie der vertikale Durchmesser *ac*.

In Fig. 116 ist noch eine andere elegante, schon von Galilei aufgefundene Form dieses Lehrsatzes dargestellt. Läßt man gleichzeitig von *a* aus nach verschiedenen Richtungen auf den schiefen Ebenen *ac*, *af*, *ag* ... Kugeln fallen, so befinden sich während des Falles stets alle Kugeln am Umfange eines Kreises, der durch den Punkt *a* hindurchgeht. Die in der Figur gezeichneten Kreise entsprechen den Fallzeiten 1, 2 und 3. Die Durchmesser der Kreise verhalten sich wie die Quadrate, die Flächenräume derselben wie die vierten Potenzen der Fallzeiten.

Fig. 116.

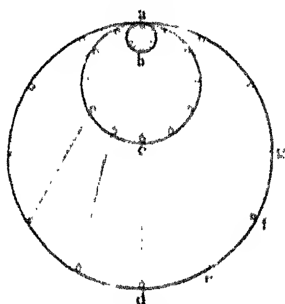
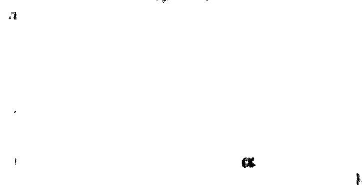


Fig. 117.



Endlich haben wir noch einen wichtigen Satz in bezug auf die Geschwindigkeit abzuleiten, mit welcher der über die schiefe Ebene fallende Körper am Fuße derselben ankommt.

In Fig. 117 sei *ab* eine schiefe Ebene, deren Länge wir mit *l* und deren vertikale Höhe wir mit *h* bezeichnen wollen. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein von *a* aus auf schiefer Ebene herabfallender Körper in *b* ankommt, ist

$$V = \sqrt{2 g l \sin \alpha} \qquad (1)$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher ein von *a* vertikal herabfallender Körper in *c* ankommt, ist aber

$$v = \sqrt{2 g h}.$$

Es ist aber $h = l . \sin \alpha$ oder $l = \frac{h}{\sin \alpha}$. Setzen wir diesen Wert von *l* in Gleichung (1), so kommt:

$$V = \sqrt{2 g h},$$

es ist also $V = v$, d. h., wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene den Weg *ab* zurückgelegt hat, so erlangt er stets dieselbe Geschwindigkeit, als ob er die Höhendifferenz zwischen *a* und *b*, also die Länge *ac* frei durchfallen wäre.

Um den Satz vom Fall durch die Sehne experimentell zu demonstrieren, kann man sich des in Fig. 118 abgebildeten Apparates bedienen. Derselbe besteht aus einer senkrecht stehenden prismatischen Holzsäule *a b* von ungefähr 80 cm Höhe, an welcher oben mittels eines Scharniers die Holzrinne *c d* befestigt ist. Eine ebensolche Rinne ist vor dieser Säule um ein Scharnier bei *b* drehbar. Beide Rinnen werden mittels einer Schraubenklemme aneinander festgestellt, wobei man mittels eines Winkelhakens die Rechtwinkeligkeit des Winkels *c d b* kontrollieren kann. Werden dann bei *a* und *c* zwei kleine Kugeln aus Stein gleichzeitig losgelassen, so fallen beide gleichzeitig auf, die erste bei *b* auf dem Boden, die andere an einem Vorsprunge der Schraubenklemme bei *d*. Ebenso kommen zwei Kugeln, die man bei *c* und *d* gleichzeitig losläßt, gleichzeitig bei *d* und *b* an. Der Versuch kann bei verschiedener Neigung der schiefen Ebene wiederholt werden.

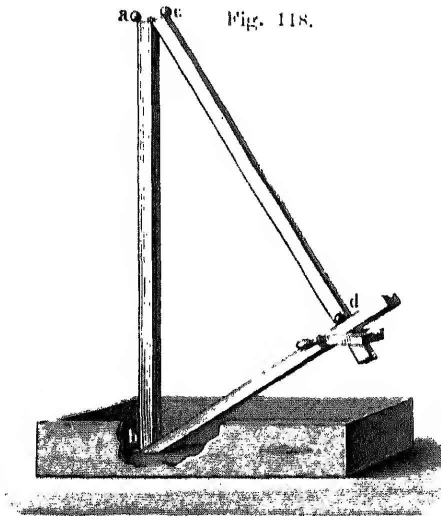


Fig. 118.

§ 49. Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmäßig beschleunigten; Wurfbewegungen. Während bei der Zusammensetzung zweier geradliniger gleichförmiger oder zweier gleichmäßig beschleunigter Bewegungen immer wieder eine g e r a d l i n i g e Bewegung derselben Art hervorgeht, ist dies nicht mehr allgemein der Fall, wenn man eine gleichförmige Bewegung mit einer gleichmäßig beschleunigten kombiniert oder, was dasselbe bedeutet, wenn man einem Körper, der bereits eine Geschwindigkeit besitzt, auch noch eine Beschleunigung erteilt.[1]

Dabei sind mehrere Fälle möglich. Entweder die Beschleunigung und die Geschwindigkeit fallen in dieselbe gerade Linie, wobei überdies der Sinn der Bewegung gleich oder entgegengesetzt sein kann; oder die Richtungen beider schließen miteinander einen Winkel ein.

I. Fall: G e s c h w i n d i g k e i t u n d B e s c h l e u n i g u n g h a b e n d i e s e l b e R i c h t u n g (dieselbe Gerade), v e r t i k a l e r W u r f.

Bei der hierdurch erfolgenden Bewegung muß man unterscheiden zwischen der Länge des wirklich durchlaufenen Weges und zwischen der hierdurch erlangten Entfernung vom Ausgangspunkte. Da nämlich die Bewegung auch eine rückläufige sein kann, so fallen diese beiden Begriffe nicht immer zusammen.

Bezeichnen wir also mit s die infolge der anfänglichen Geschwindigkeit c in der Zeit t erlangten Entfernungen vom Ausgangspunkte und mit s' jene

---

[1]) Dabei denken wir uns sowohl die Geschwindigkeit als die Beschleunigung als relative in Rücksicht auf dasselbe Bezugssystem.

Entfernungen, welche infolge der Beschleunigung φ allein in der Zeit t erreicht würden, so haben wir:

$$s = c\,t$$

$$s' = \frac{\varphi\, t^2}{2}.$$

Aus dem Unabhängigkeitsprinzip folgt dann, daß die unter dem Einflusse der Anfangsgeschwindigkeit c und der Beschleunigung φ erlangten Entfernungen S in der Zeit t gegeben sind durch die Formel:

$$S = s \pm s' = c\,t \pm \frac{\varphi\, t^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit t ist gegeben durch die Gleichung.

$$v = c \pm \varphi\, t \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Dies sind die Gleichungen für die gleichmäßig veränderliche Bewegung in der allgemeineren Form, wobei die Anfangsgeschwindigkeit nicht $= 0$ angenommen ist, wie dies früher im § 38 vorläufig geschah. Das doppelte Zeichen $\pm$ deutet an, daß die Beschleunigung φ mit der Anfangsgeschwindigkeit c gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sein kann. Im ersten Falle ergibt sich eine gleichmäßig beschleunigte, im zweiten Falle eine gleichmäßig verzögerte Bewegung.

Zwischen diesen beiden Bewegungen ist nur ein Unterschied des Richtungssinnes vorhanden, insofern jede nach rechts gerichtete gleichmäßig verzögerte Bewegung nach einer gewissen Zeit in eine nach links gerichtete gleichmäßig beschleunigte Bewegung übergeht, sowie umgekehrt eine nach rechts gerichtete gleichmäßig beschleunigte Bewegung als die Fortsetzung einer früher begonnenen nach links gerichteten gleichförmig verzögerten aufgefaßt werden kann.

Aus den Gleichungen für die gleichförmig verzögerte Bewegung

$$s = c\,t - \frac{\varphi\, t^2}{2}$$

und

$$v = c - \varphi\, t$$

lassen sich leicht berechnen die Zeit und der Ort der Umkehr der Bewegung und die Zeit der Zurückkunft zum Ausgangspunkte.

Die Bewegung findet in positiver Richtung statt, solange $c > \varphi\, t$, sie kehrt um in dem Momente, wo $v = 0$, also $t = \dfrac{c}{\varphi}$. Die bis dahin erlangte Entfernung s ist demnach, indem wir für t substituieren:

$$s = c \cdot \frac{c}{\varphi} - \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{c^2}{\varphi^2} = \frac{c^2}{\varphi} - \frac{c^2}{2\varphi} = \frac{c^2}{2\varphi} \quad \ldots \quad (3)$$

Um die Zeit der Rückkehr zum Ausgangspunkte zu finden, setzen wir $s = 0$, also:

$$0 = c\,t - \frac{\varphi\, t^2}{2},$$

woraus

$$t = \frac{2c}{\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

folgt.

Diese Zeit bis zur Zurückkunft $\frac{2c}{\varphi}$ ist also genau doppelt so groß als die Zeit $\frac{c}{\varphi}$ bis zum Moment der Umkehr der Bewegung.

Berechnen wir endlich noch die momentane Geschwindigkeit im Momente der Zurückkunft, indem wir den Wert $t = \frac{2c}{\varphi}$ in $v = c - \varphi t$ einsetzen, so bekommen wir:

$$v = c - \varphi \frac{2c}{\varphi} = -c.$$

Die Geschwindigkeit im Momente der Zurückkunft ist also gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Anfangsgeschwindigkeit.

Die nächstliegendsten Beispiele über die hier behandelten Bewegungen liefert der vertikale Wurf.

Beim Wurf nach abwärts ist c = der Wurfgeschwindigkeit, φ = der Acceleration der Schwere, also $= g$ (= 9,8 m), und zwar haben beide dasselbe Zeichen. Man hat daher die Falltiefe:

$$s = ct + \frac{gt^2}{2}$$

und die erlangte Geschwindigkeit:

$$v = c + gt.$$

Beim Wurf nach aufwärts dagegen ist die in der Zeit t erlangte Höhe gegeben durch:

$$s = ct - \frac{gt^2}{2},$$

die hochste erreichte Höhe (Wurfhohe) findet man:

$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{19,6} \text{ m}.$$

Die Zeit zum Steigen und die Zeit zum Fallen ist:

$$t = \frac{c}{g} = \frac{c}{9,8}.$$

Die Zeit bis zur Rückkunft also:

$$= \frac{2c}{g} = \frac{c}{4,9}.$$

Zahlenbeispiel. Eine Kanonenkugel werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 400 m senkrecht in die Höhe geschossen. Wie lange und wie hoch steigt dieselbe? Wann fällt sie wieder zur Erde?

Antwort: Sie steigt während $\frac{400}{9,8} = 40,8$ Sekunden, fällt nieder nach zweimal 40,8 Sekunden, also nach 1 Minute 21,6 Sekunden; die erreichte Höhe beträgt $\frac{(400)^2}{19,4} = 8163$ m [1]).

[1]) Bei genauer Berechnung müßte auf die Abnahme der Schwerkraft und auf den Luftwiderstand Rücksicht genommen werden.

Um die gleichförmig verzögerte Bewegung beim vertikalen Wurf durch einen Vorlesungsversuch zu demonstrieren, kann man sich recht gut der im § 44 beschriebenen Fallmaschine von Atwood bedienen. Es wurde daselbst gezeigt, daß man die Bewegung des freien Falles im Maßstab $\frac{1}{100}$ nachahmen kann, wenn man die Masse des Rades und der beiden Gewichte so reguliert, daß die Gesamtmasse z. B. = 100 g, das Übergewicht = 1 g beträgt. In analoger Weise können wir die vertikale Wurfbewegung in demselben Verhältnis verlangsamt vorführen. Wir geben z. B. das Tischchen mit der durchbrochenen Platte an den Teilstrich 78,4 cm; das stäbchenförmige Gewichtsstück, welches abgehoben werden soll, wählen wir = 2 g, wovon aber nur 1 g Übergewicht wirksam ist[1]). Wie aus der Tabelle S. 120 ersichtlich ist, fällt das Schälchen unter diesen Umständen in 4 Sekunden bis zum Skalenpunkte 78,4, wo es mit einer Geschwindigkeit von 39,2 cm ankommt. Da aber hier nicht bloß das Übergewicht 1 g, sondern noch um 1 g mehr abgehoben wird, so ist jetzt auf dem anderen Schälchen 1 g Übergewicht, folglich bewegen sich die Schälchen von da an mit gleichförmig verzögerter Bewegung, und zwar mit einer Verzögerung von 9,8 cm pro Sekunde. Hieraus ergibt sich, daß die verzögerte Bewegung nach der Gleichung:

$$s = 39{,}2\, t - \frac{9{,}8}{2}\, t^2$$

vor sich gehen müsse, wobei s in Centimetern erhalten wird. Das Maximum von s ist somit:

$$s = \frac{c^2}{2g} = \frac{(39{,}2)^2}{19{,}6} = 78{,}4 \text{ cm}.$$

Diese Zahl muß mit dem Fallraume bis zum Abheben des Zweigrammgewichtes übereinstimmen, da die Verzögerung jetzt ebenso groß ist, als früher die Beschleunigung war. Das Schälchen wird also vom Abhebepunkte noch 78,4 cm weiter bis zum Punkte 156,8 gehen, dort umkehren und wieder mit beschleunigter Bewegung zurückkehren.

Die Zeit bis zur Umkehr wird $t = \frac{39{,}2}{9{,}8} = 4$ Sekunden dauern; ebenso lange die Rückkehr zum Abhebepunkte. Darauf folgt dann noch die verzögerte Bewegung bis zum Nullpunkte der Skala nach dem Wiederaufnehmen des abgelegten Gewichtsstückes. Verwechselt man inzwischen das abgelegte Zweigrammstück mit einem Eingrammstück, so kann man noch eine Messung der Endgeschwindigkeit vornehmen, da die Bewegung nach Aufnahme des Eingrammstückes eine gleichförmige werden muß. Da diese Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit $c = 39{,}2$ cm beträgt, so muß das Schälchen 2 Sekunden nach Aufnahme des Grammgewichtes am Skalenpunkte 78,4 — 2 (39,2) = 0 ankommen. Das ganze Experiment wird also folgendermaßen verlaufen:

---

[1]) Beträgt die Masse des Rades, wie beim Versuche S. 117, 79 g, so wählt man die Masse des einen Schälchens = 10 g, die des anderen = 9 g und legt außerdem ein abhebbares Gewicht = 2 g auf.

Sekundenschlag	0	Der Fall beginnt vom Punkte 0.
"	1	
"	2	Beschleunigte Bewegung nach abwärts.
"	3	
"	4	Das Zweigrammgewicht wird abgelegt bei Punkt 78,4.
"	5	
"	6	Verzögerte Bewegung nach abwärts.
"	7	
"	8	Umkehr bei 156,8.
"	9	Beschleunigte Bewegung nach aufwärts (das Zweigrammgewicht wird inzwischen mit dem Eingrammgewicht vertauscht).
"	10	
"	11	
"	12	Das Eingrammgewicht wird aufgenommen bei Punkt 78,4.
"	13	Gleichförmige Bewegung nach aufwärts mit 39,2 cm Geschwindigkeit.
"	14	Ankunft im Punkte 0.

Das andere Schalchen bewegt sich gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung und ahmt daher vom Sekundenschlag vier bis zwölf die Bewegung eines mit der Geschwindigkeit von 39,2 m nach aufwärts geworfenen Körpers in $\frac{1}{100}$ der natürlichen Dimensionen nach.

Dieser Versuch kann noch mannigfach modifiziert werden.

II. Fall: Die Richtung der Geschwindigkeit macht mit der Richtung der Beschleunigung einen Winkel; horizontaler und schiefer Wurf. Ein materieller Punkt O, Fig. 119, besitze eine Geschwindigkeit in der Richtung OX, vermöge welcher er in gleichen Zeitintervallen die gleichen Wegstrecken ox_1, x_1x_2, x_2x_3 usw. zurücklegen würde.

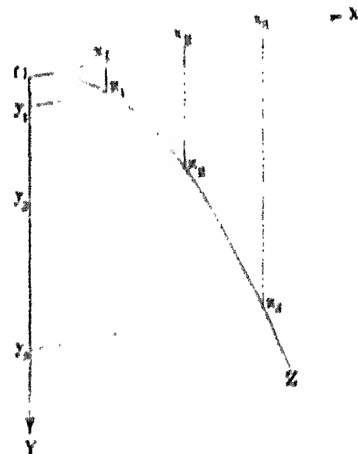


Fig. 119

Auf denselben Punkt wirkt gleichzeitig eine konstante Kraft, welche ihm eine Beschleunigung in der Richtung OY erteilt, vermöge welcher er in den aufeinander folgenden gleichen Zeitintervallen die Wege Oy_1, y_1y_2, y_2y_3 usw. beschreiben würde, die sich wie 1 : 3 : 5 usw. verhalten. Unter gleichzeitigem Einflusse der Geschwindigkeit und der Beschleunigung wird demnach gemäß der früher abgeleiteten Grundsätze die in Fig. 119 durchgeführte Konstruktion der Parallelogramme zur Auffindung der Stationspunkte z_1, z_2, z_3 usw. führen. Denkt man sich unendlich viele Zwischenpunkte ebenso bestimmt, so werden dieselben eine kontinuierliche Kurve OZ darstellen, welche mithin als die resultierende Bahn des Punktes O erscheint.

Wie eine einfache Überlegung lehrt und weiter unten durch Rechnung gezeigt wird, ist die so entstehende Kurve eine **Parabel** mit senkrecht stehender Achse.

Eine solche Kurve entsteht jedesmal, so oft zu einer Geschwindigkeit eine Beschleunigung tritt, welche eine konstante andere Richtung hat als jene.

Ein naheliegendes Beispiel einer solchen Bewegung bildet der Wurf in horizontaler oder in schiefer Richtung.

Horizontaler Wurf. Ein Körper erhalte durch den Wurf eine horizontale Geschwindigkeit $= c$, durch die Schwere eine senkrechte Beschleunigung $= g$. In der Zeit t ist demnach der horizontale Weg $x = ct$, der vertikale Weg $y = \frac{g t^2}{2}$. Setzt man den Wert von t aus der ersteren Gleichung $\frac{x}{c}$ in der zweiten unter, so erhält man:

$$y = \frac{g}{2 c^2} x^2$$

als die Gleichung der Parabel, welche die Bahn darstellt. Fig. 120 zeigt die Ausführung der Konstruktion, welche keine weitere Erklärung erfordert.

Fig. 120.

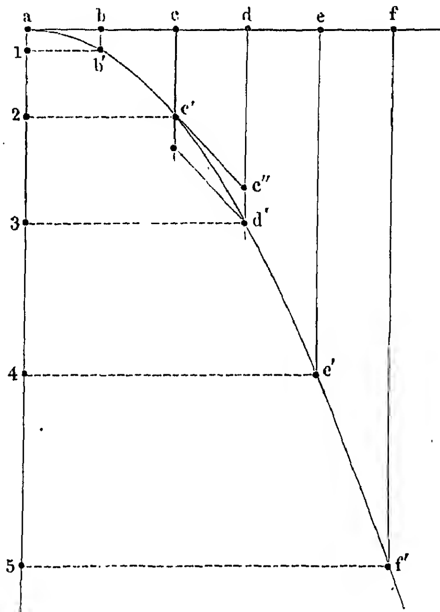
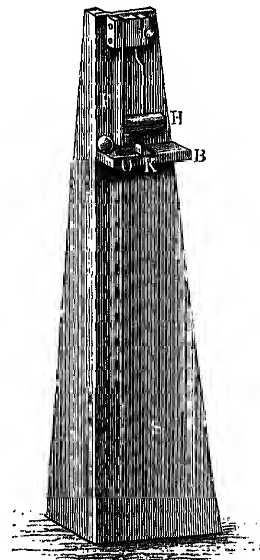


Fig. 121.



Erfolgt der Wurf in der Höhe h über einer horizontalen Ebene, so gelangt der Körper auf den Boden, wenn $y = h$, also wenn:

$$h = \frac{g}{2 c^2} x^2,$$

daraus ergibt sich die **Wurfweite**, d. i. der Horizontalabstand des Auffallpunktes vom Ausgangspunkte:

$$x = c\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Setzt man diesen Wert von x in $x = ct$ unter, so erhält man die Fallzeit:

$$t = \frac{x}{c} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Dies ist genau dieselbe Zeit, welche der Körper zum freien Falle durch die Höhe h brauchen würde.

Daß ein horizontal geworfener Körper gleich schnell durch dieselbe Höhe fällt wie ein frei fallender, kann nach Weinhold durch den in Fig. 121 abgebildeten Apparat demonstriert werden.

Läßt man den Hammer H fallen, so wird gleichzeitig die durch das federnde Holzplättchen F eingeklemmte Kugel O fallen gelassen und die andere davor liegende Kugel hinausgeschleudert. Sie fallen dann beide gleichzeitig auf der horizontalen Tischplatte auf, auf welche der Apparat beim Versuche gestellt wird.

Zahlenbeispiel: Ein Schütze schießt in der Höhe von 1,5 m über einem horizontalen Boden eine Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 200 m ab. Wie weit fliegt die Kugel?

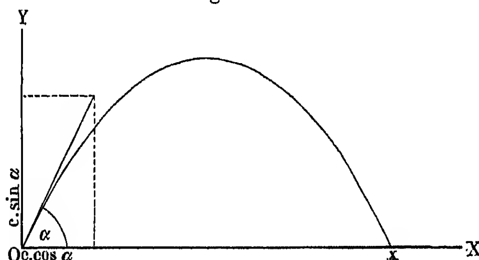
Antwort:

$$x = 200\sqrt{\frac{2 \,.\, 1{,}5}{9{,}8}} = 110{,}6 \text{ m}.$$

In Wirklichkeit wird dieses Resultat durch den Luftwiderstand verkleinert.

Schiefer Wurf. Der Körper erhalte durch den Wurf eine Geschwindigkeit c in einer Richtung, welche mit dem Horizont einen Winkel $= \alpha$ einschließe (Fig. 122). Diese Geschwindigkeit denke man sich zerlegt in zwei Komponenten. Die horizontale Komponente hat dann die Größe $c \,.\, \cos\alpha$, die vertikale die Größe $c \,.\, \sin\alpha$. In der Zeit t ist demnach die erreichte horizontale Entfernung:

Fig. 122.



$$x = ct\cos\alpha,$$

dagegen ist die gleichzeitig erreichte vertikale Entfernung:

$$y = ct\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Durch Einsetzung des Wertes von t aus der ersten Gleichung in die zweite erhält man:

$$y = x\operatorname{tang}\alpha - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Dies ist die Gleichung der Bahnkurve (Parabel mit senkrecht stehender Achse).

Liegen Ausgangspunkt und Endpunkt der Wurfbahn in gleicher Höh so erhält man die Wurfweite, indem man $y = 0$ setzt und x ausrechne Diese Rechnung gibt:

$$x = \frac{2\,c^2 \cos^2 \alpha \; tang\, \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\,\alpha}{g}.$$

Der größte Wert, den $\sin \alpha$ annehmen kann, ist $\sin 90^0 = \sin (2 . 45$ Mithin ist für $\alpha = 45^0$ die Wurfweite am größten, sie beträgt dann, $\sin 2\,\alpha = 1$:

$$x_1 = \frac{c^2}{g}.$$

Für $\alpha = 45 + \alpha'$ ist $\sin 2\,\alpha = \sin (90 + 2\,\alpha') = \cos 2\,\alpha'$,
„ $\alpha = 45 - \alpha'$ ist $\sin 2\,\alpha = \sin (90 - 2\,\alpha') = \cos 2\,\alpha'$.

In beiden Fällen ist also auch die Wurfweite x gleich groß. Es ist al z. B. die Wurfweite dieselbe für 40^0 wie für 50^0, für 20^0 und für 70^0 us

Da die Bahn symmetrisch ist, so muß der höchste Punkt derselben der horizontalen Entfernung der halben Wurfweite liegen, also in:

$$x_1 = \frac{x}{2} = \frac{c^2 \sin 2\,\alpha}{2\,g}.$$

Setzt man diesen Wert in die Kurvengleichung und berechnet das z gehörige y, so erhält man die Wurfhöhe:

$$y = \frac{c^2 \sin 2\,\alpha \; tang\, \alpha}{2} - \frac{g}{2\,c^2 \cos \alpha} \cdot \frac{c^4 \sin^2 2\,\alpha}{4\,g^2}.$$

Beachtet man, daß $\frac{\sin 2\,\alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$, so reduziert sich dieser Au druck auf:

$$y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2\,g}.$$

Zahlenbeispiel: Ein Schütze schießt, am Boden liegend, eine Kug mit 200 m Anfangsgeschwindigkeit unter 1^0 Elevation. Wie weit und w hoch fliegt die Kugel?

$$c = 200, \quad \alpha = 1^0,$$

Wurfweite $x = \frac{c^2 \sin 2\,\alpha}{g}$	Wurfhöhe $y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2\,g}$.
$\log x = 2 \log c + \log \sin 2\,\alpha - \log g$	$\log y = 2 \log c + 2 \log \sin \alpha - \log 2$
$2 \log 200 = 4{,}602060$	$\log 200 = 2{,}301030$
$\log \sin 2^0 = 8{,}542819 - 10$	$\log \sin 1^0 = 8{,}241855 - 10$
Summa $= 3{,}144879$	Summa $= 0{,}542885$
$\log 9{,}8 = 0{,}991616$	$\times\ 2 = 1{,}085770$
$\log x = 2{,}153263$	$\log 19{,}6 = 1{,}292646$
$x = 142{,}3$ m	$\log y = 0{,}793124 - 1$
	$y - = 0{,}621$ m

Infolge Luftwiderstandes wird der absteigende Parabelast erhebli steiler gestaltet und die Wurfweite verkürzt.

Drittes Kapitel.

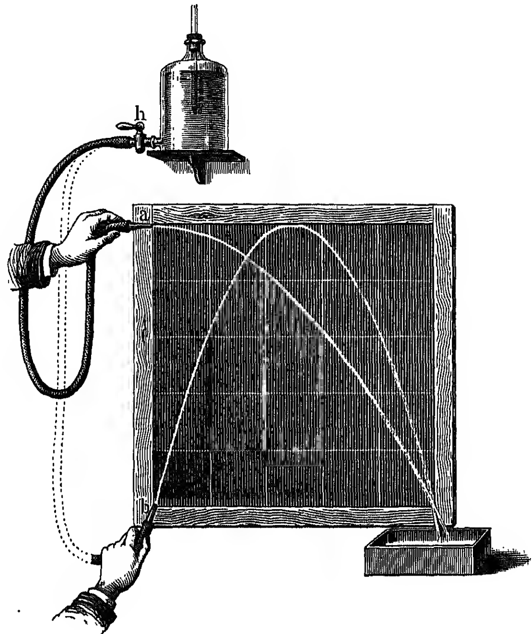
Von den tönenden Körpern.

Viertes Kapitel.

Von dem Zusammenwirken der Töne.

Um die Bewegung beim horizontalen und schiefen Wurfe zu demonstrieren, bedient man sich am besten der Wasserstrahlen, da sie den Vorteil bieten, daß die Wurfbahn längere Zeit sichtbar erhalten bleibt. Eine hierzu dienliche Anordnung mag in Fig. 123 dargestellt sein.

Fig. 123.



Die Wurfbahnen werden auf einer mit einem Quadratnetz bedeckten Tafel vorgezeichnet und dann durch Öffnen des Hahnes *h* der in passender Höhe aufgestellten Mariotteschen Flasche[1]) ein konstanter Strom Wassers dem Kautschukschlauch zugeführt. Das Ende desselben ist mit einer etwas verengten Mündung versehen, welche einen vollen Strahl ausfließen läßt. Man setzt diese Mündung bei *a* oder *b* in gewünschter Neigung mit freier Hand an und reguliert die Ausflußgeschwindigkeit durch Zusammendrücken des Schlauches, bis der Wasserstrahl der vorgezeichneten Kurve folgt, oder man benutzt einen Apparat, bei welchem das Mundstück um den Mittelpunkt eines geteilten Kreises beweglich und die Wassergeschwindigkeit durch einen Hahn regulierbar ist.

§ 50. Zentralbewegung. Bisher haben wir angenommen, daß die Richtung der Beschleunigung während der Bewegung stets dieselbe, d. h. sich selbst parallel bleibe. Dies ist nur dann der Fall, wenn der Punkt, von dem die beschleunigende Kraft ausgeht, in unendlicher Ferne sich befindet. Daß wir die Richtung der Schwerkraft an verschiedenen Stellen der Bahn eines geworfenen Körpers als parallel betrachten konnten, liegt nur daran, daß die Länge der durchlaufenen Bahn verschwindend klein ist gegen die Entfernung des Erdmittelpunktes, gegen welchen der geworfene Körper stets hingetrieben wird. Sobald aber die Bahn des Körpers eine namhafte Länge im Vergleich zur Entfernung des Anziehungsmittelpunktes hat, haben wir es mit einer Zentralbewegung zu tun. In diese Kategorie gehört die Bewegung des Mondes um die Erde, der Erde und der übrigen Planeten um die Sonne. Denken wir uns, daß der Punkt *a*, Fig. 124, welcher durch eine stetig wirkende Anziehungskraft nach dem Punkte *m* hingetrieben wird, beim Beginne seiner Bewegung durch irgend eine momentan wirkende Kraft einen

[1]) Die Mariottesche Flasche wird später besprochen werden; sie bezweckt, daß der Druck des Wassers, also auch seine Ausflußgeschwindigkeit konstant bleibe.

Stoß in der Richtung ab erhalten hätte, so wird er sich weder in der Richtung ab, noch in der Richtung ac bewegen, sondern in einer anderen ad, die sich nach dem Gesetze des Parallelogramms der Kräfte ausmitteln läßt. Um die Betrachtung einfacher zu machen, wollen wir annehmen, daß die

Fig. 124.

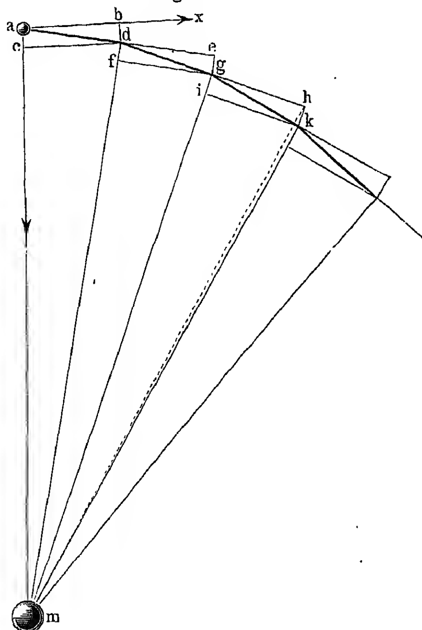
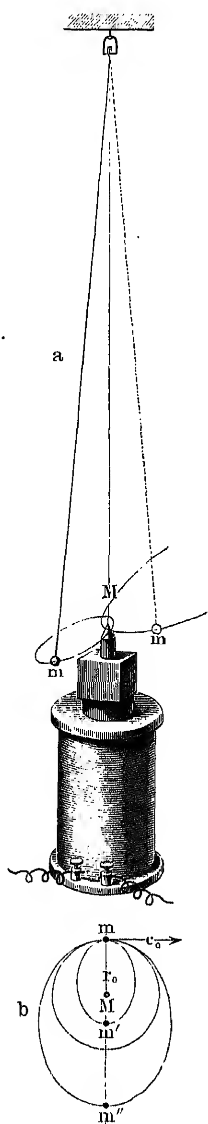


Fig. 125.



stets nach m gerichtete anziehende Kraft stoßweise in kleinen Intervallen wirke. Man wird sich bei dieser Betrachtungsweise um so weniger von der Wahrheit entfernen, je kleiner man sich die Intervalle denkt.

Wenn der seitwärts gerichtete Stoß für sich allein den materiellen Punkt in einem kleinen Zeitteilchen t von a nach b, die anziehende Kraft, für sich allein wirkend, ihn in derselben Zeit nach c führen würde, so bewegt er sich unter Einwirkung beider Kräfte in dem Zeitteilchen t von a nach d. In d angekommen, würde er sich in der Richtung de weiter bewegen, und zwar würde in der Zeit t der Weg gerade so groß sein wie ad, wenn nicht die anziehende Kraft von neuem wirkte, und zwar so, als ob der Körper in d einen Stoß erhalten hätte, der ihn, für sich allein wirkend, in der Zeit t von d nach f geführt haben würde. Durch diese abermalige Einwirkung der anziehenden Kraft wird also der Körper wieder von der Richtung de abgelenkt und nach g geführt. Man begreift daraus leicht, daß, wenn der Körper in a einmal einen seitwärts gerichteten Stoß empfangen hat, die anziehende Kraft aber stoßweise in kleinen Intervallen wirkt, daß alsdann der Körper ein

Polygon beschreiben muß, welches sich einer krummen Linie um so mehr nähert, je kleiner jene Intervalle sind. Wenn die anziehende Kraft stetig wirkt, wie dies in der Natur wirklich der Fall ist, so ist die Bahn eine krumme Linie, deren Natur von dem Verhältnis der sie bedingenden Kräfte abhängt.

Die Kraft, welche den Körper stets nach dem Anziehungsmittelpunkte hintreibt, wird mit dem Namen Zentripetalkraft bezeichnet. Wenn in irgend einem Momente der Zentralbewegung die Zentripetalkraft zu wirken aufhörte, so würde von dem Augenblicke an der Körper sich in der Richtung der Tangente fortbewegen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, entsprechend einer momentanen Kraft, welche Tangentialkraft genannt wird.

Je nach dem Verhältnis zwischen Tangentialkraft und Zentripetalkraft kann die Bahn ein Kreis, eine Ellipse usw. sein.

Um dies durch den Versuch zu zeigen, kann man folgendermaßen vorgehen: Von der Decke herab hängt an einem Faden eine kleine eiserne Kugel m, so daß dieselbe im Ruhezustande nahe über dem Pole M eines kräftigen Elektromagneten schwebt (Fig. 125a). Zieht man dann die Kugel zur Seite nach m (siehe den Grundriß Fig. 125b) und läßt sie los, so bewegt sie sich mit wachsender Beschleunigung zum Pole M, dann mit abnehmender Beschleunigung darüber hinaus, dann wieder zurück und pendelt so hin und her. Gibt man aber der Kugel in der Lage m eine geringe seitliche Geschwindigkeit c_0, so beschreibt sie eine schmale Ellipse mm', wobei der entferntere Brennpunkt derselben mit M zusammenfällt. Steigert man c_0 allmählich, so wird die Ellipse in ihrer Form näher einem Kreise. Bei bestimmtem Wert von $c_0 = c$ wird sie genau ein Kreis. Bei weiterer Steigerung von c_0 wird die Bahn wieder eine Ellipse, deren näherer Brennpunkt mit M zusammenfällt. Wäre die Eisenkugel nicht durch eine Schwerkraftskomponente an M gebunden, sondern ganz frei beweglich, so würde bei einem Werte der Geschwindigkeit $c_0 = 2c$ die Ellipse in eine Parabel, bei weiterer Steigerung in eine Hyperbel übergehen, wie dies bei einigen Kometen, die nicht wiederkehren, der Fall zu sein scheint.

Die Verbindungslinie des Zentrums der Zentralbewegung mit dem jeweiligen Orte des Körpers heißt der Leitstrahl oder der Radiusvektor des Körpers. Es läßt sich nun ein für alle Arten von Zentralbewegungen gültiger wichtiger Satz beweisen, welcher lautet:

Der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Betrachtet man die Fig. 126, so ersieht man sofort, daß $\triangle\, amd = \triangle\, dme$, da ja $ad = de$ und der Scheitel m gemeinsam ist. Ferner ist $\triangle\, dme = \triangle\, dmg$, weil beide Dreiecke auf derselben Basis dm stehen und $dm \parallel eg$ ist. Es ist folglich auch $\triangle\, amd = \triangle\, dmg$. Dasselbe ließe sich von allen folgenden Dreiecken beweisen. Diese Dreiecke sind nun aber nichts anderes als die in aufeinanderfolgenden gleichen kleinen Zeiträumen beschriebenen Flächen. Da wir uns nun zwei beliebige in gleichen Zeiten vom Radiusvektor beschriebene Flächen in gleich viele und gleich große derartige Dreiecke zerlegt denken können, so folgt daraus die Richtigkeit des obigen Satzes.

Ein weiterer wichtiger Satz ist der folgende:

Die Geschwindigkeiten an zwei Punkten der Bahn verha sich verkehrt wie die senkrechten Abstände der an diese Pu gezogenen Tangenten vom Mittelpunkte der Zentralbewegung

Es seien in Fig. 127 ab und $a'b'$ zwei in unendlich kleinen, aber glei Zeiträumen zurückgelegte Bahnstrecken. Dieselben fallen wegen ihrer K

Fig. 126.

Fig. 127.

heit mit den Tangenten an a und a' zusammen. senkrechten Abstände dieser Tangenten von m se und s', die Geschwindigkeiten in a und a' sei und v'. Es gilt dann zunächst:

$$v : v' = ab : a'b'.$$

Gemäß dem obigen Satze über die Gleichheit Flächenräume ist $\triangle\, amb = \triangle\, a'mb'$, folglich auch:

$$ab \,.\, s = a'b' \,.\, s',$$

denn dies sind die Produkte der Grundlinien dieser Dreiecke mit ihren H

Daraus folgt:

$$ab : a'b' = s' : s,$$

also auch:

$$v : v' = s' : s.$$

Die Geschwindigkeit längs der Bahn ist also im allgemeinen keine stante. Dies ist nur dann der Fall, wenn die senkrechten Abstände Tangenten vom Mittelpunkte immer gleich groß sind, also bei der kr förmigen Zentralbewegung.

Wir können uns hier nur mit der kreisförmigen Zentralbewegung schäftigen, und zwar wollen wir zunächst die Beziehung ausmitteln, w zwischen der Größe der Zentripetalkraft, dem Halbmesser des Kreises der Umlaufszeit stattfindet.

In Fig. 128 sei m der Mittelpunkt des Kreises, welchen der Kör beschreibt; ab sei der Weg, welchen er in der Zeiteinheit, etwa in Sekunde, zurücklegt. Fällt man nun von b ein Perpendikel bd auf von a aus gezogenen Durchmesser des Kreises, so ist offenbar ad der um welchen der Körper a in der Zeiteinheit gegen m hin sich bew würde, wenn der Körper in a nicht schon eine Tangentialgeschwindi hätte, sondern lediglich durch die Zentripetalkraft gegen m hin getr würde.

Einem bekannten Satze der Geometrie zufolge ist nun ab (wenn wir den Bogen als geradlinig betrachten, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, wenn ab nur ein kleiner Teil des Kreisumfanges ist) die mittlere Proportionale zwischen ad und an, es ist also:

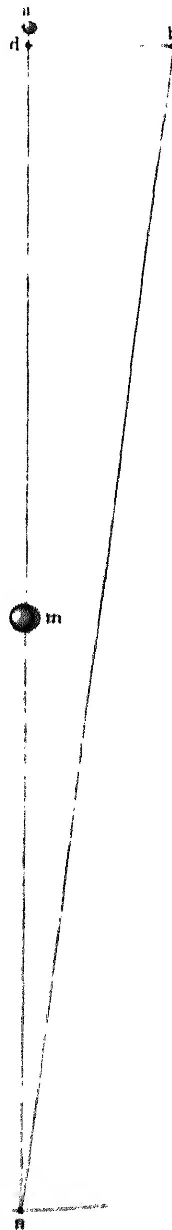


Fig. 128.

$$ab^2 = ad \cdot an$$

und daraus:

$$ad = \frac{ab^2}{an}.$$

Es ist aber an der Durchmesser des Kreises, also $2r$, wenn wir mit r den Halbmesser desselben bezeichnen; ferner ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Bogen ab gleich dem Kreisumfange, dividiert durch die Umlaufszeit T, also:

$$ab = \frac{2\pi r}{T}.$$

Bezeichnen wir nun den Weg ad, um welchen sich der Körper a unter alleinigem Einfluß der Zentralkraft dem Mittelpunkte m in der Zeiteinheit nähern würde, durch p, so haben wir:

$$p = \frac{2\pi^2 r}{T^2}.$$

Die Endgeschwindigkeit v, welche der Körper unter dem Einfluß der Zentripetalkraft am Ende der ersten Sekunde erlangen würde, wenn er von a aus gegen m fiele, ist aber gleich $2p$, also:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Da aber die Endgeschwindigkeit nach der ersten Sekunde gleich ist der Beschleunigung, so ist diese selbst durch obigen Ausdruck gegeben. Die Größe der Zentripetalkraft ist wie die Größe jeder konstanten Kraft gleich dem Produkte der Masse und der Beschleunigung.

Beträgt also die Masse des Körpers m, so ist die Zentripetalkraft K gegeben durch den Ausdruck:

$$K = \frac{4\pi^2 rm}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Will man statt der Umdrehungszeit T die peripherische Geschwindigkeit u einführen, so hat man zu überlegen, daß:

$$u = \frac{2r\pi}{T}, \quad \text{also:} \quad u^2 = \frac{4r^2\pi^2}{T^2},$$

mithin:

$$K = \frac{u^2 m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese beiden Formeln liefern die Zentripetalkraft, wenn ... in absolutem Maße. Wollten wir sie im Gravitationsmaß (nach Kilogr.-gewicht) erhalten, so hätten wir noch mit $g = 9{,}81$ zu dividieren.

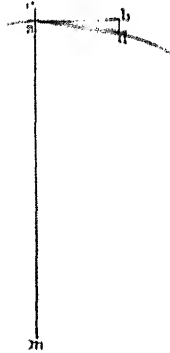
§ 51. Fliehkraft. Die im vorigen Paragraphen berechnete Zentripetalkraft wirkt unter so eigentümlichen Umständen, daß der Körper, auf den sie wirkt, sich doch nicht in der Richtung der Kraft dem Anziehungszentrum nähert, sondern immer in gleicher Entfernung von demselben b... Die Zentripetalkraft bewirkt nur, daß durch die von ihr dem Körper gegen das Zentrum erteilte Beschleunigung die Entfernung vom Zentrum, w... durch die tangentiale Geschwindigkeit eintreten würde, kompensiert ... Die Zentripetalkraft wirkt also wie ein Widerstand, der den Körper hin... sich vom Zentrum weiter zu entfernen.

Ein solcher Widerstand kann aber auch auf andere Weise geleistet we... z. B. dadurch, daß man den Körper nötigt, innerhalb einer kreisförm... Rinne oder am Ende einer Schnur befestigt, sich zu bewegen, deren an... Ende am Mittelpunkte angebunden ist.

Man kann sich im letzteren Falle die Zentripetalkraft in Form ... Zuges an dieser Schnur vorstellen, ja man könnte die Größe derselben ... der Spannung entnehmen, welche eine an der Stelle dieser Schnur befind... elastische Spirale zeigen würde. Wie bei allen Kräften, so ist auch ... Aktion und Reaktion gleich, d. h. die Spirale wird ebenso stark nach ... Zentrum hin wie gegen den bewegten Körper hin angezogen. Diese bei der Zentripetalkraft entgegengesetzt gerichtete, aber an Größe gleiche K... heißt **Fliehkraft, Zentrifugalkraft** oder auch **Schwungkraft**.

Man kann sich das Auftreten dieser Fliehkraft auch auf folgende W... erklären. Die Bewegung infolge der tangentialen Geschwindigkeit würd... kleinem Zeitintervall von *a* nach *b* (Fig. 129) ... sich gehen. In dieser Richtung kann sie aber ... erfolgen wegen des Widerstandes der Schnur. ... geht also nach der Komponente *ad* vor sich, die... aber nur möglich, wenn gleichzeitig eine an... Komponente auftritt, welche mit der ersten zu... sammen die ursprüngliche *ab* ersetzen kann. D... andere Komponente ist *ac*, welche als Fliehkraft ... scheint. Sobald die Schnur durchschnitten w... tritt an Stelle der beiden Komponenten sofort wi... die Resultierende *ab*, d. h. die ursprüngliche tan... tielle Geschwindigkeit, vermöge welcher der Körpe... der Richtung der Tangente fortfliegt, das Fortfli... erfolgt also nicht in der Richtung der Fliehk... welche sofort erlischt, sobald die Nötigung entfällt, daß der Körper ... nach *ab* nach *ad* gehe.

Fig. 129.



Man unterscheidet manchmal eine so zustande kommende Bewegung ... **gebundene Zentralbewegung** von der im vorigen Paragraphen ... handelten **freien Zentralbewegung**.

Die Größe der Fliehkraft ist, da sie der Zentripetalkraft an Größe g... ist, ebenfalls gegeben durch die im vorigen Paragraphen abgeleiteten ... drücke:

$$F = \frac{4\,\pi^2\,r\,m}{T^2} = \frac{u^2\,m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

vobei r den Radius, m die Masse, T die Umlaufszeit, u die peripherische ieschwindigkeit bedeuten.

Um die Fliehkraft im Gravitationsmaß, d. h. nach Gewicht auszudrucken, at man noch durch $g = 9{,}81$ zu dividieren. Man hat dann:

$$F' = \frac{4\,\pi^2}{g} \cdot \frac{r\,m}{T^2} = 4{,}024\,\frac{r\,m}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Dabei ist r nach Metern, m nach Kilogrammen zu messen, um die Fliehraft ebenfalls in Kilogrammgewicht zu erhalten.

Aus den obigen Formeln folgen die nachstehenden Sätze:

1. Die Fliehkraft ist proportional der Masse m.
2. " " " bei gleicher Umlaufszeit T proportional dem Radius
3. " " " bei gleichem Radius verkehrt proportional dem Quadrat der Umlaufszeit.
4. " " " bei gleichem Radius direkt proportional dem Quadrate der peripherischen Geschwindigkeit.
5. " " " bei gleicher peripherischer Geschwindigkeit verkehrt proportional dem Radius.

Um diese Gesetze zu demonstrieren, und überhaupt um Versuche über ie Fliehkraft anzustellen, bedient man sich eines eigenen Apparates, welcher ie Schwung- oder Zentrifugalmaschine genannt wird.

Fig. 130.

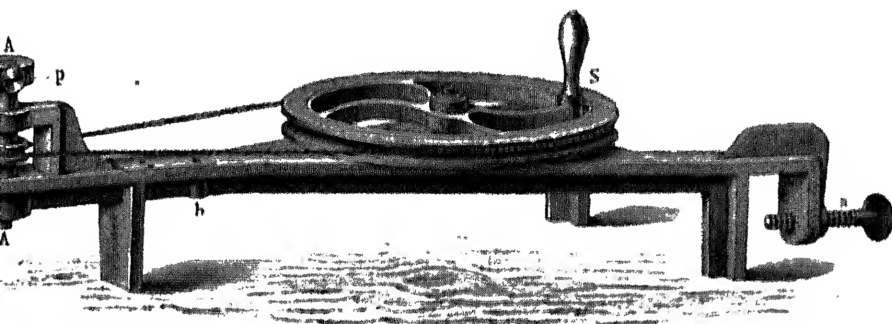


Fig. 130 zeigt eine solche Schwungmaschine zweckmäßiger Konstruktion n ungefähr $^1/_8$ der natürl. Größe[1]).

Dieselbe soll so gebaut sein, daß sie sich sowohl in horizontaler als auch vertikaler Lage gebrauchen läßt. Sie soll ferner gestatten, daß nicht bloß pparate über der Achse $A\,A$ befestigt, sondern auch unterhalb derselben ngebracht werden können. Die an das eiserne Gestell angegossene Schraubenwinge s gestattet ein Festklemmen an den Tisch bei vertikaler Stellung. ie Achse des Schwungrades ist verstellbar, um die Schnur (Darmsaite mit akenschloß) nachspannen zu können. Bei b ist eine vertikale Bohrung

[1]) Dieselbe ist dem Buche „Physikalische Demonstrationen" von D. A. F. Weinold entnommen; eine ähnliche Konstruktion rührt vom Mechaniker Stöhrer Leipzig her.

mit Schraubengewinde angebracht, die zur Befestigung verschiedener richtungen dient. Die Nebenapparate werden mittels Zapfen in die drische Bohrung der Achse AA eingesetzt und mittels der Schraube geklemmt.

Um den ersten der obigen Sätze, nämlich den Einfluß der Mas zeigen, kann man sich eines Apparates, wie er in Fig. 131 abgebilde bedienen.

Derselbe ist ohne weitere Beschreibung verständlich. Die beiden linder (oder Kugeln) sind von ungleicher Masse, und zwar im einfachen hältnisse, z. B. 1 : 2 stehend. Haben beide gleichen Abstand von der so fliegt stets die schwerere nach außen, indem sie die leichtere nach zieht. Wählt man aber die Abstände verkehrt proportional den Massen

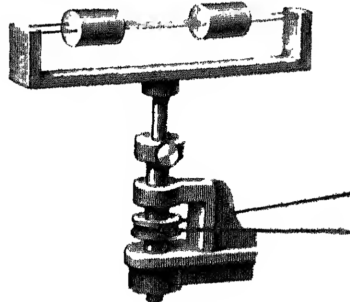


Fig. 131.

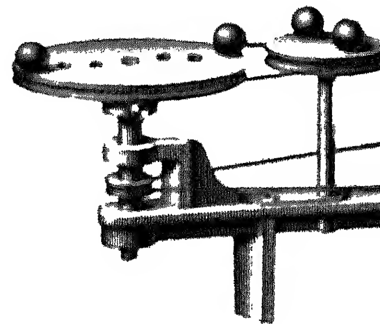


Fig. 132.

halten sich die Fliehkräfte das Gleichgewicht, und die Körper bleiben bei raschester Rotation in ihren Abständen. Es ist damit erwiesen, daß Fliehkraft bei gleicher Umlaufszeit T dem Produkt rm proportional ist.

Entfernt man die kleinere Masse noch weiter von der Achse, so sie die größere nach sich. Dies beweist, daß dem größeren Radius gleicher Umlaufszeit größere Fliehkraft zukommt. Dasselbe läßt sich ze indem man die in Fig. 132 [1]) abgebildete größere Scheibe ohne die kle danebenstehende in ihren sechs Vertiefungen mit sechs gleich schw Kugeln belegt. Beim langsam beschleunigten Drehen verlassen zuerst äußersten Kugeln den Platz, zuletzt die innersten.

Um zu zeigen, daß bei gleicher peripherischer Geschwindigkeit gleicher Masse die Fliehkraft größer ist, wenn der Radius kleiner ist (Sat wird die kleinere Scheibe aufgesetzt und mit der größeren durch eine Sc verbunden. Da die nun an den Rand aufgesetzten Kugeln sich unmitte über der Schnur befinden, haben sie gleiche peripherische Geschwindig Es werden dann die Kugeln der kleineren Scheibe zuerst abgeworfen.

Daß endlich die Fliehkraft unter übrigens gleichen Umständen Quadrat der Umlaufszeit verkehrt proportional ist, läßt sich annähern weise mit Hilfe des Apparates Fig. 133 nachweisen. Innerhalb eines Rahm welcher, wie der vorige Apparat, auf die Schwungmaschine aufgesetzt we kann, ist ein Winkelhebel *dbr* angebracht, welcher bei *b* um eine horizo

---

[1]) Die Abbildung dieses Apparates ist ebenfalls dem zweiten Buche A. Weinhold entnommen.

Achse leicht drehbar ist. Bei *d* trägt er eine Metallkugel, bei *c* aber eine Metallplatte, auf welche verschiedene Gewichte aufgelegt werden können. Sobald dieser Apparat um seine Achse gedreht wird, strebt die Kugel *d*, sich von derselben zu entfernen und die Gewichte bei *c* zu heben, was in der Tat erfolgt, sobald die Schwungkraft der Kugel *d* groß genug geworden ist. Nehmen wir an, das auf *c* gelegte Gewicht sei so justiert, daß die Kugel *d* an das Seitenbrett anschlägt, wenn das Schwungrad der Schwungmaschine einmal in der Sekunde umgedreht wird, so wird bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit dasselbe erfolgen, wenn auf *c* so viel Gewicht gelegt wird, daß der Druck, mit welchem die Platte *c* auf ihrer Unterlage aufliegt, viermal so groß ist als vorher.

Der beschriebene Apparat ist zwar einfach, wirkt aber nicht sehr genau. Genauere Resultate sind mit einem vor längerer Zeit von Schleiermacher konstruierten Apparate zu erhalten, welchen wir in der vorigen Auflage beschrieben, hier aber wegen Raumersparnis weggelassen haben.

Fig. 133.

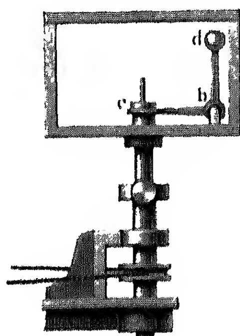
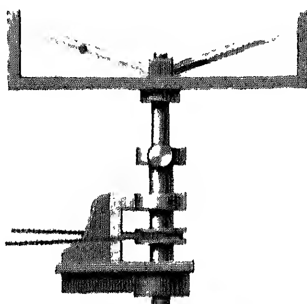


Fig. 134.



Außer den beschriebenen Experimenten werden mit der Schwungmaschine meist noch folgende Versuche angestellt.

Der Apparat Fig. 134 zeigt zwei Glasröhren, welche, an beiden Enden zusammengeschmolzen oder auch nur mit Kork verschlossen, in einem passenden auf die Schwungmaschine aufzusetzenden Gestelle so befestigt sind, daß die nach außen gekehrten Enden höher stehen als die nach innen gekehrten. Die eine dieser Röhren enthält eine kleine Kugel von Elfenbein oder schwerem Holz, die andere ist zum Teil mit Quecksilber und gefärbtem Wasser gefüllt. Sobald der Apparat in Rotation versetzt wird, läuft die Kugel in der einen Röhre in die Höhe, während in der anderen das Quecksilber die höchste Stelle in der Röhre einnimmt, worauf dann das Wasser und zu unterst die noch in der Röhre enthaltene Luft folgt.

Füllt man aber die Röhren mit Wasser und setzt außerdem ein paar Kugeln ein, welche leichter sind als Wasser, also im Ruhezustande die äußersten höchsten Stellen der Röhren einnehmen, so werden dieselben während der Rotation durch die stärkere Fliehkraft des Wassers verdrängt und gegen die Achse geschoben.

Das Aufsteigen von Flüssigkeiten unter dem Einflusse der Schwungkraft läßt sich auch sehr nett mit dem Apparate Fig. 135 zeigen. Er besteht aus einem möglichst großen Petroleumlampenglas, welches mit einer zum Auf-

schrauben auf die Schwungmaschine dienenden Fassung versehen ist. Die in das Gefäß gegossene Flüssigkeit, welche im Ruhezustande den Boden bedeckt, steigt bei hinlänglich rascher Rotation in den Bauch des Gefäßes, um hier einen Ring zu bilden, welcher nach innen mit einer vertikalen Zylinderfläche begrenzt ist. Enthält das Gefäß Quecksilber und gefärbtes Wasser,

Fig. 135.

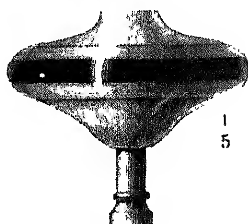


Fig. 136.

so bildet das Quecksilber einen die weiteste Stelle des Gefäßes einnehmenden silberglänznedon Ring, welcher oben und unten von dem dunkleren Wasserringe eingefaßt erscheint. Setzt man auf die Schwungmaschine ein zylindrisches, zum Teil mit Wasser gefülltes Gefäß, so steigt beim Rotieren das Wasser an den Wänden in die Höhe und wird dann vom Rande in tangentialer Richtung weggeschleudert.

Der in Fig. 136 abgebildete Apparat dient, um zu erläutern, wie die Abplattung der Erde eine Folge ihrer Achsendrehung ist.

An dem unteren Ende der eisernen Achse x, welche auf die Schwungmaschine aufgesetzt wird, sind mehrere elastische Streifen von Messingblech mittels Scharnieren befestigt. Oben laufen diese elastischen Streifen wieder in einer leicht auf der Achse x verschiebbaren Hülse h zusammen. Im Zustande der Ruhe strecken sich die Federn so, daß die Hülse h an dem Knopf k ansteht; sobald aber der Apparat rasch um die Achse x rotiert, nehmen die Metallstreifen die in unserer Figur angedeutete Gestalt an, indem alle Teilchen derselben sich möglichst weit von der Rotationsachse zu entfernen streben. Je schneller die Umdrehung, desto mehr werden die Streifen gekrümmt, desto tiefer wird also die Hülse h herabgezogen.

Nach **Weinhold** läßt sich die Abplattung recht schön an einer Kugel aus weichem Ton von etwa 19 cm Durchmesser (etwa 4,2 kg Gewicht) zeigen, welche man in der durch Fig. 137 ersichtlichen Weise mittels zweier Hanfschlingen an die Achse der Schwungmaschine anhängt. Die Abplattung kann bis zu etwa $^4/_5$ des Äquatordurchmessers getrieben werden, bei rascherem Drehen zerreißt die Tonkugel.

Anwendungen der Fliehkraft. Eine der ältesten Anwendungen der Fliehkraft dürfte die **Schleuder** (Fig. 138) sein. Sie besteht aus einem Stück Leder, an dem starke Schnure von $^1/_2$ bis 1 m Länge befestigt sind. Das Ende der einen Schnur wird fest um die Finger gewickelt, das andere Ende mit dem Daumen festgehalten. Der auf das Leder gelegte Stein wird im Kreise geschwungen und im richtigen Moment frei gelassen, indem

man das eine Schnurende losläßt. Die Treffsicherheit dieser Vorrichtung ist gering und nur durch viele Übung zu erreichen. Hat die Schleuder eine

Fig. 137.

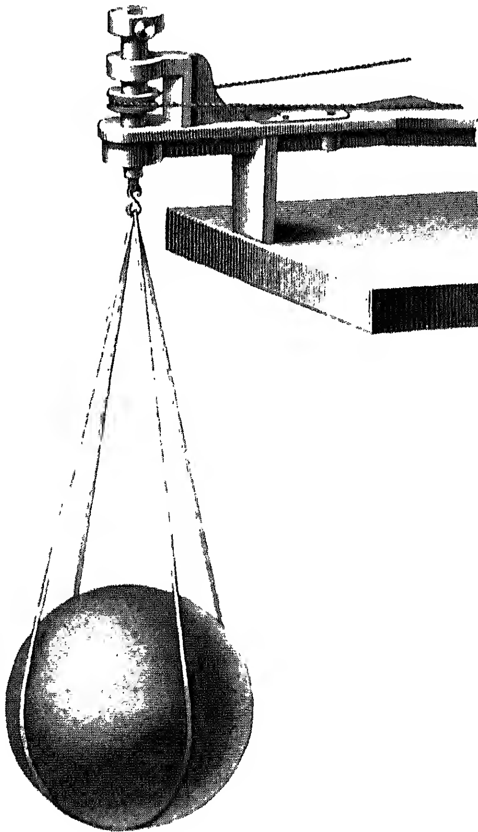
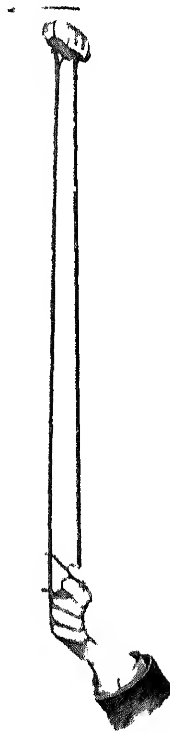


Fig. 138.



Länge von 0,6 m, der Stein eine Gewicht von 0,5 kg und wird derselbe fünfmal pro Sekunde im Kreise geschwungen, so berechnet sich die Fliehkraft nach der Formel (1′):

$$F' = \frac{4\,\pi^2\, r\, m}{g\,.\,T^2} = 4{,}024\, \frac{0{,}6\,.\,0{,}5}{(0{,}2)^2} = 30\ \text{kg},$$

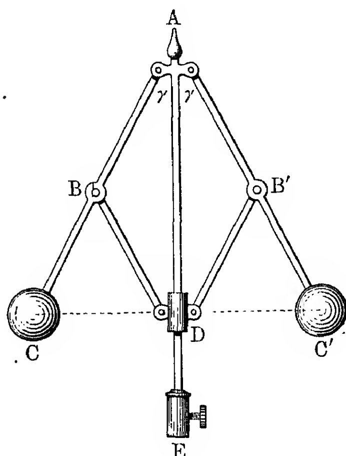
die Anfangsgeschwindigkeit des geschleuderten Steines:

$$v = \frac{2\,\pi\, r}{T} = 3{,}14\,.\,1{,}2\,.\,5 = 18{,}84\ \text{m pro Sekunde.}$$

Eine wichtige Anwendung der Fliehkraft ist das **Zentrifugalpendel.** Dasselbe besteht, wie Fig. 139 zeigt, aus einem vertikalen Stabe AE, an welchem oben bei A zwei Stäbe mit Scharnieren eingelenkt sind, die unten zwei massive Kugeln C und C' tragen. Bei B und B' sind die Stäbe wiederum mittels Gelenken mit den Stäben BD und $B'D$ verbunden, welche letztere zu einer Hülse D führen, an welcher sie mit Scharnieren befestigt sind. Setzt man den Stab AE auf das Ende einer vertikal rotierenden Achse, z. B. der Schwungmaschine, so beobachtet man, wie die Kugeln, durch

die Fliehkraft nach außen getrieben, in die Höhe steigen und dadurch die Hülse D am Stabe AE emporheben, und zwar um so höher, je größer die Rotationsgeschwindigkeit ist. Diese Bewegung der Hülse läßt sich durch Übersetzungsmechanismen benutzen, um z. B. bei der Dampfmaschine den Dampfzufluß zu regulieren, wie später gezeigt werden soll.

Fig. 139.



Bezeichnen wir die Massen der Kugeln mit m und m, die Umlaufszeit mit T, den erreichten horizontalen Abstand der Kugelmitten von der Achse mit r, den Abstand von der Kugelmitte bis zum Scharnier bei A mit l, den Winkel zwischen AC und AE mit γ, so läßt sich der letztere auf folgende Weise berechnen. Offenbar bewegen sich die Kugeln so weit nach außen, bis die Resultierende zwischen der horizontal wirkenden Fliehkraft und der vertikal nach abwärts wirkenden Schwerkraft in die Richtung der Stange AC zu liegen kommt. Es ist dann, indem wir beide Kräfte in absolutem Maße messen:

$$tang\,\gamma = \frac{\text{Fliehkraft}}{\text{Schwerkraft}} = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} : mg = \frac{4\pi^2}{g}\frac{r}{T^2} = \frac{4\pi^2}{g}\frac{l\,.\sin\gamma}{T^2},$$

woraus

$$\frac{\sin\gamma}{tang\,\gamma} = \cos\gamma = \frac{g\,T^2}{4\pi^2 l} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Offenbar nimmt γ erst dann einen von Null verschiedenen Wert an, d. h. die Kugeln beginnen erst dann zu steigen, wenn $\frac{g\,T^2}{4\pi^2 l} < 1$, also $T < 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ geworden ist, d. h. wenn die Umlaufszeit kürzer geworden ist als die Dauer einer Doppelschwingung des Pendels.

Bei der Bewegung der Eilzüge auf Bahnkurven bewirkt die Fliehkraft einen Druck gegen die Außenseite der Kurve, welcher sich mit der Schwerkraft zu einer Resultierenden vereinigt. Um zu erreichen, daß diese durch die Mitte der Schienen verläuft, muß das äußere Geleise entsprechend erhöht werden. Ebenso erhöht man die Rennbahn für Radfahrer gegen die Außenseite, und zwar um so mehr, je stärker die Krümmung ist.

Der Zirkusreiter muß aus demselben Grunde sich und das Pferd nach innen neigen, damit die Resultierende aus Fliehkraft und Schwerkraft durch die Füße gerichtet ist, da er sonst nach außen geschleudert würde. Mit Erfolg hat man in neuerer Zeit die Schwungkraft in der Industrie benutzt, z. B. in Zuckerfabriken, um den Zucker vom Sirup zu reinigen, in Färbereien, um Garne und Zeuge schnell zu trocknen usw.

Babo hat die Schwungkraft auch bei chemischen Arbeiten in Anwendung gebracht, namentlich um Kristalle von sirupartiger schmieriger Mutterlauge zu trennen und um das Absetzen von Niederschlägen zu beschleunigen,

elche unter den gewöhnlichen Umständen sehr lange suspendiert bleiben. Venn nämlich die beschleunigende Kraft, mit welcher sich die geschwungene 'lüssigkeitsmasse von der Rotationsachse zu entfernen strebt, n mal so groß t als die beschleunigende Kraft der Schwere, so ist auch die Differenz wischen der Zentrifugalkraft der Wasserpartikelchen und der Zentrifugal- aft der suspendierten Teilchen n mal so groß als die Differenz der spezi- schen Gewichte des Wassers und des suspendierten Korpers, es muß also uch eine rasche Ausscheidung erfolgen, wenn der Wert von n groß genug ist.

§ 52. Die ungleichmäßig veränderliche Bewegung; Bewegung in- olge einer Kraft, die sich proportional der Zeit ändert. Bei den bisher etrachteten Bewegungsarten war entweder die Geschwindigkeit konstant gleichförmige Bewegung) oder die Beschleunigung konstant (gleichformig eränderliche Bewegung). Wenn weder das eine noch das andere der Fall t, so ist die Bewegung eine ungleichmäßig veränderliche. Bei dieser ewegung kann nur mehr von einer „momentanen Beschleunigung" die Rede in, deren Definition in analoger Weise durchzuführen ist wie die Definition er momentanen Geschwindigkeit bei der gleichmäßig veränderlichen Be- egung. Wir verstehen demnach unter momentaner Beschleunigung jenen renzwert, dem wir uns nähern, wenn wir in dem Verhältnis zwischen eschwindigkeitszunahme und Zeitdauer diese beiden Größen immer mehr erkleinern. Man drückt dies wohl auch so aus, daß man sagt, die momen- ne Beschleunigung sei das Verhältnis einer unendlich kleinen Geschwindig- eitszunahme zur zugehörigen unendlich kleinen Zeitdauer [1]. Am klarsten ird die Vorstellung der momentanen Beschleunigung aber folgendermaßen ewonnen. Man denke sich das Bewegliche von jenem Zeitmoment an, für elches die momentane Beschleunigung gesucht wird, mit gleichmäßig ver- derlicher Bewegung, also ohne weitere Änderung der Beschleunigung, eine kunde lang fortschreiten. Die in dieser Zeit eingetretene Änderung der eschwindigkeit ist dann die gesuchte Beschleunigung.

Der einfachste Fall der ungleichmäßig beschleunigten Bewegung ist fenbar jener, bei welchem die Beschleunigung in gleichen Zeiten um gleiche rößen zunimmt.

Wir haben nun zu zeigen, wie man bei einer solchen Bewegung die irgend einer Zeit erreichten Entfernungen, sowie die in irgend einer Zeit langten momentanen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnen ann.

Wir wollen dabei, um alle Einzelfälle umfassende Ausdrücke zu erhalten, raussetzen, daß das Bewegliche im Zeitmoment $= 0$, wo wir die Sekunden zählen anfangen, bereits eine Entfernung vom Nullpunkte der Bahn, eine nfangsgeschwindigkeit und eine Beschleunigung besitze.

Es bedeute also:

---

[1]) In der analytischen Mechanik wird dieses Verhältnis mit $g = \frac{dv}{dt}$ bezeichnet. a nach Anmerkung S. 103 $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so ist $g = \frac{d\frac{ds}{dt}}{dt}$, wofür $\frac{d^2s}{dt^2}$ gesetzt rden kann. [illegible]

ψ die Zunahme der Beschleunigung pro Sekunde,
φ „ momentane Beschleunigung zur Zeit t,
φ_0 „ „ „ „ „ 0 (Anfangsbeschleunigung),
v „ „ Geschwindigkeit „ „ t,
v_0 „ „ „ „ „ 0 (Anfangsgeschwindigkeit),
s „ Entfernung des Beweglichen vom Nullpunkte der Bahn zur Zeit t,
s_0 „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 0 (Anfangsstellung).

Wir behaupten nun, daß dann die Werte von s, v und φ gegeben seien durch die Gleichungen:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0 t^2}{2} + \frac{\psi t^3}{6} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$v = v_0 + \varphi_0 t + \frac{\psi t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \psi t \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dabei können die vorkommenden Größen auch gleich Null oder negativ sein. Ein negatives t würde bedeuten t Sekunden vor dem Zeitmoment, von dem an die Sekunden gezählt wurden. Ein negatives s oder s_0 bedeutet eine Entfernung vom Nullpunkte der Bahn nach rückwärts (z. B. nach links, wenn die positiven Entfernungen nach rechts gerechnet werden). Ein negatives v bedeutet Geschwindigkeit nach links (ein positives v Geschwindigkeit nach rechts). Ein negatives φ bedeutet Beschleunigung nach links (also entweder Zunahme der Geschwindigkeit nach links oder Abnahme jener nach rechts). Endlich ein negatives ψ eine Abnahme einer positiven Beschleunigung (oder Zunahme einer negativen).

Den Beweis für obige Formeln können wir auf elementarem Wege[1]) etwa folgendermaßen führen. Sind t und t' zwei aufeinander folgende Zeitmomente, so sind nach (1) die zugehörigen Entfernungen s und s':

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0}{2} t^2 + \frac{\psi}{6} t^3$$

$$s' = s_0 + v_0 t' + \frac{\varphi_0}{2} t'^2 + \frac{\psi}{6} t'^3,$$

woraus der zurückgelegte Weg durch Subtraktion gefunden wird:

$$s' - s = v_0 (t' - t) + \frac{\varphi_0}{2} (t'^2 - t^2) + \frac{\psi}{6} (t'^3 - t^3).$$

Da dieser Weg in der Zeit $t' - t$ zurückgelegt wird, so ist deren Verhältnis:

$$\frac{s' - s}{t' - t} = v_0 + \frac{\varphi_0}{2} (t' + t) + \frac{\psi}{6} (t'^2 + t' t + t^2).$$

Dieses Verhältnis geht über in den Wert der momentanen Geschwindigkeit v zur Zeit t, wenn wir t' immer näher dem t setzen, für den Grenzwert $t' = t$ wird also:

---

[1]) In der Analytik erhält man aus dem Ausdruck für s den für v durch einmaliges, den für φ durch zweimaliges Differenzieren. Die Berechnung des v und s aus ψ und den Anfangswerten φ_0, v_0 und s_0 geschieht durch Integrieren.

$$v = v_0 + \varphi_0 t + \frac{\psi}{2} t^2.$$

Damit ist also bereits erwiesen, daß, wenn für die momentane Geschwindigkeit v die Gleichung (2) gilt, dann für die Entfernung s die Gleichung (1) gelten muß, da wir von dieser auf jene geführt wurden.

Für einen Zeitpunkt t' ist die zugehörige momentane Geschwindigkeit v' gegeben durch

$$v' = v_0 + \varphi_0 t' + \frac{\psi}{2} t'^2.$$

Demnach ist die Zunahme der momentanen Geschwindigkeit gleich:

$$v' - v = \varphi_0 (t' - t) + \frac{\psi}{2} (t'^2 - t^2).$$

Dividieren wir diese Zunahme der Geschwindigkeit durch die Zunahme der Zeit $t' - t$, in welcher sie stattgefunden hat, so bekommen wir:

$$\frac{v' - v}{t' - t} = \varphi_0 + \frac{\psi}{2} (t' + t).$$

Dieser Ausdruck geht über in den Wert für die momentane Beschleunigung φ für die Zeit t, wenn wir t' immer näher an t nehmen, bis es zuletzt $= t$ geworden ist. Dann ist also:

$$\varphi = \varphi_0 + \psi t.$$

Wir erhalten also aus Gleichung (2) die Gleichung (1). Diese letztere folgt aber unmittelbar aus der Definition von ψ. Ist nämlich ψ die Zunahme der Beschleunigung pro Sekunde, so ist ψt die Zunahme in t Sekunden, und diese, addiert zum Anfangswert φ_0, muß den Wert der Beschleunigung zur Zeit t geben.

Die Gleichungen (1), (2) und (3) enthalten die Gleichungen für die gleichförmige und für die gleichmäßig veränderte Bewegung als spezielle Fälle in sich. Man erhält die letztere, indem man $\psi = 0$ setzt, die erstere, indem man auch $\varphi_0 = 0$ setzt. Nimmt man $s_0 = 0$, so beginnt die Bewegung zur Zeit 0 im Anfangspunkte der Bahn, setzt man $v_0 = 0$, so beginnt die Bewegung von der Ruhe aus, also ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Eine ungleichmäßig veränderliche Bewegung entsteht durch eine veränderliche Kraft. Soll die Beschleunigung in gleichen Zeiten um Gleiches wachsen oder abnehmen, so muß die Kraft ebenfalls proportional der Zeit, d. i. gleichmäßig veränderlich sein.

Wollten wir einen Vorlesungsversuch anstellen, der dieser Bedingung entspricht, so könnten wir hierzu die Atwoodsche Fallmaschine anwenden, wenn wir das treibende Übergewichtchen durch ein kleines Gefäß ersetzen, aus dem das eingefüllte Wasser während der Bewegung in regelmäßiger Weise ausfließt. Ein solcher Versuch wurde in der vorigen Auflage S. 174 bis 180 beschrieben.

§ 53. Bewegung infolge einer Kraft, welche sich proportional dem Wege verändert; schwingende oder harmonische Bewegungen. Eine besonders wichtige Art der ungleichmäßig veränderlichen Bewegung ist jene, welche zustande kommt durch eine Kraft, deren Stärke an jedem Punkte der Bahn proportional der erlangten Entfernung von einem als

Ruhepunkt bezeichneten Punkte ist. In letzterem Punkte selbst ist keine Kraft vorhanden.

Eine solche Bewegung kann auf mehrfache Weise hervorgebracht werden. Es dürfte für das Verständnis vorteilhaft sein, wenn wir auch diese Bewegung zuerst an der Atwoodschen Fallmaschine demonstrieren, da hierdurch ihr Verhältnis zu den früheren in klares Licht gesetzt wird.

Zu den gewöhnlichen Fallversuchen, also zur Hervorbringung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, gibt man dem Übergewicht eine konstante Größe. Zur Erzeugung der im vorigen Paragraphen beschriebenen Bewegung hätten wir ein Übergewicht anzuwenden, welches proportional mit der Zeit sich änderte.

Diesmal soll das Übergewicht proportional dem zurückgelegten Wege sich ändern. Wir erreichen dies am einfachsten durch die in Fig. 140 angedeutete Anordnung. Über die Rolle R ist ein Faden gelegt, der an beiden Enden gestielte Gewichtchen (Schälchen) p, p' trägt. Auf der einen Seite ist dann überdies unter dem Gewichtchen noch ein feines Metallkettchen $a\,a'$ angehängt, welches bei den später zu erwähnenden Versuchen eine Länge von 100 cm und ein Gewicht von 17,2 g besitzen mag. Beim Teilstrich 100 sind zwei Tischchen d, d' angesetzt. Die Masse von p' ist so reguliert, daß durch dieselbe das Gegengewicht p und die Hälfte des Kettchens im Gleichgewicht gehalten wird. Es bildet demnach die untere Hälfte des Kettchens ein Übergewicht von 8,6 g, durch welches eine Anfangsbeschleunigung hervorgebracht wird, welcher man durch passende Wahl der Gesamtmasse einen beliebigen Wert geben kann. In dem Maße aber, wie die Kette sinkt, lagert sich ein immer größerer Teil derselben auf dem Tischchen a' ab, welcher nicht mehr als Übergewicht wirkt. Ist die Mitte des Kettchens am Tischchen angelangt, so ist die Beschleunigung $= 0$ geworden und erlangt von da an, da infolge der Trägheit die Bewegung fortgesetzt wird, einen negativen Wert, der bis zur früheren Höhe des positiven Anfangswertes ansteigt, während der Rest des Kettchens abgelagert wird. Wenn keine Reibung und kein Stoß stattfände, würde sich von da an das Kettchen, immerfort schwingend, auf und ab bewegen, indem seine Mitte gleich weit nach oben und nach unten über den Punkt 50 hinausginge. Infolge der Reibung und Stöße nehmen aber die Wege bald ab, und das Kettchen kommt zur Ruhe, indem sich seine Mitte gegenüber dem Punkt 50 einstellt.

Fig. 140.

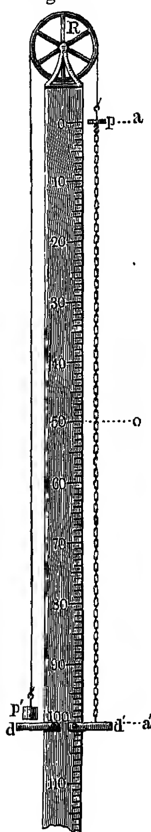
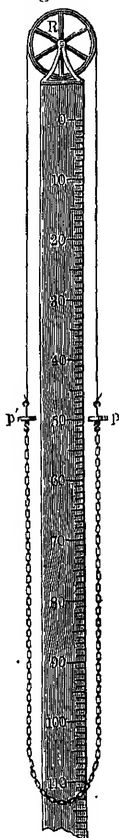


Fig. 141.



Bei dieser Versuchsanordnung ist der Einwurf zu erheben, daß die Gesamtmasse während der Bewegung sich (um die Masse des Kettchens) verändert; man muß also jedenfalls die Masse des Kettchens klein gegen die Gesamtmasse wählen. Eine andere Art, den Versuch anzustellen, ist in Fig. 141 angedeutet. Die Rolle R wird auf einen Vorsprung gestellt, so daß die über dieselbe gelegten Fadenenden nicht neben der Säule, sondern vor derselben herabhängen. Die Fadenenden tragen gestielte Gewichtchen p, p' und darunter eine Metallkette, welche mit beiden Enden an die Gewichtchen befestigt ist. Hebt man das Gewichtchen p um n cm, so sinkt gleichzeitig das Gewichtchen p' um n cm, folglich kommt auf die erstere Seite ein Übergewicht gleich dem Gewichte von $2n$ cm des Kettchens. Dieses Übergewicht, also auch die dadurch erzeugte Beschleunigung wächst proportional mit der zurückgelegten Wegstrecke, da die Gesamtmasse konstant bleibt.

Legt man auf die Gewichtsstücke p und p' gleich große Zulagegewichte, so kann man hierdurch die Gesamtmasse vergrößern, ohne daß zugleich die beschleunigende Kraft vergrößert wird; folglich ist es auf diesem Wege möglich, der Beschleunigung bei gleicher Entfernung von der Ruhelage einen beliebigen Wert zu erteilen. Denselben Zweck erreichen wir durch Ersetzung des Kettchens durch ein solches von geringerem Gewichte.

Mit einem der beiden Apparate überzeugen wir uns zunächst, daß die Bewegung des aus dem Gleichgewicht gebrachten Kettchens eine **periodische** ist, d. h., daß die gleichen Bewegungen in gleichen Zeitintervallen wiederkehren. Wären keine Reibung und sonstige Hindernisse vorhanden, so würde dies genau der Fall sein. Den größten Abstand des Beweglichen von seiner Ruhelage nach oben oder unten nennen wir die **Amplitude** oder die **Schwingungsweite**. Die Zeit, welche verstreicht von einer äußersten Lage bis zur anderen, also die Zeit zwischen zwei Umkehrungen oder zwischen zwei Durchgängen durch die Ruhelage, nennen wir **Schwingungsdauer**, die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde die **Schwingungszahl**, irgend eine momentane Entfernung des Beweglichen von der Ruhelage seine **Elongation**. Zeitmomente gleichen Bewegungszustandes nennt man **gleiche Phasen**. **Phasendifferenz** nennt man den Bruchteil der Schwingungsdauer, welcher zwischen zwei momentanen Lagen des Beweglichen verfließt.

Durch eine **erste Versuchsreihe** entdecken wir die auf den ersten Blick überraschende Tatsache, daß die **Schwingungsdauer unabhängig ist von der Schwingungsweite**. Haben wir es z. B. durch geeignete Wahl der gleichen Gewichte p und p' dahin gebracht, daß das um 10 cm gehobene Gewicht p gerade binnen einer Sekunde bis 10 cm unter die Ruhelage, also in Fig. 140 oder 141 von 40 bis 60, sich bewegt, so wird es in derselben Zeit auch von 30 bis 70, von 20 bis 80 usw. sich bewegen.

Da die Kraft, also auch die Beschleunigung, proportional mit der Entfernung von der Ruhelage (der Elongation) sich ändert, so entspricht einer $n$fachen Amplitude der Schwingungen auch eine $n$fache Anfangsbeschleunigung. Folglich ergeben die Versuche, daß sich die Schwingungsdauer nicht ändert, wenn das Verhältnis zwischen Amplitude und Anfangsbeschleunigung unverändert bleibt.

Durch eine **zweite Versuchsreihe** ermitteln wir den Einfluß der verschieden großen Anfangsbeschleunigung bei **gleich großer Amplitude**. Hat

in der ersten Versuchsreihe die Masse des Kettchens $\frac{1}{n}$ der Gesamtm betragen, so belasten wir jetzt die Schälchen p und p' so, daß die M des Kettchens nur mehr $\frac{1}{4n}$ der Gesamtmasse beträgt, oder wir nehmen diesem Verhältnis entsprechend leichteres Kettchen. Die Anfangsbeschle gung muß dann ein Viertel der früheren betragen. Der Versuch zeigt daß dann die Schwingungsdauer das Doppelte der früheren beträgt. Si also der Quadratwurzel aus der Beschleunigung bei gleicher Amplit verkehrt proportional.

Würde man dann die Amplitude auf das Vierfache vergrößern, so w sich die Anfangsbeschleunigung auch auf das Vierfache, also bis zum frühe Werte vergrößern und dennoch die Schwingungsdauer unverändert, gleich dem doppelten der früheren bleiben. Daraus folgt, daß bei glei Anfangsbeschleunigung die Schwingungsdauer dem Quadrate der Amplit proportional sein müsse.

Bezeichnen wir die Schwingungsdauer (Schwingungszeit) und zun mit T, die Anfangsbeschleunigung mit q_0, die Amplitude mit a, so kön wir die bisher gefundenen Resultate dahin zusammenfassen, daß T proportio dem Ausdrucke $\sqrt{\frac{a}{q_0}}$ sei, daß also die Formel für T die Form haben mu

$$T = k\sqrt{\frac{a}{q_0}}$$

worin k einen konstanten Koeffizienten bezeichnet.

Um den Zahlenwert dieses Koeffizienten auszumitteln, haben wir du einen quantitativen Versuch zusammengehörige Werte von T und $\frac{a}{q_0}$ bestimmen.

Bei einem derartigen nach Fig. 140 angeordneten Versuche waren folge Daten erhalten worden:

Masse des Rades[1]	94 g
Masse der beiden Schälchen samt aufgesetzten gleichen Gewichtsstücken . . .	131 „
Masse des halben Kettchens	8,6 „
Masse des gleich großen Gegengewichtes auf dem anderen Schälchen	8,6 „
Gesamtmasse[2]	242,2 g

[1] Unter der „Masse des Rades" ist hier nur die in Betracht kommende Ma (das sogenannte Trägheitsmoment) verstanden. Siehe . . . Man ka statt obiger Berechnung dieser Gesamtmasse dieselbe auch durch einen Hilfsv such ausmitteln, indem man statt des Kettchens eine bekannte . . . Masse auf Schälchen gibt und ein bekanntes Übergewicht auflegt.

[2] Die Gesamtmasse ist in Wirklichkeit bei diesem Versuche . . . ändlich, da bald mehr, bald weniger als die Hälfte des Kettchens dazu gehö obiges ist der Mittelwert.

Anzahl der Sekunden für zwei Auf- und Niedergänge = 15

Daraus sich ergebende Schwingungsdauer $T = \frac{15}{2} = 7{,}5''$

Länge des halben Kettchens . . . . 50 cm

Daraus folgt Masse des Kettchens pro Centimeter Länge

$= \frac{8{,}6}{50}$ . . . . 0,172 g

Die Anfangsbeschleunigung bei 1 cm Amplitude berechnet sich daraus zu

$$\varphi_0 = 0{,}172 \frac{980{,}8}{242{,}2} = 0{,}6965.$$

Daraus ergibt sich dann der Wert der Konstanten:

$$k = \frac{T}{\sqrt{\frac{1}{\varphi_0}}} = T\sqrt{\varphi_0} = 7{,}5\sqrt{0{,}6965} = 7{,}5\,.\,0{,}834 = 6{,}254.$$

Dieser Wert von k ist nahe gleich dem Werte der verdoppelten Ludolph-hen Zahl $2\pi = 6{,}28318$, was kein Zufall ist, da, wie wir unten zeigen erden, wirklich der Wert von 2π herauskommen sollte. Indem wir dieses esultat antizipieren, erhalten wir als Ergebnis unserer Versuche für die chwingungsdauer die Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\varphi_0}}.$$

Bezeichnen wir die Dauer einer einfachen Schwingung hin oder zurück it $t = \frac{T}{2}$, so kommt

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{\varphi_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Eine weitere Versuchsreihe gilt der Untersuchung der Geschwindig-eit, mit welcher die Ruhelage passiert wird. Hierzu eignet sich ebenfalls die nordnung Fig. 140. Die Ruhelage entspricht daselbst jener Stellung des ewichtchens p, wo es gegenüber dem Skalenpunkte 50 anlangt und die älfte des Kettchens abgelagert ist. Offenbar ist es für die erste Hälfte der ewegung ganz gleichgültig, wenn man die obere Hälfte des Kettchens durch nen Faden von verschwindendem Gewicht ersetzt und dafür dem Gewichte p ensoviel zusetzt, als die Hälfte des Kettchens wiegt. Dafür entfällt dann n dem Moment an, wo die Ruhelage passiert wird, jedes weitere Über-wicht, also jede Beschleunigung: die Bewegung wird also von da an eine eichförmige und folglich die Geschwindigkeit eine konstante, also meßbare. m die Messung auszuführen, reguliert man die Schwingungsdauer auf eine rade Anzahl von Sekunden, so daß das Gewichtchen p mit einem Sekunden-hlage losgelassen, auch mit einem Sekundenschlage die Ruhelage passiert. an stellt dann ein Tischchen mit durchbrochener Platte so weit unterhalb r Ruhelage auf, daß das Gewicht p mit dem darauf folgenden Sekunden-hlage auffällt, nachdem Kettchen und Faden ungehindert passiert sind. er Abstand zwischen Ruhelage und Tischchen ist dann gleich der momen-nen Geschwindigkeit, welche der schwingenden Bewegung zukommt in dem oment, wo die Ruhelage passiert wird. Es erhellt sofort, daß man auf

ähnliche Weise die momentane Geschwindigkeit auch an anderen Punk der Bahn ermitteln kann.

Das Resultat einer solchen Untersuchung, deren Ausführung wohl a Zahlenbeispiel verständlich sein dürfte, würde sein, daß die Geschwindigkei der Quadratwurzel aus dem Produkt von Amplitude und Anfan beschleunigung gleich ist. Also:

$$v = \sqrt{a q_0}$$

Ändert man daher an dem Apparate nichts, vergrößert aber die Amplit beispielsweise auf das Doppelte, so wird zugleich die Anfangsbeschleunig verdoppelt, das Produkt aus beiden also vervierfacht. Die Geschwindig mit der die Ruhelage passiert wird, ist dann die doppelte. Sie wird eben die doppelte, wenn man bei gleicher Amplitude durch Änderung der Ma die Beschleunigung allein vervierfacht.

§ 54. Theoretische Ableitung der Gesetze der schwingen Bewegung. Die im vorigen Paragraphen experimentell aufgefund Gesetze der schwingenden Bewegung lassen sich auf theoretischem Wege leiten. Es gelingt dies auf einfache Weise, wenn man sich der Hilfsm der höheren Mathematik bedienen darf. Auf elementarem Wege kom wir zu diesem Ziele am schnellsten, wenn wir von der in § [illegible] abgehande kreisförmigen Zentralbewegung ausgehen. Es wurde dortselbst gezeigt, eine kreisförmige Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit ents wenn auf einen materiellen Punkt von der Masse *m*, der in der Richt der Tangente eines Kreises eine Geschwindigkeit *u* besitzt, eine beschle gende Kraft *K* einwirkt, welche gegen das Zentrum des Kreises gerichte und die Größe $K = \frac{u^2 m}{r}$ besitzt [siehe Formel (25)]. Die Beschleunig dieser Kraft ist also $q = \frac{u^2}{r}$ oder, wenn man statt der Geschwindigke die Umlaufszeit einführt, mit Rücksicht auf $u = \frac{2 r \pi}{t}$

$$q = \frac{4 \pi^2 r}{t^2}$$

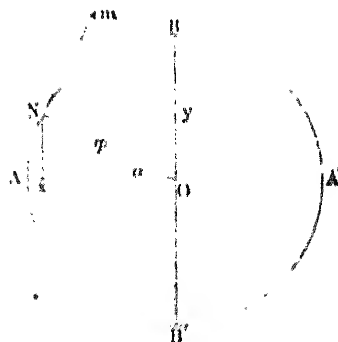
Es stelle nun in **Fig. 142** der Kreis $ABA'B'$ die Bahn dieser Zen bewegung vor. Der bewegte Punkt befinde sich momentan in N. Die N nach dem Mittelpunkte O gerichtete Beschleunigung werde der Größe durch den Radius NO selbst vorgestellt. Wir denken uns nun dieselbe legt nach den zwei Richtungen parallel zu AA' und parallel zu BB'. Komponenten werden die Größen xO und yO haben.

Fassen wir diese Komponenten getrennt ins Auge, so erkennen wir daß jede derselben eine Beschleunigung vorstellt, welche in jedem Au blicke ihre Größe ändert; und zwar ist die Größe der zu AA' paral Beschleunigung in jedem Augenblicke proportional dem momentanen Abst des Punktes N von der Geraden BB'. Ebenso ist die zu BB' par Beschleunigung in jedem Augenblicke proportional dem jeweiligen Abst von der Geraden AA'. Daraus folgt, daß sich die **kreisförmige Zent bewegung auffassen läßt als die Resultierende zweier sch gender Bewegungen, welche senkrecht aufeinander nach Richtungen AA' und BB' stattfinden,** welche beide die gleich

Amplitude = dem Radius r des Kreises und die gleiche (einfache) Schwingungsdauer t besitzen. Die letztere ist gleich der Hälfte der Umlaufszeit T der kreisförmigen Bewegung.

Um diesen Sachverhalt recht deutlich zu übersehen, denke man sich gleichzeitig von dem Punkte A aus zwei materielle Punkte ausgehen. Der eine N bewege sich innerhalb der Zeit t mit gleichförmiger Geschwindigkeit u längs der Kreisperipherie von A über B nach A' und dann wieder in der Zeit t über B' nach A zurück. Der andere Punkt n bewege sich von A in der Zeit t durch den Durchmesser AA' nach A', und zwar mit einer Beschleunigung, welche in jedem Punkte durch den jeweiligen Abstand $On = Ox$ gegeben ist. Von A' kehre dieser Punkt wieder in der Zeit t nach A zurück. Es werden dann stets die beweglichen Punkte N und n sich senkrecht übereinander befinden, so daß also n immer als die Projektion von N auf den Durchmesser AA' erscheint. Wir können daher auch kurz sagen: Die schwingende Bewegung von A nach A' und zurück verläuft genau so wie die Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung von A über B, A', B' nach A, vorausgesetzt, daß beide gleiche Dauer haben.

Fig. 142.



Für diese Dauer T folgt aus (1) der Wert:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} \quad \text{. . . . . (2)}$$

folglich für das halb so große t (entsprechend einem Hin- oder Hergange)

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} \quad \text{. . . . . (3)}$$

welche Formel für die Schwingungsdauer mit jener übereinstimmt, welche wir im vorigen Paragraphen experimentell aufgefunden haben, da der Radius r identisch ist mit der Amplitude a und die Beschleunigung φ identisch mit der Anfangsbeschleunigung φ_a in dem Punkte A.

Man erkennt ferner sofort, daß die Geschwindigkeit, mit welcher der schwingende Punkt n die Mitte bei O passiert, gleich sein müsse der Geschwindigkeit, mit welcher der im Kreise bewegte Punkt N die Stelle bei B passiert, also überhaupt gleich der peripherischen Geschwindigkeit u. Aus $\varphi = \frac{u^2}{r}$ folgt nun

$$u = \sqrt{\varphi r} \quad \text{. . . . . (4)}$$

d. h. der schwingende Punkt geht durch die Ruhelage mit einer Geschwindigkeit, welche der Quadratwurzel aus dem Produkt von Anfangsbeschleunigung und Amplitude gleich ist. Auch diesen Satz haben wir bereits im vorigen Paragraphen als Ergebnis der Versuche bezeichnet.

Zur vollständigen Charakterisierung einer Bewegung gehört eine Formel für den Weg oder genauer für die in einer beliebigen Zeit erreichte Entfernung von dem Nullpunkte der Bahn.

Wir wählen, da es bequemer ist, nicht A, sondern O zum Nullpunkte der Bahn und rechnen die erlangten Entfernungen nach rechts positiv, nach links negativ; dann ist:

$$s = Ox = -r \cos NOx.$$

Bezeichnen wir die Zeit, welche verflossen ist von dem Moment an, wo die schwingende Bewegung in A ausgegangen, bis zu dem Moment, wo sie in x angekommen ist, mit ϑ, so haben wir zur Bestimmung des Winkels α die Proportion:

$$\vartheta : t = \alpha : 180$$

oder:

$$\alpha = 180 \frac{\vartheta}{t},$$

oder auch

$$\alpha = 360 \frac{\vartheta}{T},$$

wenn T wiederum die Zeitdauer einer Doppelschwingung bedeutet.

Für den Abstand s ergibt sich folglich:

$$\left.\begin{aligned} s &= -r \cos 360 \frac{\vartheta}{T} \\ \text{oder: } \quad s &= -r \cos 2\pi \frac{\vartheta}{T} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nach dieser Gleichung ist also $s = r$ für:

$$\vartheta = {}^1\!/_2\, T,\ \vartheta = {}^3\!/_2\, T,\ \ \vartheta = {}^5\!/_2\, T \text{ usw.};$$

es ist ferner:

$$s = 0$$

für:

$$\vartheta = {}^1\!/_4\, T,\ \vartheta = {}^3\!/_4\, T,\ \vartheta = {}^5\!/_4\, T \text{ usw.};$$

es wird:

$$s = -r$$

für:

$$\vartheta = 0,\ \vartheta = T,\ \vartheta = 2\,T,\ \vartheta = 3\,T \text{ usw.}$$

Berücksichtigt man ferner den Umstand, daß die momentane Geschwindigkeit v der schwingenden Bewegung an jedem Orte die Projektion der gleichzeitigen tangentiellen Geschwindigkeit u der Kreisbewegung ist, so erhält man:

$$v = u \,.\, \cos mNy,$$

also auch, da $\angle\ mNy$ komplementär zu $\angle\ \alpha$ ist:

$$v = u \,.\, \sin \alpha.$$

Zählen wir die positive Geschwindigkeit von links nach rechts, so bleibt v positiv von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 180^0$; es ist also hier kein Zeichenwechsel vorzunehmen, wie es für s nötig war. Setzen wir für α seinen Wert, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} v &= u \sin 360 \frac{\vartheta}{T} \\ v &= u \sin 2\pi \frac{\vartheta}{T} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Geschwindigkeit wird also gleich Null für

$$\vartheta = 0,\ \vartheta = {}^1/_2\, T,\ \vartheta = T,\ \vartheta = {}^3/_2\, T \text{ usw.},$$

also gerade für solche Momente, in welchen s ein Maximum erreicht, während umgekehrt v in solchen Momenten am größten wird, in denen

$$s = 0,$$

nämlich

$$v = u$$

für

$$\vartheta = {}^1/_4\, T,\ \vartheta = {}^5/_4\, T \text{ usw.},$$

und

$$v = -u$$

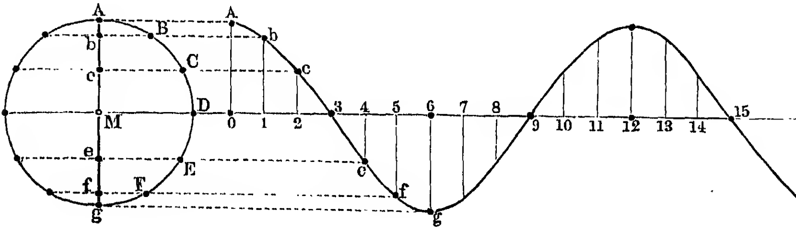
für

$$\vartheta = {}^3/_4\, T,\ \vartheta = {}^7/_4\, T \text{ usw.}$$

Wir wollen nun noch, wie wir es bisher bei allen Bewegungsarten gemacht haben, den Verlauf der schwingenden Bewegung durch eine Kurve darstellen, deren Abszissen die verflossenen Zeiten, deren Ordinaten die erlangten Entfernungen vom Nullpunkte der Bahn vorstellen.

Fig. 143 zeigt die Konstruktion einer solchen Kurve. Die schwingende Bewegung erfolge längs der Geraden Ag um die Ruhelage M. Teilen wir

Fig. 143.



die Peripherie in eine Anzahl, z. B. 12, gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte B, C, D, E, F Senkrechte auf Ag, so werden dadurch die Punkte b, c, d, e, f bestimmt wo der zwischen A und g schwingende Punkt nach $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ usw. seiner, doppelten, Schwingungsdauer T ankommt. Verlängert man nun die Gerade MD und trägt auf derselben von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte 0 an beliebige gleich lange Stücke auf, deren Enden man mit 1, 2, 3, 4 usw. bezeichnet, und errichtet man auf diesen Punkten Ordinaten, welche der Reihe nach den Abständen AM, bM, cM, Null, eM, fM, gM, fM, eM, Null, cM, bM, AM usw. gleich sind, so stellt die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten die Schwingungskurve dar. Wir werden dieser Kurve noch öfter, besonders in der Akustik, begegnen.

§ 55. **Das einfache Pendel.** In § 48 haben wir gezeigt, daß man in der schiefen Ebene ein Mittel hat, eine Bewegung zu erzeugen mit einer Beschleunigung, welche einen beliebigen Bruchteil der Beschleunigung beim freien Fall beträgt. Die Beschleunigung über die schiefe Ebene ist nämlich gleich jener beim freien Fall, multipliziert mit dem Verhältnis der Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Es liegt daher auch wohl der Gedanke nahe, eine ungleichmäßig be-ch nigte Bewegung dadurch hervorzubringen, daß man eine veränderl Beschleunigung durch veränderliche Neigung der Bahn erzeugt. Betrach wir z. B. die Bahn, welche in Fig. 144 dargestellt ist, dieselbe setzt sich vielen kleinen, aber gleich langen Stücken zusammen, dabei ändert sich einem zum anderen die Beschleunigung im Verhältnis der Höhen d schiefen Ebenen. In Fig. 144 ist die Länge aller einzelnen schiefen Ebe konstant = 10 mm, die Höhen aber nehmen von 10 mm an je um 1 mm Ist also die Beschleunigung längs des senkrechten Stückes AB = g, so sie längs BC = $^9/_{10}$ g, längs CD = $^8/_{10}$ g, längs DE = ... usf., längs nur noch $^1/_{10}$ g. Die Beschleunigung ändert sich also proportional zurückgelegten W... wodurch eine Beweg erzeugt werden ... welche nach demsel Gesetze vor sich ... wie die Bewegung e schwingenden Körp... Um dies vollkommen erreichen, müßten ... noch die Änderungen Neigung der Bahn ... sprungweise in k... nuerlicher Weise ... folgen, also die Bahn Figur durch eine K... ersetzt werden, we... ihre Neigung in der ... sprochenen Weise ändert. Eine solche Kurve, welche, wie Huyghens gez... hat, eine Zykloide ist, nähert sich in ihrem unteren Teile sehr einem Kr... bogen und kann daher dort mit großer Annäherung durch einen sol... ersetzt werden. Statt aber den Körper über eine kreisförmig gebogene Un... lage rollen zu lassen, ist es zweckmäßiger, ihn dadurch zur Einhaltung e... kreisförmigen Bahn zu zwingen, daß man ihn mittels eines Fadens an e... festen Punkte aufhängt und um denselben schwingen läßt.

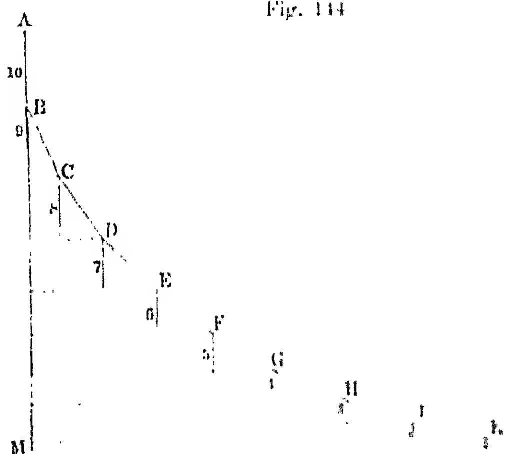


Fig. 144.

Eine solche Vorrichtung, Fig. 145, bestehend aus einem kleinen Kö... (Kugel), welcher an einem dünnen Faden aufgehängt ist, heißt ein einfac... Pendel. Denkt man sich diesen Körper ersetzt durch einen schwe... materiellen Punkt, der an einem Faden ohne Gewicht hängt, so heißt ... diese Anordnung ein mathematisches Pendel. Dasselbe ist natürlich ... herstellbar, sondern existiert nur in der Vorstellung. Die wirklich ausf... baren physischen Pendel sind entweder einfache oder zusammengeset... Wir beschäftigen uns hier zunächst mit den Gesetzen des mathematisc... Pendels, die wir auch als jene des einfachen Pendels gelten lassen dür... später werden wir dann das zusammengesetzte Pendel in Behandlung zie...

Bringt man die Kugel des Pendels aus ihrer Gleichgewichtslage, d... bringt man das Pendel aus seiner vertikalen Stellung, so macht es, wenn ... es losläßt, ohne ihm irgend einen Anstoß zu geben, Schwingungen, we... fortwährend in derselben Vertikalebene bleiben. Bringt man z. B. das Pe...

die Lage FA, so beschreibt die Kugel den Bogen AC; in C kommt sie t solcher Geschwindigkeit an, daß sie auf der anderen Seite bis B steigt, h. zu der Höhe des Punktes A; vom Punkte B geht die Kugel abermals rück, durchläuft in umgekehrter Richtung wieder den Bogen BCA und zt auf dieselbe Weise ihre Schwingungen t. Beim Niedergange des Pendels nimmt ine Geschwindigkeit fortwährend zu, beim Aufeigen nimmt sie ab: in dem Moment also, in lchem das Pendel die Gleichgewichtslage ssiert, hat es seine größte Geschwindigkeit.

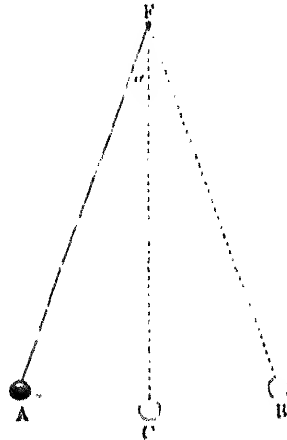


Fig. 115.

Der Winkel $AFC = \alpha$ heißt Ausschlagsinkel oder auch nur Ausschlag.

Als Schwingungsweite oder Amplitude zeichnet man häufig den ganzen Bogen AB; ist aber zweckmäßiger, damit, wie im vorigen ragraphen, die Hälfte der ganzen Bahn, also n Bogen AC zu bezeichnen.

Die Bewegung von A bis B oder von B bis A ißt eine (einfache) Schwingung (Oszillation); n A bis C ist eine halbe niedergehende, von bis B eine halbe aufsteigende Oszillation.

Die Schwingungsdauer oder Oszillationsdauer ist die Zeit, welche s Pendel nötig hat, den ganzen Bogen AB zu durchlaufen.

Nach dem ersten Anblicke sollte man aus den Versuchen schließen, daß e Bewegung eines Pendels immer fortdauern müßte, denn wenn es, von A sgehend, auf der anderen Seite zu einer gleichen Höhe B ansteigt, so muß , von B ausgehend, auch wieder bis A steigen, und es wird so denselben eg zum zweiten, zum dritten Male usw. bis ins Unendliche machen müssen.

Dieser Schluß würde ganz richtig sein, wenn B wirklich absolut gleiche öhe mit A hätte; aber die Reibung am Aufhängepunkte F, der Widerstand r Luft, welche die Kugel vor sich wegtreiben muß, machen es unmöglich, ß dieselbe genau wieder bis zu der Höhe steigt, von welcher sie herabfiel. e Abnahme der Amplituden wird freilich erst nach einer Reihe von hwingungen merklich.

Die von Galilei zuerst aufgestellten Gesetze der Pendelschwingungen nd folgende:

1. Die Schwingungsdauer des Pendels ist unabhängig vom ewicht des schwingenden Körpers und von der Natur seiner ubstanz.

2. Bei kleinen Ausschlägen ist die Schwingungsdauer nahezu nabhängig von der Größe der Amplitude (Isochronismus).

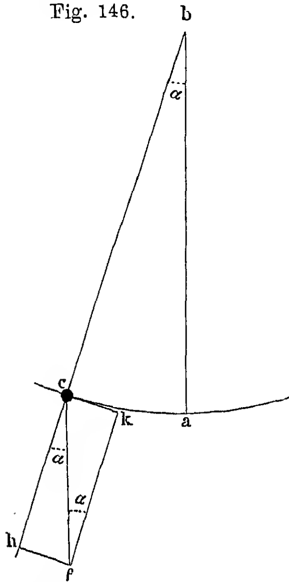
3. Die Schwingungsdauer ungleich langer Pendel verhält ch wie die Quadratwurzel aus den Pendellängen.

Das erste Gesetz folgt als notwendige Konsequenz, wenn vorher eriesen ist, daß die Anziehungskraft der Erde auf alle Materien gleich groß t und folglich alle Körper gleiche Beschleunigung des freien Falles erhalten. enn da beim Pendel eine Komponente dieser Beschleunigung als wirksame raft auftritt und die Bewegung derselben auf den Fall über eine schiefe bene zurückgeführt werden kann, so ist es ebenso sicher, daß alle Körper

bei gleicher Pendellänge gleich schnell schwingen, wie daß sie gleich schnell frei fallen. In Wahrheit haben jedoch die Physiker umgekehrt aus der Tatsache der gleichen Schwingungsdauer bei Pendeln aus verschiedenem Materiale und Gewicht den Beweis abgeleitet, daß die Acceleration der Schwere für alle Körper gleich groß sei.

Um von dem Einflusse des Luftwiderstandes unabhängig die Schwingungsdauer von Pendeln zu vergleichen, hat Newton hohle hölzerne Kugeln gleicher Größe an Fäden gleicher Länge aufgehängt und mit den verschiedensten Materialien, wie Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Holz, Wasser, Weizen, angefüllt schwingen lassen. Es konnte kein Unterschied nachgewiesen werden.

Fig. 146.



Das zweite Gesetz ist erwiesen, sobald gezeigt worden ist, daß beim Pendel mit Annäherung dieselben Bewegungsbedingungen vorhanden sind wie bei der schwingenden Bewegung, die wir in dem vorausgegangenen Paragraphen studiert haben.

Fassen wir die Fig. 146 ins Auge. Die Pendelkugel befindet sich momentan in c. Die Schwerkraft sucht derselben eine Beschleunigung $= g$ zu erteilen, welche durch die Gerade cf nach Richtung und Größe vorgestellt sein mag. Von dieser Beschleunigung kann nur die Komponente ck in der Richtung der Tangente zur Bewegung beitragen. Die andere Komponente ch kann nur den Faden spannen. Nun ist:

$$ck = cf \cdot \sin\alpha = g \sin\alpha.$$

Die Beschleunigung, welche die Pendelkugel erfährt, ist also in jedem Punkte der Bahn proportional dem Sinus des Ausschlagswinkels. Da nun aber für kleine Winkel die Sinus nahezu proportional den Bögen selbst sind, so ist damit auch eine angenäherte Proportionalität zwischen Weg und Beschleunigung gegeben, folglich erwiesen, daß die Gesetze der schwingenden Bewegung auch für das Pendel angenähert gelten müssen, solange die Amplituden klein sind.

Um ein Zahlenbeispiel beizubringen, welches zeigt, wie nahe die Bögen und die Sinus derselben übereinstimmen, wenn man unter 5^0 bleibt, möge folgende Tabelle dienen:

Winkel	Bogenlänge (Radius = 1)	Sinus
1^0	0,0174533	0,0174524
2^0	0,0349066	0,0348995
3^0	0,0523599	0,0523360
4^0	0,0698132	0,0697565
5^0	0,0872665	0,0871558

lan sieht, daß bis 3° der Unterschied erst in der fünften Dezimale auftritt nd daselbst noch nicht $^1/_{2000}$ des Wertes erreicht.

So lange man also den Ausschlagswinkel nicht über 3° steigen läßt, ann man mit genügender Annäherung behaupten, daß die Schwingungsauer unabhängig von der Amplitude sei, also die Schwingungen isochron eien.

Die Behauptung, daß dasselbe Pendel zu einer größeren Schwingung icht mehr Zeit brauche als zu einer kleineren, klingt auf den ersten Blick aradox. Durch folgende Betrachtung ist aber leicht einzusehen, wie dieses esultat zustande kommen muß.

Denken wir uns (Fig. 147) dicht hintereinander zwei gleiche Pendel aufhängt, das eine bis *c*, das andere halb so weit bis *c'* gehoben und gleichzeitig sgelassen, so werden sie gleichzeitig in den Punkten *d* und *d'* ankommen,

Fig. 147.

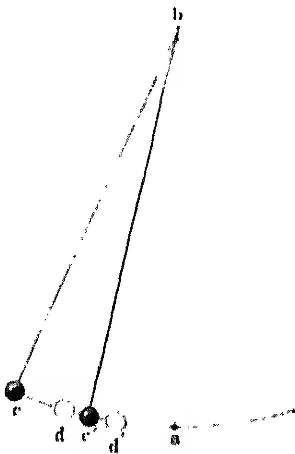
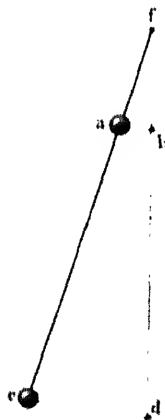


Fig. 148.



enn $c'd' = \frac{1}{2} cd$. Die beschleunigende Kraft in *d* ist aber doppelt so roß als in *d'*, außerdem aber langt das eine Pendel in *d* mit einer Gehwindigkeit an, welche doppelt so groß als diejenige ist, mit welcher das dere den Punkt *d'* passiert, und daraus folgt denn, daß auch in dem chsten kleinen Zeitteilchen das eine Pendel einen doppelt so großen Weg rücklegt als das andere. Auf diese Weise fortschließend findet man endh, daß beide Pendel gleichzeitig in *a* ankommen müssen.

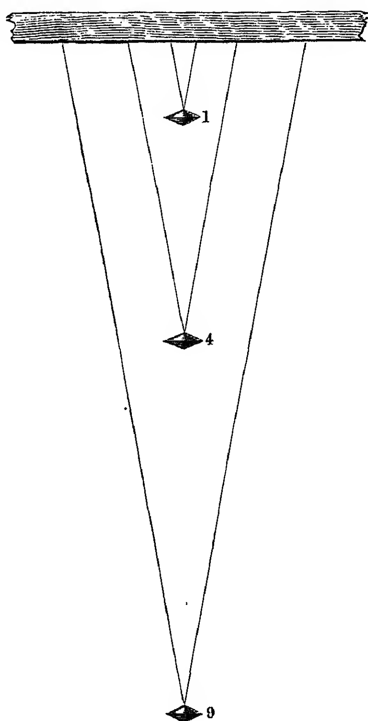
Diese Schlußweise läßt sich auch noch anwenden, wenn das Verhältnis r Ausschlagswinkel nicht gerade das von 1 zu 2, sondern ein anderes ist, eil für kleinere Ausschlagswinkel die beschleunigende Kraft stets der Entrnung von der Gleichgewichtslage proportional ist; und so läßt sich allmein zeigen, daß bis zu der Grenze hin, bis zu welcher $\sin\alpha$ mit $\frac{ac}{bc}$ rtauscht werden darf, die Schwingungsdauer von der Größe der Ausschlagsnkel unabhängig ist.

Um dies Gesetz durch den Versuch zu bestätigen, muß man die Zeit nau bestimmen, welche nötig ist, damit ein Pendel mehrere hundert hwingungen vollendet. Macht man diese Beobachtung zu Anfang der Begung, wenn die Amplitude 2° bis 3° ist, später, wenn sie nur noch 1° bis

2° beträgt, und zuletzt, wenn die Oszillationen so klein geworden sind, daß man sie mit der Lupe beobachten muß, so findet man, daß die Oszillationen in diesen drei Stadien so gut wie vollständig isochron sind.

Das dritte Gesetz, welches sagt, daß die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional sei, ergibt sich auf folgende Weise. Man denke sich den Schwingungsbogen ab, Fig. 148, eines Pendels in so viel gleiche Teile geteilt, daß man jedes dieser Bogenteilchen als geradlinig betrachten kann. Wenn nun der Ausschlagswinkel eines längeren Pendels ebenso groß ist, so muß sich der Schwingungsbogen cd desselben zu ab verhalten wie die Pendellänge fc zu fa. Denken wir uns den Bogen dc in ebenso viel gleiche Teile geteilt wie den Bogen ab, so werden auch die einzelnen Teile im Verhältnis der Pendellängen stehen. Wenn also das eine Pendel viermal so lang ist als das andere, so werden auch jene Unterabteilungen des Bogens dc viermal so groß sein als die entsprechenden Teile des Bogens ab. Der Winkel, welchen das oberste, das zweite, dritte usw. Bogenteilchen von ab mit der Horizontalen macht, ist gleich dem Winkel, welchen das erste, zweite, dritte usw. Bogenteilchen von cd mit derselben macht; auf den entsprechenden Teilen von ab und cd ist demnach auch die beschleunigende Kraft dieselbe.

Fig. 149.



Wenn aber verschiedene Wege mit gleicher beschleunigender Kraft durchlaufen werden, so lehrt uns die Formel $s = \frac{g}{2} t^2$, daß sich die Fallzeiten verhalten wie die Quadratwurzeln der Fallräume; wenn also der Bogen cd 2-, 3-, 4-, $n$mal so groß ist als der Bogen ab, so wird die Zeit, in welcher ein Teilchen von cd durchlaufen wird, auch $\sqrt{2}$-, $\sqrt{3}$-, $\sqrt{4}$-, $\sqrt{n}$mal so groß sein als die, in welcher das entsprechende Teilchen von ab durchlaufen wird. Da dies aber für alle Bogenteilchen gilt, so gilt es auch für ihre Summe, was denn mit anderen Worten heißt, die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional.

Um die Richtigkeit des dritten Gesetzes durch den Versuch nachzuweisen, hat man nur die Schwingungsdauer verschieden langer Pendel zu vergleichen. Wenn sich z. B. die Pendellängen wie die Zahlen 1 : 4 : 9 verhalten, so verhalten sich die entsprechenden Schwingungszeiten wie 1 : 2 : 3. Am bequemsten hängt man zu diesem Versuche die Kugeln an einem doppelten Faden auf, wie Fig. 149 zeigt. Während ein Pendel, dessen Länge 4 dm ist, eine Oszillation macht, macht das viermal kürzere Pendel zwei Oszillationen;

und während ein Pendel von 1 dm Länge dreimal hin und her geht, macht ein 9 dm langes nur einen Hin- und Hergang.

Die eben besprochenen Gesetze sind von der Intensität der Schwere ganz unabhängig. Wenn die Schwerkraft auch hundertmal stärker oder schwächer wirkte, so würden kleine Schwingungen eines und desselben Pendels doch unter sich isochron bleiben, und die Schwingungszeiten verschieden langer Pendel würden sich noch immer wie die Quadratwurzeln ihrer Länge verhalten. Die absolute Dauer der Oszillationen ändert sich aber mit der Intensität der Schwerkraft. Dasselbe Pendel wird schneller oszillieren müssen, wenn die Intensität der Schwerkraft wächst, und langsamer, wenn sie abnimmt.

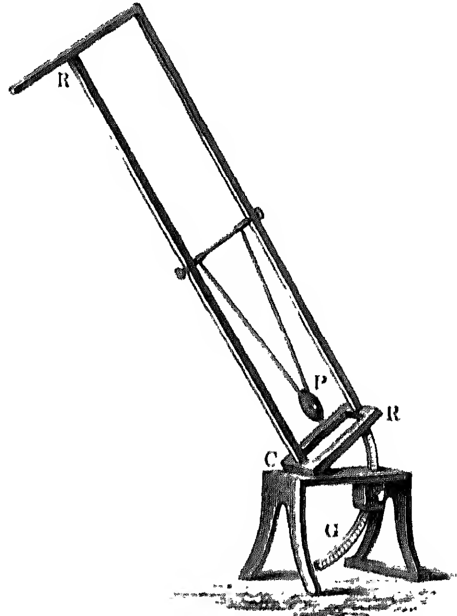


Fig. 150.

Eine solche Änderung der Oszillationsdauer wird beobachtet, wenn man ein Pendel in verschiedenen geographischen Breiten schwingen läßt. Um in einem Vorlesungsexperiment den Einfluß der Änderung der beschleunigenden Kraft zu demonstrieren, hat E. Mach den in Fig. 150 abgebildeten Apparat konstruiert. Der Rahmen *RR* ist um ein Scharnier bei *C* drehbar, kann geneigt und umgelegt werden; hierdurch wird das an steifen Stäben aufgehängte Pendel *P* genötigt, in schief stehenden Schwingungsebenen zu schwingen. Der Gradbogen *G* dient zur Messung und Festklemmung der geneigten Lage. Bei derselben kommt von der ganzen Schwerkraft von vornherein nur eine Komponente von der Größe $g \cos \beta$ zur Wirkung, wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, um welchen die Schwingungsebene aus ihrer ursprünglich senkrechten Lage gedreht wurde. Die Schwingungsdauer des geneigten Pendels verhält sich dann zu jener des senkrechten wie 1 zu $\sqrt{\cos \beta}$.

§ 56. Theoretische Ableitung der Gesetze des mathematischen Pendels. Die sämtlichen im vorigen Paragraphen empirisch nachgewiesenen Gesetze lassen sich durch die Formel darstellen:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

worin t die Dauer einer Schwingung hin oder zurück, l die Länge des Pendels und g die Beschleunigung der Schwere bedeuten. Wir gelangen zu dieser Formel, welche ebenfalls nur für kleine Schwingungsbögen angenähert gilt, aus der Formel 3) des § 54:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}},$$

indem wir für r und φ ihre Werte einsetzen. Aus Fig. 151 ersieht man, daß der senkrechte Abstand AD gegeben ist durch $AF.\sin\alpha = l\sin\alpha$.

Fig. 151.

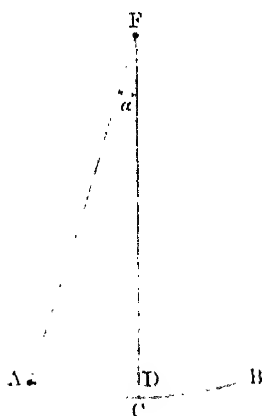
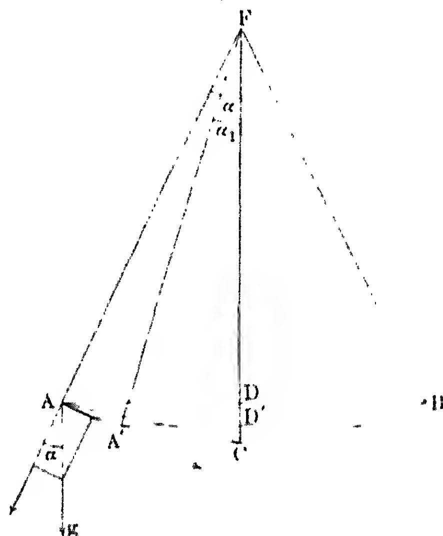


Fig. 152.



Die Beschleunigung in A ist gegeben durch $g.\sin\alpha$. Da wir nun angenähert statt des Bogens AC die Senkrechte AD setzen dürfen, so erhalten wir:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{\varphi}} = \pi\sqrt{\frac{l\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Eine andere, direkte Ableitung der Pendelformel ist beifolgende: Das Pendel geht (Fig. 152) vom Punkte A aus und wird, sobald es in A' angelangt ist, die Endgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2ge}$$

haben, wenn e den Vertikalabstand DD' bedeutet. Bezeichnen wir ferner die Bögen AC und $A'C$ mit b und b', so können wir bei Beschränkung auf kleine Bögen an ihre Stelle die zugehörigen Sehnen setzen und erhalten dann:

$$CD = h = \frac{b^2}{2l},\ CD' = h_1 = \frac{b_1^2}{2l}. \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

wenn l die Länge des Pendels $CF = AF$ darstellt.

Da nun $e = h - h_1$, so kommt auch:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(b^2 - b_1^2)} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Denken wir uns jetzt gemäß Fig. 153 den Bogen ACB auf der X-Achse eines Koordinatensystems gerade ausgestreckt und einen schweren Punkt auf dieser Geraden mit denselben Geschwindigkeiten wie das Pendel auf seinem Bogen sich bewegen, so wird die Zeit t, welche der schwere Punkt braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich der Schwingungsdauer des Pendels sein.

EINLEITUNG.

Begriff und Aufgabe der Naturwissenschaften. Sobald der
n Gebrauche seiner Vernunft kommt, wird er sich bewußt, daß
eindrücke erhält und unwillkürlich versetzt er die Ursachen
rücke nach außen. Er gelangt so zur Vorstellung eines Trägers
chen, eines Dinges, von welchem die Einwirkungen auf die Sinne
Dieses Ding wird Körper genannt, und die Gesamtheit aller
er heißt Natur. Im Verkehr mit seinesgleichen wird ihm offenbar,
Menschen von einer parallelen Reihe von Sinneseindrücken be-
len, und er lernt sich mit jenen über gemeinsame Bezeichnungen
rücke und der Körper, denen er ihre Entstehung zuschreibt, zu
n [1]).

die Sinnesorgane aller Menschen durchaus gleich beschaffen, so
iche Einwirkungen von außen stets auch gleiche Sinneswahr-
bei allen Individuen hervorrufen. Das ist nun allerdings nicht
der Fall. Gleichen Objekten entsprechen daher bei verschiedenen
icht immer gleiche Sinneswahrnehmungen, sowie auch umgekehrt
daß gleichen Wahrnehmungen ungleiche Objekte entsprechen.
ı Beispiele hierfür unter anderem in der Lehre von den Farben
Empfindungen kennen lernen.

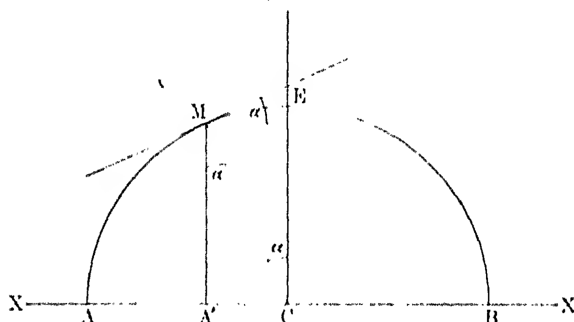
ßen und ganzen geht jedoch der Vorgang der Sinneseindrücke,
ehmung derselben und der Bildung der Vorstellungen über die
erselben bei allen normal entwickelten Menschen so weit parallel

---

Untersuchung der von den Philosophen aufgeworfenen Frage, ob den
findungen abgeleiteten Vorstellungen außerhalb derselben auch wirk-
al Existierendes entspreche, oder ob nicht etwa die Empfindungen selbst
Existierende seien, ist nicht Gegenstand der Physik. Wir halten
ationen für den Physiker für unfruchtbar und entbehrlich. Die Ge-
Physik lehrt, daß deren große Entdecker Galilei, Newton, Volta,
a. nicht auf Grund erkenntnis-theoretischer Zweifel, sondern unter
ner realen Welt ihre großen Erfolge erzielt haben. Betrachten wir die
ls Lehrmeisterin der Physik nicht nur in bezug auf ihren Inhalt,
für ihre Methode, so kommen wir zu dem Schlusse, daß ihr Fort-
hängig ist von den Grundanschauungen der Philosophie. Der Physiker
Welt, wie sie ihm erscheint, und überläßt es dem einzelnen, dieselbe
existierend oder für ein Traumbild zu halten.

Um diese Zeit zu finden, beschreiben wir mit $AC = b$ als Radius über ACB einen Halbkreis AEB und nehmen an, es werde dieser Halbkreis von

Fig. 153.



einem zweiten schweren Punkt mit einer konstanten Geschwindigkeit V, welche der Endgeschwindigkeit des Pendels im Punkte C entspricht, durchlaufen, so ist:

$$V = \sqrt{2gh} = b\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

wo wir für h den Wert aus 2) eingesetzt haben; alsdann wird die Zeit t, welche der schwere Punkt auf dem Halbkreis braucht, um mit vorstehender konstanter Geschwindigkeit von A über E nach B zu kommen, aus der Gleichung

$$t \,.\, V = b \,.\, \pi$$

zu finden sein. Unter Einsetzung des Wertes von V aus Gleichung 4) folgt hieraus:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Nun ist aber die horizontale Geschwindigkeit dieses zweiten schweren Punktes stets gleich derjenigen des ersten Punktes vertikal darunter, also z. B. die horizontale Komponente der Geschwindigkeit V im Punkte M gleich derjenigen im Punkte A' darunter, d. h. v_1. In der Tat ist jene horizontale Komponente:

$$V\cos\alpha = V \,.\, \frac{\sqrt{b^2 - b_1^2}}{b},$$

oder, wenn wir für V den Wert aus Gleichung 4) einsetzen:

$$V \,.\, \cos\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}\,(b^2 - b_1^2)} = v_1$$

nach Gleichung 3), was zu zeigen war. Da also die beiden schweren Punkte auf dem Kreise und auf der Geraden stets dieselbe horizontale Geschwindigkeit haben und also immer vertikal übereinander liegen werden, so werden sie zu gleicher Zeit von A ausgehend auch zugleich im Punkt B anlangen, und es wird somit auch die Schwingungsdauer des Pendels sein:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

Die strenge Formel für die Schwingungsdauer des Pendels für Amp tuden beliebiger Größe ist nur durch höhere Rechnung erhältlich. Sie lä sich durch nachfolgende Reihe ausdrücken:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}\right)^2 sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots\right] \quad . \quad .$$

worin α den Ausschlagswinkel bedeutet.

Dieser Ausdruck geht in die einfache Formel über, wenn das zwei und die folgenden Glieder innerhalb der Klammer vernachlässigt werd dürfen. Da für $\alpha = 1^0$ und $\alpha = 2^0$ diese Vernachlässigungen nur 0,0000 und 0,000076 betragen, so kann man mit einer Sicherheit von $^1/_{10\,000}\,t$ selb für 2^0 noch die einfache Formel benutzen. Das dritte Glied mit $sin^4 \frac{\alpha}{2}$ nim selbst für $\alpha = 10^0$ erst den Wert 0,0000016 an.

Da der Wert von g, wie wir oben mitgeteilt haben, rund gleich 980 ist, so folgt aus der obigen Gleichung für die Schwingungsdauer $t = 1$ Länge L des einfachen Sekundenpendels angenähert:

$$L = \frac{g}{\pi^2} = 99{,}3 \text{ cm}$$

und für $t = {}^1/_2\,s$ als Länge des einfachen halbe Sekunden schlage den Pendels:

$$L' = \frac{g}{4\,\pi^2} = 24{,}8 \text{ cm}.$$

§ 57. **Das Zykloidenpendel.** Da die Schwingungsdauer beim Pend so wie die Fallzeit auf einer Kreisbahn abhängt von der Amplitude, suchte Huygens eine Bahn zu finden, auf welcher ein Körper in gen

Fig. 154.



Fig. 155.

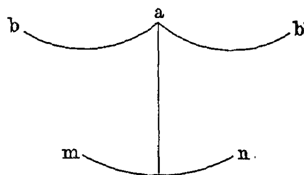
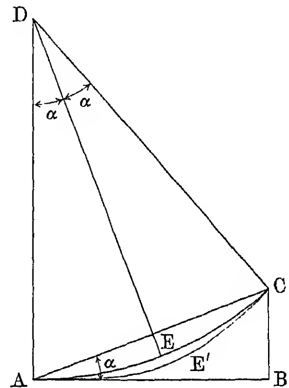


Fig. 156.



gleichen Zeiten große und kleine Amplituden durchlaufen würde. Er fa daß dies bei der Zykloide der Fall sei. Eine solche Kurve wird erhalt wenn man einen Punkt m eines auf ebener Bahn rollenden Kreises dabei ei Linie beschreiben läßt, wie dies Fig. 154 darstellt.

Da eine Zykloide zugleich die Abwickelung einer anderen Zykloide d stellt, so konstruierte Huygens zur Herstellung eines Pendels, das e

Zykloide beschreibt, zwei feste aneinanderstoßende Zykloiden ab und ab', Fig. 155, in deren Durchschnittspunkt a der Pendelfaden aufgehängt war. Beim Schwingen des Pendels wickelte sich dann der Faden abwechselnd von der einen und anderen Zykloide ab, so daß die Kugel c nun auch eine Zykloide mn beschrieb.

Die halben Schwingungsdauern oder die Fallzeiten vom höchsten Punkte zum tiefsten gestalten sich nun bei der schiefen Ebene, beim Kreispendel und Zykloidenpendel folgendermaßen.

Es stelle ABC in Fig. 156 die schiefe Ebene dar, deren Länge $AC = l$ und deren Höhe $BC = h$ sei, so ist nach Früherem die Zeit t_1, die ein Körper gebraucht, um die Länge l der schiefen Ebene vermöge der Schwerewirkung zu durchlaufen:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \, . \, l}{g \, . \, sin \, \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \, . \, l^2}{g \, . \, h}} = 2 \, l \sqrt{\frac{1}{2 \, g \, h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Legen wir durch A und C einen Kreisbogen AEC, dessen Zentrum D im Durchschnittspunkt der Vertikalen durch A und der Normalen auf der Mitte von AC liege, so repräsentiert DA ein Pendel von der Länge $DC = r$ mit dem halben Schwingungsbogen AEC, und die Zeit t_2, die das Pendel braucht, um den Bogen AEC zu durchlaufen, ist die halbe Schwingungsdauer desselben, also:

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{2 \, g \, sin \, \alpha}} = \frac{\pi}{2} \, l \sqrt{\frac{1}{2 \, g \, h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Für den durch A und C gehenden Zykloidenbogen $AE'C$, der durch das Fortwälzen eines Kreises vom Durchmesser $BC = h$ entstanden ist, ist die Fallzeit eines Körpers auf ihm gegeben durch:

$$t_3 = \pi \sqrt{\frac{h}{2 \, g}} = \pi \, h \sqrt{\frac{1}{2 \, g \, h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Hiernach verhalten sich die Fallzeiten auf der schiefen Ebene, dem Kreisbogen und der Zykloide AC:

$$t_1 : t_2 : t_3 = 2 \, l : \frac{\pi}{2} \, l : \pi \, h,$$

d. h. die erstere ist die größte, die letzte die kleinste. Die Fallzeit auf der Zykloide wird erst dann gleich derjenigen auf dem Kreisbogen, wenn der Durchmesser des die Zykloide erzeugenden Kreises h gleich der halben Länge der schiefen Ebene oder also der Winkel $\alpha = 30^0$ würde; dann wäre aber die Pendelamplitude $2 \, \alpha = 60^0$, und es gälte nicht mehr die obige einfache Formel für die Schwingungsdauer des Pendels.

Daraus, daß im Ausdruck für die Fallzeit auf der Zykloide die Länge der schiefen Ebene bzw. die Länge des Bogens $AE'C$ nicht vorkommt, folgt, daß von jedem Punkte der Zykloide aus die Fallzeit bis zum Ende derselben in A dieselbe ist.

Die Theorie und die Anwendungen des physischen Pendels können erst an späterer Stelle behandelt werden.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht und den Bewegungen der festen Körp

§ 58. Feste und starre Körper, fortschreitende und dre Bewegung. Bei den bisherigen Betrachtungen beschränkten wir u auf das Gleichgewicht oder die Bewegung eines einzelnen materi Punktes, oder ließen, falls deren mehrere vorhanden waren, die Na punkte unberücksichtigt, was aber nur selten zulässig ist.

Die festen Körper, mit denen wir in Wirklichkeit zu tun haben, könn uns als ein Aggregat von materiellen Punkten vorstellen, die fest mitei verbunden sind. Diese Verbindung ist aber wiederum in Wirklichke eine vollkommen starre, d. h. die materiellen Punkte halten ihre seitige Lage unter dem Einflusse von Kräften nicht aufrecht, sondern er vorübergehende oder dauernde Veränderungen dieser Lage. Der vollko starre Zustand ist demnach nur als ein idealer Grenzfall anzusehen, de die festen Körper mehr oder weniger nähern. Ein Stück Quarz, eine Stahlstange, ein Holzblock nähern sich diesem Grenzfalle der Starrheit. dünne Stahlstange (Stahlfeder), ein hölzernes Lineal dagegen weichen stark davon ab, da sie elastisch biegsam sind. Ein Bleidraht, eine schnur, ein Kokonfaden sind in steigender Reihe davon entfernt, als Körper zu gelten, obwohl sie immer noch feste Körper sind.

Für die nicht starren Körper lassen sich keine einfachen allgen Regeln über Gleichgewicht und Bewegung angeben. Es muß vielmehr einzelne Fall einzeln untersucht werden. Dabei wird man immer s gehen, daß man zuerst untersucht, was geschehen würde, wenn der vollkommen starr wäre, und dann erst auf den Einfluß der Elastizität, barkeit usw. Rücksicht nehmen. Wir haben uns daher im folgenden n starren Körpern (Punktsystemen) zu beschäftigen.

Auch in bezug auf die Beweglichkeit ist ein bedeutender Unter zwischen dem einzelnen materiellen Punkte und dem aus vielen s Punkten zusammengesetzten Körper. Der einzelne Punkt kann nu fortschreitende Bewegung haben, und die Mannigfaltigkeit derselb schränkt sich auf die Formen der Bahn und die Arten des zeitliche laufes. Beim Punktsystem (Körper) ist eine viel größere Mannigfal gegeben, da sich die Bewegungen der einzelnen Punkte voneinande schieden gestalten können.

Der einfachste Fall wird demnach der sein, daß alle Einzel genau dieselbe Bewegung, also kongruente Bahnen mit gleichem zei

Verlaufe ausführen. Diese Bewegungsart nennen wir die fortschreitende Bewegung des Körpers. Bei dieser bleibt jede auf dem Körper gezogene Gerade stets sich selbst parallel.

Ein zweiter Fall ist der, bei welchem alle Punkte gleichzeitig in parallelen Ebenen Kreise um eine gemeinschaftliche Achse beschreiben. Diese Bewegungsart nennen wir die drehende oder Rotationsbewegung. Jede andere noch so komplizierte Bewegung läßt sich stets als eine Zusammensetzung einer fortschreitenden mit einer drehenden Bewegung auffassen.

Als Beispiel einer fortschreitenden Bewegung könnten wir die eines Schlittens anführen, der auf stets gleich geneigter Bahn geradlinig fortbewegt wird. Ein Beispiel der rotierenden Bewegung wäre die eines Schwungrades einer feststehenden Maschine.

Dagegen ist das Wagenrad eines fahrenden Wagens ein Beispiel einer zusammengesetzten Bewegung. Ein anderes Beispiel hierfür wäre die Bewegung einer Schraube (Korkziehers) in ihrer feststehenden Schraubenmutter.

Beim Wagenrad gesellt sich zur Rotationsbewegung ein Fortschreiten der Achse in einer Richtung senkrecht auf dieselbe; bei der Schraube eine solche in einer Richtung parallel zur Achse.

Die Erde hat eine Rotationsbewegung um ihre Achse und eine fortschreitende Bewegung in ihrer Bahn um die Sonne, wobei die Rotationsachse schief auf der Ebene der fortschreitenden Bewegung steht.

Man darf sich bei der Definition der fortschreitenden Bewegung nicht dadurch irre machen lassen, daß die einzelnen Punkte möglicherweise sämtlich Kreise beschreiben. Denken wir uns in Fig. 157 eine Scheibe um eine vertikale Achse in C drehbar. Am Rande der Scheibe in N_0 sei auf eine Nadelspitze eine Magnetnadel ns frei beweglich aufgesetzt. Drehen wir die Scheibe, so

Fig. 157.

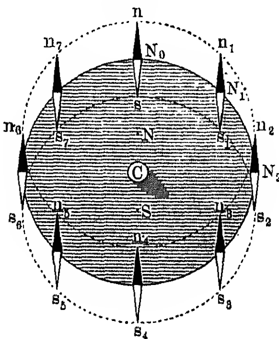
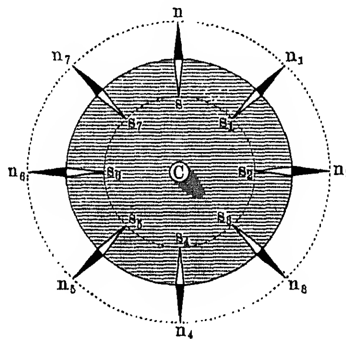


Fig. 158.



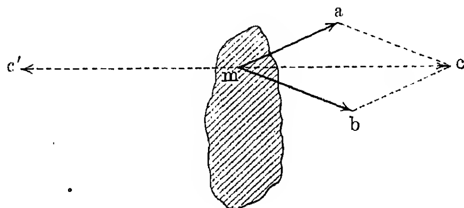
beschreibt die Nadelspitze N_0 einen Kreis um die Achse C; da aber die Magnetnadel (von zufälligen Schwingungen abgesehen) ihre zum magnetischen Meridian parallele Richtung beibehält, so bewegt sich ihr Nordpol n auf einem Kreise n, n_1, n_2... um den Punkt N, der Südpol s auf einem Kreise s, s_1, s_2... um den Punkt S. Mithin hat nur die Scheibe eine drehende Bewegung, während die Magnetnadel eine fortschreitende Bewegung besitzt. Wäre die Magnetnadel nicht frei beweglich, sondern auf der Scheibe unverrückbar befestigt, so würde sie, wie in Fig. 158 dargestellt ist, ebenfalls eine drehende

Bewegung haben, wobei ihr Nordpol n und ihr Südpol s sowie alle übı Punkte des Systems Kreise um eine und dieselbe Achse C beschreiben [1]

Noch auf einen wesentlichen Unterschied in dem Verhalten einz materieller Punkte einerseits und der starren Punktsysteme oder K andererseits glauben wir schon hier aufmerksam machen zu sollen.

Wenn m, Fig. 159, ein einzelner materieller Punkt wäre, und wir li auf denselben die Kraftkomponenten ma und mb einwirken, so würde das Parallelogramm $macb$ sowohl als Kräfteparallelogramm als auch Bewegungsparallelogramm gelten, das heißt, wir wüßten nicht bloß, die beiden Kräfte, die durch ma und mb vorgestellt sind, zusammen die r tierende Kraft mc ergeben, sondern auch, daß, wenn ma und mb die d die komponierenden Kräfte bewirkten Wege vorstellen, der resultierende mc ist. Ist aber m einem Körper angehörig, auf den im Punkte m die be Kräfte ma und mb angreifen, so ist zwar sicher, daß daraus eine den Kö in m angreifende resultierende Kraft mc hervorgeht, die durch eine g große entgegengesetzte mc' im Gleichgewichte gehalten werden könnte folgt aber daraus keineswegs, daß der Körper sich so bewegt, daß der P m den Weg mc beschr Die eintretende Bewegung Punktes m hängt vielmehr nächst davon ab, ob alle Pu des Körpers frei beweglich und ist auch dann, wenn di der Fall ist, von der Mas verteilung im Körper abhär Nur wenn alle Punkte frei weglich sind und außer der (später zu definierende) Massenmittelpunkt in der Geraden mc gel ist, dann ist mc der wirklich eingeschlagene Weg von m. Die durch nachfolgend abzuleitenden Konstruktionsregeln aufgefundenen Resultierer der angreifenden Kräfte zeigen also wohl, durch welche Gegenkräfte Körper im Gleichgewichte zu erhalten ist, sie lassen aber im allgemeinen nicht auf die eintretenden Bewegungen des Körpers schließen, da diese von anderen Bedingungen, insbesondere der Anordnung der Massen, abhän

Fig. 159.



§ 59. Zusammensetzung zweier in einer Ebene liegender K ponenten, welche an fest verbundenen Punkten angreifen. Es ist fort einleuchtend, daß außer dem einen Angriffspunkte, auf welchen Kraft unmittelbar wirkt, auch alle jene Punkte des festen Körpers, welch

[1]) Die beiden Figuren 157 und 158 lassen überdies erkennen, daß die schreitende Bewegung der Magnetnadel in Fig. 157 als Resultierende zweier D bewegungen aufgefaßt werden kann. Denkt man sich nämlich dieselbe zunä wie in Fig. 158 mit der Scheibe rechts herum gedreht und daneben gleichzeitig ihre Aufhängespitze ebenso schnell links herum gedreht, so entsteht die Beweg wie in Fig. 157. Ebenso kann die Rotationsbewegung in Fig. 158 aufgefaßt we als eine fortschreitende nach Fig. 157, verbunden mit einer Drehbewegung Magnetnadel um ihre Aufhängespitze in demselben Sinne. Der Mond hat eine schreitende Bewegung auf seiner Bahn um die Erde, da er sich aber gleichz um seine eigene Achse dreht, so kehrt er der Erde immer dieselbe Hälfte zu wie in Fig. 158 der Magnet immer denselben Pol der Achse der Scheibe zuk

der Richtung der Kraft liegen, ebenfalls als Angriffspunkte betrachtet werden können. Wenn z. B. an dem festen Körper M, Fig. 160, im Punkte A eine Kraft angreift, welche nach x oder nach y gerichtet ist, so ist die Wirkung dieselbe, wie wenn dieselbe Kraft in irgend einem Punkte der Richtung xy, z. B. in B, C, D oder E angreifen würde. Dabei wird nur vorausgesetzt, daß diese Punkte wirklich starr und unverschiebbar verbunden, also nicht etwa elastischer Bewegungen gegeneinander fähig seien.

Auf diesen Satz von der Verlegung des Angriffspunktes gestützt, können wir sofort daran gehen, einige weitere Sätze abzuleiten über die gemeinschaftliche Wirkung zweier Kräfte, welche an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angebracht werden.

I. Zusammensetzung zweier in einer Ebene wirkender Komponenten, welche, unter einem Winkel gegeneinander gerichtet, zwei verschiedene Punkte eines starren Körpers angreifen.

Auf die Punkte A und B des starren Körpers MM', Fig. 161, seien in der Richtung und mit der Größe AX und BY zwei Kräfte wirksam. Die Wirkung dieser Kräfte bleibt unverändert, wenn dieselben statt in A und B in dem Durchschneidungspunkte C angreifen. Ihre Resultierende muß daher, wie bisher, durch das Kräfteparallelogramm gefunden werden, welches wir konstruieren, indem wir $CD = AX$, $CE = BY$ abschneiden, die Parallelen DF und EF, endlich die Diagonale CF ziehen, deren Verlängerung die Richtung der resultierenden Kraft angibt. Ihre Größe ist gleich CF, und als ihr Angriffspunkt kann jeder Punkt des Körpers, der in der Richtung von CF liegt, angesehen werden. Wir dürfen also diesen Angriffspunkt auch in dem Punkte G annehmen, wo die Resultierende die Gerade AB schneidet.

Fig. 160.

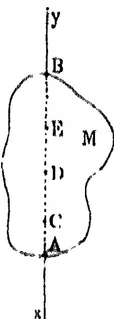
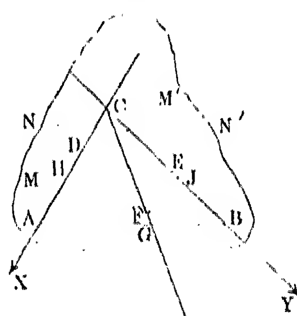


Fig. 161.



An diesem Resultate würde offenbar nichts geändert, wenn man von dem Körper längs der Linie NN' ein Stück abtrennen würde, wodurch der Punkt C außerhalb des angegriffenen Körpers fallen würde, denn da die starre Verbindung der übrigen Punkte des angegriffenen Körpers dieselbe bleibt, so muß auch die Lage und Größe der Resultierenden dieselbe bleiben.

Ziehen wir nun die Hilfslinien $FH \perp CA$ und $FJ \perp CB$, so sind die Dreiecke DHF und EJF ähnlich, und es gelten somit die Proportionen:

$$FH : FJ = DF : EF$$
$$= CE : CD$$
$$= BY : AX$$

Ebenso wie die senkrechten Abstände FH und FJ verhalten sich aber offenbar alle senkrechten Abstände irgend eines anderen Punktes der Resultierenden von den Richtungen der Komponenten.

Daraus folgt also der Satz:

Die senkrechten Abstände irgend eines Punktes der Result renden von den Richtungen der Komponenten verhalten sich v kehrt wie die Größen dieser Komponenten.

Bezeichnen wir die Komponenten mit p und p', die zugehörigen se rechten Abstände mit e und e', so ist der mathematische Ausdruck obi Satzes:

$$p : p' = e' : e,$$

woraus folgt:

$$pe = p'e',$$

d. h.:

Das Produkt aus dem senkrechten Abstande irgend ei Punktes der Resultierenden von der Richtung der Kompone mit der Größe der letzteren ist beiderseits gleich groß.

Die beiden Komponenten können, wie begreiflich, ebensowohl zwei mom tane als auch zwei konstante Kräfte vorstellen.

Das Produkt einer Kraft mit dem senkrechten Abstande eines Punk von der Richtung dieser Kraft wird das **statische Moment** oder **Drehungsmoment** dieser Kraft in bezug auf die durch den Punkt gehe Achse, welche auf der Ebene der Kraft und des Punktes senkrecht st genannt.

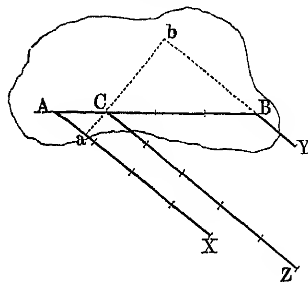
II. Zusammensetzung zweier paralleler Komponenten, welc nach derselben Seite gerichtet, an zwei Punkten eines starr Körpers wirken.

Denken wir uns in Fig. 161 die in A und B angreifenden Komponen allmählich in parallele Lage gebracht, so rückt der Punkt C ins Unendli hinaus, und die Resultierende wird parallel zu den Komponenten. Der se rechte Abstand irgend eines Punktes der Resultierenden von einer K ponente wird zum konstanten Abstande zwischen diesen beiden Gerad Endlich wird die Größe der Resultierenden, d. i. die Diagonale des Parall gramms, für diesen Fall gleich der Summe der Komponenten.

Wir fassen dies in den Satz zusammen:

Die Resultierende zweier paralleler, an zwei starr verbu denen Punkten nach derselben Seite wirkender Kräfte ist Größe nach gleich der Summe Komponenten, ihrer Richtung n den letzteren parallel und so geleg daß die Produkte ihrer Abstände v den Komponenten mit der Größe letzteren beiderseits gleich sind.

Fig. 162.



Um also beispielsweise die Resultiere der beiden parallelen Komponenten AX BY zu finden, welche die Punkte A und (Fig. 162) angreifen, teilen wir den Abst AB im Punkte C so, daß $AC \,.\, AX$ $BC \,.\, BY$, und ziehen $CZ = AX +$ parallel zu letzteren. Zieht man Ca und Cb senkrecht auf die R tungen der Komponenten, so geben auch diese senkrechten Abstände, mu

pliziert mit ihren zugehörigen Komponenten, gleiche Produkte auf beiden Seiten.

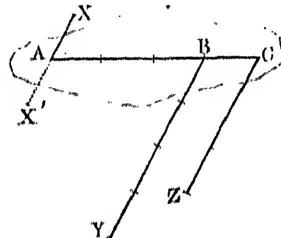
Da, wie ersichtlich, die Lage des Punktes C nur vom Größenverhältnis und nicht von der Richtung der parallelen Komponenten abhängt, so bleibt C der Angriffspunkt der Resultierenden für alle beliebigen (unter sich parallelen) Richtungen der gegebenen Komponenten.

Man nennt den Punkt C den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

III. Zusammensetzung zweier paralleler Komponenten, welche an zwei starr verbundenen Punkten nach entgegengesetzter Richtung wirken.

Es seien A und B, Fig. 163, die fest verbundenen Punkte, an denen Kräfte angebracht werden, welche der Größe und Richtung nach durch die Stücke AX und BY vorgestellt werden. Es sei beispielsweise BY viermal so groß als AX. Wir zerlegen zunächst die Komponente BY, welche die größere ist, in zwei andere, deren eine, gleich groß mit AX, aber entgegengesetzt gerichtet, in A angreift, die andere CZ, gleich der Differenz $BY - AX$, muß dann in einem Punkte C angreifen, welcher so liegt, daß $AB : CB = CZ : AX$ ist, also in unserem Beispiele muß $BC = \frac{1}{3} AB$ sein. Nach Anbringung der Komponenten AX' und CZ können wir uns die Komponente BY entfernt denken, da sie vollständig ersetzt ist. Nun heben sich aber die Komponenten AX und AX' gegenseitig auf. Es bleibt also schließlich die Resultierende CZ übrig. Wir erhalten daher den Satz:

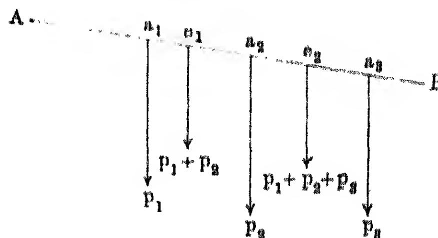
Fig. 163.



Die Resultierende zweier paralleler, an starr verbundenen Punkten nach entgegengesetzter Seite wirkender Kräfte ist der Größe nach gleich der Differenz der Komponenten, der Richtung nach parallel und gleich gerichtet mit der größeren Komponente und so gelegen, daß ihre Abstände von den Komponenten multipliziert mit deren Größe gleiche Produkte geben.

§ 60. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte. Sind allgemein mehrere parallele Kräfte gegeben, so setzt man zuerst zwei derselben zu einer Resultierenden zusammen, diese dann mit einer dritten Kraft wieder zu einer Resultierenden usf., bis man zuletzt die Gesamtresultierende bzw. Mittelkraft und deren Angriffspunkt erhält.

Fig. 164.



Es seien z. B. in Fig. 164 zunächst die beiden parallelen Kräfte p_1 und p_2 gegeben, welche in den Entfernungen a_1 und a_2 von A auf der Geraden AB angreifen. Dann hat die Mittelkraft $p_1 + p_2$ ihren Angriffspunkt im Abstande e_1 von A, und es gilt hierfür die Gleichung:

$$p_1(e_1 - a_1) = p_2(a_2 - e_1),$$

woraus folgt:

$$e_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2}.$$

Kommt nun eine dritte Kraft p_3 dazu, deren Angriffspunkt in a_3 ist doch dorthin verlegt werden kann, und bezeichnen wir wieder die Entfer Aa_3 ebenfalls mit a_3, so gibt die Kombination dieser dritten Kraft p der Resultierenden $p_1 + p_2$ eine neue Resultierende $p_1 + p_2 + p_3$, Angriffspunkt e_2 von A aus eine Entfernung e_2 hat, welche durch die Gleic bestimmt wird:

$$p_3(a_3 - e_2) = (p_1 + p_2)(e_2 - e_1) = (p_1 + p_2)\left(e_2 - \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2}\right) \text{ [illegible]}$$

woraus folgt:

$$e_2 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Es wird daher, indem man in dieser Weise fortschließt, allge der Angriffspunkt E der Resultierenden P von n parallelen Kräften ge sein durch

$$E = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{\sum pa}{P},$$

und es ist unmittelbar einleuchtend, daß E unabhängig von der Stellun parallelen Kräfte zur Richtung AB ist, oder mit anderen Worten, da die parallelen Kräfte unter Wahrung ihres Parallelismus beliebig ge denken können, ohne daß die Lage des Mittelpunktes derselben irge verändert wird.

Sind die parallelen Kräfte im Körper nicht in einer Ebene gelegen, dern auf beliebige Ebenen verteilt, so beziehen wir die Angriffspunkt die rechtwinkeligen Koordinatenebenen und denken uns die Kräfte nac ander unter Drehung um ihre Angriffspunkte jeder dieser Ebenen pa gemacht. Heißen wir dann X, Y, Z die Koordinaten des Mittelpunkte parallelen Kräfte bzw. des Angriffspunktes der Resultierenden P und x_1, [illegible] x_2, y_2, z_2 usw. die Koordinaten der Angriffspunkte der einzelnen K p_1, p_2 ..., so ergibt sich

$$X = \frac{\sum px}{P}, \quad Y = \frac{\sum py}{P}, \quad Z = \frac{\sum pz}{P}.$$

§ 61. Kräftepaare; deren Eigenschaften und Zusammensetz

Im § 59 wurde gezeigt, daß zwei parallele, nach entgegengesetztem wirkende Komponenten im allgemeinen eine Resultierende haben, welc der Richtung der größeren Komponente mit der Differenz der Kompon wirksam ist. Durch Hinzufügung einer dieser Resultierenden gleichen gegengesetzten Komponente oder durch Feststellung ihres Angriffspu kann die Bewegung des Körpers verhindert werden.

In dem speziellen Falle jedoch, in welchem die ursprünglichen ponenten **gleich groß und entgegengesetzt** sind, erhält man zwar fü Resultierende den Wert Null, aber trotzdem kann der Körper nicht in bleiben, sondern er wird eine **drehende Bewegung** annehmen, Fig. Es gibt dann keine einzelne Gegenresultierende, mit der man die Bewe

mitgeteilt werden können, der sie auf diese Weise als ein geistiges Besitztum erwerben und verwerten kann, ohne genötigt zu sein, alle diese Erfahrungen selbst auf dem mühsamen und zeitraubenden Wege eigener einzelner Sinneswahrnehmungen zu sammeln.

Wollte aber jede Generation der nachfolgenden ihre Erfahrungen über die Körperwelt in der zufälligen Reihenfolge, in der sie gemacht wurden, mitteilen, so würde die Aufbewahrung und Benutzung derselben an der ungeheuren Anzahl und Mannigfaltigkeit derselben scheitern.

Es muß daher eine Sichtung und Ordnung dieser Erfahrungen vorgenommen werden, irrtümliche und überflüssige Erfahrungen müssen ausgeschieden, gleichartige zusammengezogen, alle aber in ein geordnetes System und auf den einfachsten Ausdruck gebracht werden. Hierdurch wird es möglich, eine enorme, ja unbeschränkte Anzahl verwandter Einzelbeobachtungen in einen einzigen *Satz* oder in eine einzige *Gleichung* zusammenzufassen und so in die sparsamste Form zu bringen, welche gleichwohl sehr geeignet ist, alle in ähnlichen Fällen zu erwartenden Erfahrungen daraus abzuleiten.

Den Inbegriff aller systematisch geordneten und auf den einfachsten Ausdruck gebrachten Erfahrungen über die Körperwelt heißen wir Naturwissenschaft.

§ 2. Einteilung der Naturwissenschaften, Aufgabe der Physik.

Es ist nicht leicht, eine kurze und doch einwurfsfreie Definition der Physik zu geben, da man sich dabei auf Begriffe stützen müßte, welche erst im Verlaufe des physikalischen Studiums ihre Erklärung finden. Wir gelangen eher zu einer richtigen Vorstellung von der Aufgabe der Physik, wenn wir von den Naturwissenschaften diejenigen ausscheiden, welche wir als nicht zur Physik gehörig betrachten.

Wir begegnen bei einer Musterung sämtlicher Körper einer großen Klasse derselben, die wir als *organisierte* bezeichnen. Es sind dies die *Tiere* und *Pflanzen*, Wesen, denen die Eigenschaft des *Lebens*, d. h. die Fähigkeit, sich zu entwickeln, zu ernähren und fortzupflanzen, zukommt. Die mit diesen Körpern sich beschäftigenden Wissenschaften, die *Zoologie*, *Botanik*, die Physiologie der Tiere und Pflanzen, bilden eine eigene Gruppe, die *Biologie*. Damit ist nicht gesagt, daß diese organisierten Körper nicht auch den physikalischen Gesetzen unterliegen und nicht unter Umständen einer physikalischen Untersuchung unterworfen werden können. Der Tier- und Pflanzenkörper unterliegt ja z. B. denselben Gesetzen des freien Falls, reflektiert und absorbiert auch das Licht, leitet die Wärme und die Elektrizität wie ein nicht organisierter Körper, beträgt sich also in vielen Beziehungen wie ein solcher. Aber er zeigt im lebenden Zustande Erscheinungen, die sich, wenigstens bisher, nicht auf physikalische Prinzipien zurückführen ließen. Ob dies je gelingen wird, wissen wir nicht. Die Biologie bedarf demnach der Physik als Hilfswissenschaft, geht aber über sie hinaus.

Mit den *nicht organisierten Körpern, wie sie sich auf der Erde in natürlichem Zustande finden*, den Mineralien und Gesteins-

aufheben könnte, auch keinen einzelnen Punkt, durch dessen Feststellung man die Bewegung verhindern könnte.

Zwei solche gleiche und entgegengesetzte Komponenten werden ein **Komponentenpaar** (Kräftepaar) oder auch kurz ein **Drehpaar** (Drehzwilling) genannt. Ihr senkrechter Abstand ab, Fig. 165, heißt der **Arm** des Drehpaares. Das Produkt aus dem Arm und der Größe einer der Komponenten heißt das **Moment** des Drehpaares. Ist also eine der beiden Komponenten der Größe nach $= P$, ihr Abstand $= d$, so ist $P.d$ das Moment des Drehpaares. Mit der Bezeichnung Drehpaar $(P.d)$ soll ausgedrückt sein ein Drehpaar, bestehend aus zwei Komponenten von der Stärke P im Abstande d.

Ein solches Drehpaar hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß es ohne Änderung der Wirkung in seiner Ebene gedreht, parallel mit sich selbst verschoben, ja sogar in eine mit der ursprünglichen Ebene fest verbundene parallele Ebene übertragen werden kann, daß ferner seine Komponenten oder sein Arm geändert werden dürfen, wenn nur ihr Produkt, also ihr Moment und außerdem die Drehungsrichtung unverändert bleiben.

Wir wollen diese Behauptung durch eine Reihe von Betrachtungen ableiten.

1. Aus Fig. 165 ist ersichtlich, daß man den beiden Angriffspunkten A und B die Punkte a und b, welche durch eine senkrechte Verbindungslinie

Fig. 165.

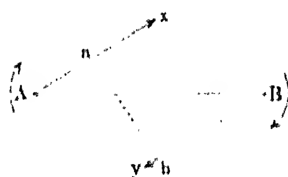
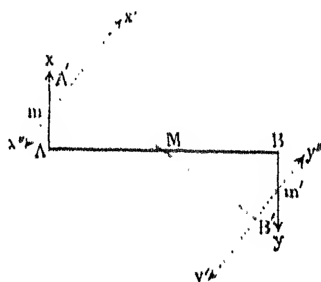


Fig. 166.



erhalten werden, substitutieren und dadurch das **schiefwinkelige Drehpaar in ein rechtwinkeliges von gleichem Moment verwandeln kann.**

2. In Fig. 166 sei AB der Arm des rechtwinkeligen Drehpaares mit den Komponenten Ax und By. Ziehen wir durch die Mitte M eine beliebig geneigte Gerade $A'B' = AB$, welche ebenfalls in M halbiert wird, so wird offenbar die Wirkung nicht geändert, wenn wir in den Endpunkten A' und B' die gleichen und entgegengesetzten Komponenten $A'x'$, $A'x''$ und $B'y'$, $B'y''$ anbringen, welche sich gegenseitig aufheben. Sind diese Komponenten der Größe nach gleich Ax und By, so können wir aber auch folgendermaßen die Gesamtwirkung bestimmen: Ax gibt mit $A'x''$ eine Resultierende von der Richtung Mm, ebenso By mit $B'y''$ eine ebenso große Resultierende von der Richtung Mm'. Diese beiden Resultierenden heben sich auf, es bleiben also nur noch die Komponenten $A'x'$ und $B'y'$, welche das neue Drehpaar bilden, welches gegen das frühere um den Winkel AMA' gedreht erscheint.

Es ist also gestattet, das Drehpaar um seine Mitte zu dreh

3. Um die perspektivische Darstellung zu erleichtern, wollen wi
Fig. 167 zwei miteinander parallele Ebenen als die oberen Flächen zw
nebeneinander liegender Prismen darstellen. Auf der tiefer liegenden E
befinde sich das rechtwinkelige Drehpaar Ax und By an dem Arme
Es soll gezeigt werden, daß sich dasselbe ohne Änderung der Wirkung
die Kante der oberen Ebene übertragen lasse.

Wir denken uns an dieser Kante die Gerade $A'B'$ gleich und par
AB gezogen, an den Endpunkten A' und B' je zwei darauf senkrechte K
ponenten gleich und parallel mit Ax und By angelegt. Es ist klar, daß d
vier Komponenten, $A'x$, $A'x''$, $B'y'$, $B'y''$, sich gegenseitig aufheben,
ohne Wirkung sein müssen.

Ziehen wir nun die Hilfslinien AB' und BA', dieselben müssen sic
einem Punkte M schneiden und gegenseitig halbieren, denn $ABB'A'$
die Ecken eines Parallelogramms.

Kombinieren wir nun die Komponenten Ax mit $B'y''$, dann By mit A
so geben diese Kombinationen je eine an M wirkende horizontale Resu
rende von doppelter, unter sich gleicher Größe, aber entgegengesetzter R
tung. Es fallen somit die Wirkungen von Ax, By'', $B'y$, $A'x''$ als
gegenseitig aufhebend fort, und bleiben nur noch die Komponenten $A'x'$
$B'y'$ übrig, welche das übertragene Drehpaar bilden. Es ist somit erwie
daß eine solche Übertragung in eine parallele Ebene an der W
kung eines Drehpaares nichts ändern kann.

4. Das Drehpaar mit dem Arm AB und den Komponenten Ax und
Fig. 168, soll ersetzt werden durch ein gleich wirkendes, dessen Arm
ist. Wir setzen an die Punkte B und C beiderseits die gleich großen K
ponenten Bz', yz''', Cz'', Cz an, deren Größe so bemessen ist, daß Cz :
$= AB : BC$. Unter dieser Bedingung halten sich dann die Komponen

Fig. 167

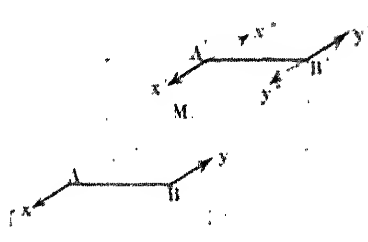
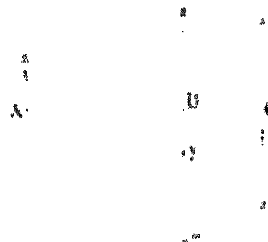


Fig. 168



Ax und Cz'' zusammen einerseits und Bz''' andererseits das Gleichgew
so daß sie also ohne Änderung der Wirkungen fortgelassen werden kön
Es bleiben mithin die Komponenten Bz' und Cz, welche mit dem Arm
das neue Drehpaar bilden. Da $Cz . BC = AB . By$, so hat dieses Dreh
dasselbe Moment wie das frühere.

Es können also Drehpaare durch andere von gleichem Mom
und gleicher Drehrichtung, welche in derselben oder in ei
parallelen Ebene liegen, füreinander gesetzt werden. Drehpa
deren Arm = 1 genommen ist, heißen reduzierte Drehpaare. Um
Drehpaar vom Arm d und den Komponenten P in ein reduziertes von gleic

Moment zu verwandeln, bringt man am Arm = 1 Komponenten von der Größe = Pd an.

Drehpaare, welche einander ersetzen können, heißen äquivalent. Äquivalente Drehpaare haben daher stets drei Stücke miteinander gemein. Erstens gleiches Moment, zweitens gleiche Drehrichtung, drittens gleiche Lage der Ebene, d. h. ihre Ebenen müssen parallel sein.

Eine sehr einfache und zweckmäßige Methode, verschiedene Drehpaare darzustellen, ist folgende: Man bezeichnet die Lage der Ebene des Drehpaares durch eine auf dieser Ebene errichtete Senkrechte. Die Richtung der Drehung bezeichnet man dadurch, daß man diese Senkrechte von der Ebene an nach jener Seite zieht, von welcher gesehen die Drehung rechtläufig (wie ein Uhrzeiger) gesehen wird. Endlich bezeichnet man die Größe des Moments durch die Länge der Senkrechten. Diese letztere wird dann die Achse des Drehpaares genannt, womit aber noch durchaus nicht gesagt sein soll, daß um diese Achse die Drehung des ganzen Körpers erfolgen müsse.

Der Vorteil dieser Darstellung eines Drehpaares durch seine Achse besteht darin, daß man, um zwei oder mehrere Drehpaare zusammenzusetzen, einfach ihre Achsen zusammensetzen kann, wie wenn es Kraft- oder Geschwindigkeitskomponenten wären. Die resultierende Achse ist die Achse des resultierenden Drehpaares.

Zusammensetzung parallelachsiger Drehpaare. Es seien in Fig. 169 in perspektivischer Zeichnung (wobei die Dimensionen von vorn nach

Fig. 169.

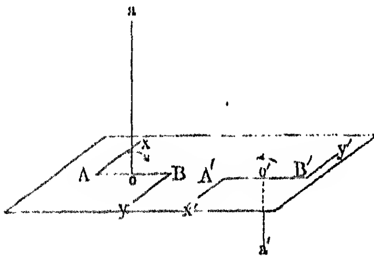
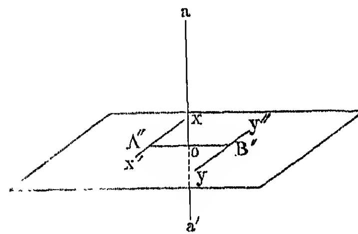
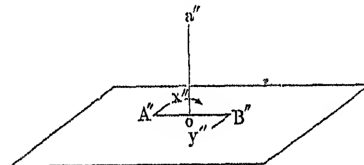


Fig. 170.



rückwärts etwa auf die Hälfte verkürzt erscheinen) zwei Drehpaare dargestellt, welche man zuvor auf dieselbe Ebene übertragen, auf den Arm 1 reduziert und in parallele Lage der Arme gedreht hat.

Fig. 171.



$oa = Ax = By$ ist die Achse des einen, $o'a' = A'x' = B'y'$ ist die Achse des anderen. Die letztere ist nach abwärts gerichtet, weil, von unten gesehen, die Drehungsrichtung rechtläufig erscheint.

Durch Verschiebung kann man nun die beiden Drehpaare so zusammenlegen, daß die Achsen in eine Gerade fallen, Fig. 170. Ebenso fallen die Komponenten an den Enden mit gleichen Buchstaben in je eine Gerade. Die Resultierenden dieser Komponenten sind daher gleich ihrer algebraischen Summe (hier ist infolge entgegengesetzten Zeichens zu subtrahieren). Folg-

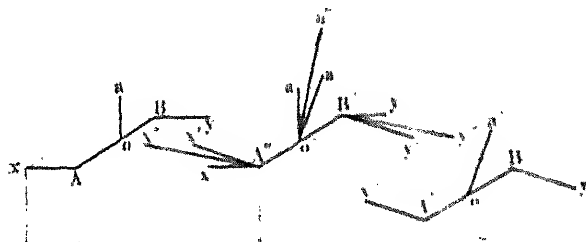
lich muß auch die Achse des resultierenden Drehpaares, Fig. 171, gleich der algebraischen Summe der Achsen der zusammenzusetzenden Paare, nach abwärts gerichtete Achse ist negativ in Rechnung zu bringen.)

Ebenso können eine beliebige Anzahl von parallelachsigen Drehpa zusammengesetzt werden, indem man die sämtlichen Achsen mit dem fangspunkte zusammenlegt und algebraisch summiert.

Zusammensetzung von Drehpaaren, deren Achsen gegeneinar geneigt sind.

Es seien in Fig. 172 gegeben das in horizontaler Ebene gelegene Dreh AB mit der vertikalen Achse oa und das auf der schiefen Ebene gele Drehpaar $A'B'$ mit der Achse $o'a'$. Beide Drehpaare seien zuvor auf Arm 1 reduziert und so gedreht, daß ihre Arme mit der Durchschnittsk der beiden Ebenen parallel liegen. Verschiebt man dann beide Arme in Kante, so erhalten die Komponenten die Lagen $A''x$, $A''x'$, $B''y$, $B''y'$, Resultierende $A''x''$ und $B''y''$ durch Konstruktion des Kräfteparallelogra erhalten werden. Die Ebene des resultierenden Drehpaares ist nun die d

Fig. 172



die Punkte x'', A'', B'' und y'' zu legende Ebene. Die Achse des resultiere Drehpaares ist die Gerade $o''a''$, welche auf der obigen Ebene senkrecht und die Länge $= A''x'' = B''y''$ besitzt. Man ersieht aber sofort, daß diese resultierende Achse aus den früheren Achsen $o''a$ und $o''a'$ direkt erh können, indem wir mit denselben das Kräfteparallelogramm $o''aa''a'$ struieren und dessen Diagonale ziehen.

Daraus folgt also, daß man mit den Achsen der Drehpaare ganz el operieren kann wie mit Kraftkomponenten, indem man sie nach Analogie Kräfteparallelogramms zusammensetzt.

§ 62. Zusammensetzung beliebiger, einen starren Körper greifender Kraftkomponenten. Mit Hilfe der in den vorausgehe Paragraphen abgeleiteten Sätze ist man nun imstande, für eine beli Anzahl von Kraftkomponenten, welche in beliebiger Größe und Richtun fest verbundene Punkte eines Körpers wirken, die Resultierende abzule

Man verfährt dabei in folgender Weise: Man wählt einen belie Punkt des Körpers O und denkt sich an demselben eine Anzahl von K ponenten angebracht, welche sowohl an Anzahl als auch an Größe und R tung mit jenen Komponenten übereinstimmen, welche ursprünglich geg sind. Außer diesen denkt man dann noch eine gleiche Anzahl von Ko nenten gleicher Größe, aber von entgegengesetztem Richtungssinne angebr

Es ist klar, daß durch diese beiden Systeme gleichgerichteter und entgegengerichteter Komponenten nichts geändert wird, da sie unter sich im Gleichgewichte stehen. Nun verbindet man in bekannter Weise die sämtlichen an O angebrachten, mit den ursprünglichen Komponenten gleich gerichteten unter sich zu einer Resultierenden Oz. Es bleiben dann noch eine Anzahl von Drehpaaren übrig, die man auf den Arm 1 reduziert und nach und nach zu je zweien kombiniert, wie im vorausgehenden Paragraphen gezeigt wurde. Zuletzt bleiben dann die Resultierende Oz und ein Drehpaar übrig, welche beide auch den Wert Null annehmen können.

Es folgt daraus, daß eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Kräfte im allgemeinen eine fortschreitende und eine drehende Bewegung hervorbringen und daß jede Lageänderung eines Körpers von einer fortschreitenden

Fig. 173.

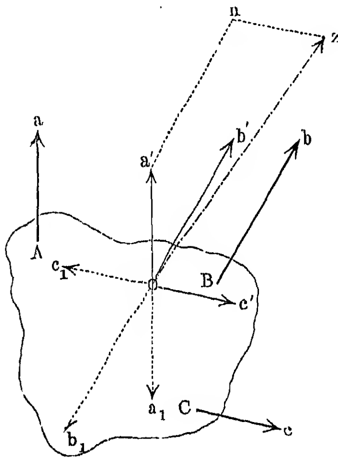
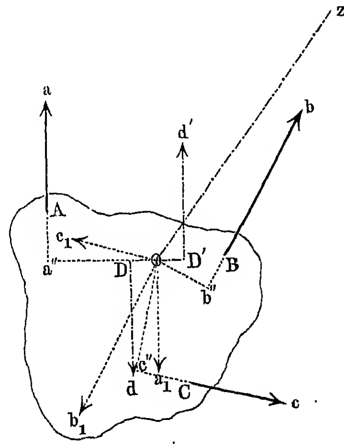


Fig. 174.



und einer drehenden Bewegung zusammengesetzt werden kann, wie bereits in § 58 behauptet wurde.

Wir wollen, um die mitgeteilte Methode deutlicher auseinanderzusetzen, ein Beispiel nehmen, bei welchem, um die Zeichnung nicht zu sehr zu komplizieren, alle Komponenten in einer Ebene sich befinden.

An den Punkten A, B und C des Körpers, Fig. 173, seien die Kräfte Aa, Bb und Cc nach der in der Zeichnung angegebenen Größe und Richtung angebracht. Wir wählen willkürlich den Punkt O und bringen an demselben die Kräfte Oa', Ob' und Oc' parallel und gleich den früheren Kräften an, außerdem noch die (gestrichelt ausgezogenen) entgegengesetzten Kräfte Oa_1, Ob_1 und Oc_1. Jetzt setzen wir Oa' mit Ob' zusammen, indem wir $a'n$ parallel zu Ob' und gleich lang wie dieses ziehen. Die (nicht ausgezogene) Resultierende On setzen wir mit Oc' zusammen, indem wir nz gleich, und parallel Oc' konstruieren. Mithin ist Oz die Resultierende der drei Kräfte Oa', Ob' und Oc'. Wir denken uns nun diese letzteren weggelöscht, es bleiben uns dann (Fig. 174) noch die Drehpaare Aa mit Oa_1, Bb mit Ob_1, Cc mit Oc_1 übrig. Die Figur zeigt, wie diese schiefen Drehpaare in rechtwinkelige verwandelt werden können. Reduziert man hierauf noch alle drei Paare auf den Arm $DD' = 1$ und summiert sie mit Rücksicht auf das Zeichen, so

bleibt endlich das nach links drehende Kräftepaar Dd und $D'd'$ am Arm
übrig, welches mitsamt der Resultierenden Oz alle ursprünglichen Kräft
ersetzen vermag. Damit ist aber noch nicht behauptet, daß der angegrif
Körper sich wirklich um den Punkt O drehen werde; denn dieser Punk
ja ganz willkürlich gewählt. Unsere Ableitung gibt nur resultierende Kr
die den ursprünglich vorhandenen an Wirkung gleich sind; welche Beweg
durch sie entsteht, hängt noch von anderen Umständen (von der Anordn
der Masse des Körpers oder von der Lage seiner Drehachse) ab (s. §
Schluß).

Soll der Körper in vollständiger Ruhe bleiben, d. h. sollen die sämtli
Komponenten miteinander im Gleichgewichte stehen, so muß sowohl die Re
tierende der parallel zu sich in einen beliebigen gemeinsamen Angriffspu
versetzten Kräfte = 0 sein, als auch das Moment des resultierenden D
paares = 0 sich ergeben.

§ 63. **Der Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt). Die Auffindung
Mittelpunktes paralleler Kräfte (§ 60) findet eine wichtige Anwendung
Ermittelung des Schwerpunktes oder Massenmittelpunktes.

Die Erde wirkt auf die Körper so, als wäre ihre *ganze* Masse im
mittelpunkte vereinigt. Die einzelnen Anziehungskräfte auf die Mas
teilchen der Körper sind daher, strenge genommen, nicht genau para
Berücksichtigt man aber die Größe des Erdhalbmessers (6370000 m) ge
über den Dimensionen der Körper, mit denen wir auf der Erdoberfläch
tun haben, so können wir diese Kraftrichtungen als parallel ansehen
demnach die Sätze des § 60 auf die Berechnung des Mittelpunktes der
zelnen Anziehungskräfte anwenden. Dieser Mittelpunkt aller auf einen Kö
wirkenden Schwerkräfte heißt sein Schwerpunkt, die Größe ihrer Re
tierenden gibt das Gewicht des Körpers. Dieses Gewicht P ist dem
gegeben durch

$$P = A\frac{Mm}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

worin M die Masse der Erde, m die des Körpers, R den Erdhalbmesser
A die sogenannte Gravitationskonstante bedeuten.

Die Lage des Schwerpunktes, in welchem dieses Gewicht P angr
können wir nach § 60 bestimmen, wobei wir daran erinnern, daß dem
Gesagten zufolge diese Lage ganz unabhängig ist von der Stellung des
pers zur Vertikalen; d. h. der Schwerpunkt des Körpers behält seine L
wenn wir den Körper beliebig drehen oder wenden. Gemäß § 60, Gleichun
sind die rechtwinkeligen Koordinaten X, Y, Z des Mittelpunktes paral
Kräfte je durch die Summe der Produkte aller Kräfte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ in
bezüglichen Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ usw. ihrer Angriffspunkte, divi
durch die Größe der Resultierenden P, gegeben. Ist die Acceleration
Schwere $= g$, haben die einzelnen Masseteilchen des Körpers die Ma
$m_1, m_2 \ldots$, so sind die Einzelkräfte $p_1 = m_1 g$, $p_2 = m_2 g \ldots$, die Resultiere
$P = Mg$, wenn $M = m_1 + m_2 + \cdots$ die Masse des ganzen Körpers bezeic
Somit sind die Koordinaten des Schwerpunktes gegeben durch

$$X = \frac{\Sigma mx}{\ldots}, \quad Y = \frac{\Sigma my}{\ldots}, \quad Z = \frac{\Sigma mz}{\ldots}$$

wonach die Lage des Schwerpunktes nur von der Verteilung der Massen $m_1, m_2 \ldots$ in ihm abhängt, weshalb er ganz richtig auch Massenmittelpunkt genannt wird.

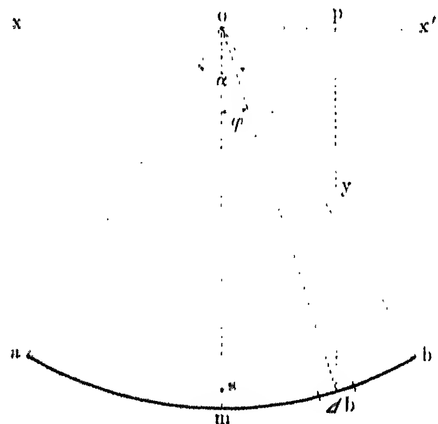
Die Lage des Schwerpunktes läßt sich entweder berechnen oder empirisch ausmitteln. Der erstere Weg ist bei regelmäßig geformten Körpern mit homogener oder doch regelmäßiger Massenordnung ausführbar und erfordert im allgemeinen die Anwendung der Integralrechnung. In einfacheren Fällen führt auch die elementare Rechnung zum Ziele. Nachstehende Beispiele zeigen dies für einige häufig vorkommende Fälle.

Gerade Linie, die man sich gleichmäßig mit Masse bedeckt denkt, bzw. eine dünne, überall gleich dicke homogene Stange. Ihr Schwerpunkt ist offenbar in der Mitte ihrer Länge gelegen . . . . (1)

Kreislinie (Ring). Ihr Schwerpunkt fällt in den Kreismittelpunkt. Man sieht hieraus, daß der Schwerpunkt nicht ein materieller Punkt des Körpers sein muß, sondern auch außerhalb der Körpergrenzen liegen kann . . (2)

Kreisbogen. Es sei in Fig. 175 amb der Bogen von der Länge b, entsprechend dem Winkel α, der Radius sei $= r$, die Sehne $ab = s$. Aus Symmetriegründen muß der Schwerpunkt auf der Mittellinie om in einem Abstande z vom Kreiszentrum liegen, welcher Abstand nun zu berechnen ist. Wir denken uns die Längeneinheit des Bogens mit der Masse 1 belegt, so daß also die Masse des ganzen Bogens $= b$ ist. Ferner denken wir uns den Bogen in unendlich kleine Elemente Δb zerlegt. Wir betrachten eines dieser Elemente, welches um den Winkel φ von m absteht. Denken wir uns nun den Bogen um eine durch den Kreismittelpunkt mit ab parallele Achse xx' gedreht, so muß, da das Drehungsmoment des Schwerpunktes gleich dem des Bogens sein muß, die Gleichung gelten:

Fig. 175.



$$bz = \Sigma . \Delta b . y = \Sigma . \Delta b\, r \cos \varphi,$$

wobei y der Abstand des Elementes Δb von xx' ist.

Da aber $\Delta b \cos \varphi$ die Projektion des Elementes Δb auf die xx'-Achse ist, so ist auch

$$bz = r . \Sigma \Delta x = r . s,$$

woraus für z folgt:

$$z = \frac{r . s}{b} = \frac{\text{Radius . Sehne}}{\text{Bogen}} \quad . . . . \quad (3)$$

Will man z durch den Winkel α und den Radius r ausdrücken, so erhält man, da

$$b = \frac{\alpha}{360}\, 2 r \pi \quad \text{und} \quad s = 2 r \sin \frac{\alpha}{2} \text{ ist:}$$

$$z = \frac{r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{360} \cdot \pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Für den Halbkreisbogen ist $s = 2r$, $b = r\pi$, folglich

$$z_1 = \frac{2r}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dreieck (homogene, überall gleich dicke, dreieckige Platte), Fig. 176. Wir denken uns das Dreieck in lauter unendlich schmale, zur Seite ab parallele Streifen zerlegt. Die Schwerpunkte aller dieser Streifen liegen in deren Mitte, also auf der Geraden, welche die Ecke c mit der Mitte von ab verbindet. Es muß also auch der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks auf dieser Geraden liegen. Da dasselbe auch von den anderen Verbindungsgeraden der übrigen Ecken mit den gegenüberstehenden Seitenmitten gelten muß, so folgt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks in deren Durchschnittspunkt, welcher um zwei Drittel der Länge dieser Geraden von der Ecke absteht, liegen muß . . . . (6)

Fig. 176.

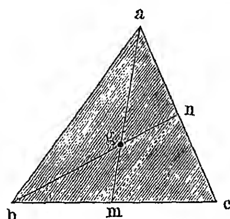


Fig. 177.

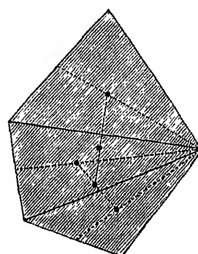
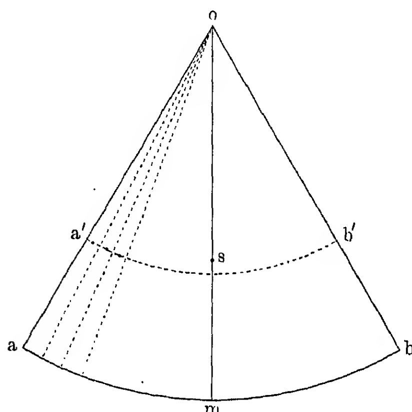


Fig. 178.



Polygon, Fig. 177. Man zerlegt dasselbe in Dreiecke, sucht für jedes deren Schwerpunkt nach der eben gegebenen Regel und aus diesen dann den des ganzen Polygons . . . . (7)

Kreisfläche. Dieselbe hat offenbar den Schwerpunkt in ihrem Zentrum . . . . (8)

Kreisausschnitt (Fig. 178). Der Schwerpunkt liegt jedenfalls auf der Halbierungslinie des Ausschnittes in einem Abstande z. Man denkt sich den Ausschnitt in unendlich viele kleine Ausschnitte zerlegt, die man dann als Dreiecke ansehen kann. Da jedes derselben nach (6) seinen Schwerpunkt im Abstande $\frac{2}{3}r$ vom Zentrum hat, so ist der gesuchte Schwerpunkt jener eines Kreisbogens $a'b'$ mit dem Radius $\frac{2}{3}r$. Derselbe hat aber nach (3) den Abstand

$$os = z = {}^2/_3 \frac{rs}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wo wieder s die Sehne und b den Bogen bedeuten.

Führt man den Winkel α des Ausschnittes ein, so erhält man

$$z = {}^2/_3 \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{360} \pi} = \frac{240 \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha . \pi} r \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Halbkreis. Setzt man in (9) $s = 2r$, $b = r\pi$, so kommt

$$z = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Der Schwerpunkt liegt also in der Symmetrielinie um $\frac{4}{3\pi} r$ vom Zentrum entfernt.

Kreisabschnitt. Die Integralrechnung führt zu dem komplizierten Ausdrucke für den Abstand z des Schwerpunktes vom Kreismittelpunkte:

$$z = \frac{{}^2/_3 (r^2 - a^2) \sqrt{r^2 - a^2}}{\frac{r^2 \pi}{2} - a \sqrt{r^2 - a^2} - r \, Arc. \left(\sin \frac{a}{r}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

worin a den Abstand der Schnittlinie vom Zentrum bedeutet.

Setzt man $a = 0$, so erhält man den Schwerpunkt des Halbkreises wie oben.

Fläche einer Kugelzone von der Höhe h, deren größerer begrenzender Kreis um a von dem Kugelmittelpunkte absteht. Die Integralrechnung führt zur einfachen Formel, daß der Abstand des Schwerpunktes vom Kugelmittelpunkte

$$z = a + \frac{h}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

ist, d. h. der Schwerpunkt liegt in der Zonenachse in halber Höhe der Zone.

Halbkugelzone. Setzt man in (13) $a = 0$, $h = r$, so kommt

$$z = \frac{r}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Rechtwinkeliges Prisma. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Achse . . . . (15)

Gerader Zylinder (auch Hohlzylinder). Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Achse . . . . (16)

Gerade Pyramide von der Höhe h (Fig. 179). Der Schwerpunkt liegt in der Achse in der Höhe

$$z = {}^3/_4 h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Gerader Kegel (Fig. 180) wie (17) . . . . (18)

Kugel und Kugelschale. Der Schwerpunkt fällt selbstverständlich ins Zentrum . . . . (19)

Kugelabschnitt. Der Schnitt im Abstande a vom Zentrum geführt. Die Integralrechnung ergibt für die Entfernung des Schwerpunktes vom Kugelmittelpunkte

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{r^2(r^2 - h^2) - \frac{1}{2}(r^4 - h^4)}{r^2(r - h) - \frac{1}{3}(r^3 - h^3)} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Halbkugel. Setzt man in (20) $h = 0$, so kommt

$$z = {}^3/_8\, r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Der Schwerpunkt liegt also um $^3/_8$ des Radius von dem Kugelmittelpunkte ab.

Die empirische Bestimmung des Schwerpunktes kann unter Umständen auf Grund des Satzes erfolgen, daß der Schwerpunkt eines aufgehängten Körpers immer senkrecht unter dem Aufhängepunkte liegen muß, sobald das Gleichgewicht eingetreten ist.

Man hänge den Körper an einem Punkte a auf, Fig. 181a, so wird die Verlängerung des den Körper tragenden Fadens in einem Punkte c aus dem Körper austreten. Auf der Linie ac muß notwendig der Schwerpunkt liegen.

Fig. 179.

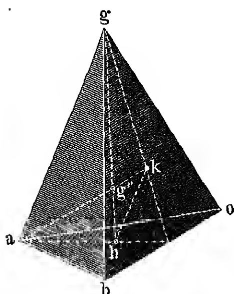


Fig. 180.

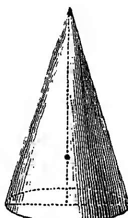


Fig. 181 a.

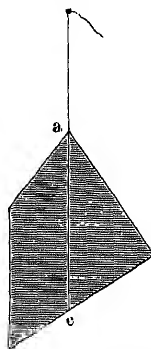
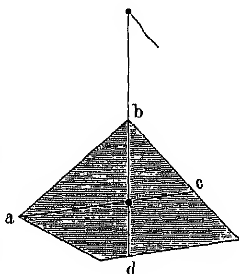


Fig. 181 b.



Hängt man den Körper in einem zweiten Punkte b, Fig. 181b, auf, so muß der Schwerpunkt abermals auf der Verlängerung des Fadens, also auf der Linie bd liegen; der Schwerpunkt liegt also auf dem Durchschnittspunkte der Linien bd und ac. Der Schwerpunkt von homogenen ebenen Scheiben ist nach dieser Methode leicht zu bestimmen; bei anderen Körpern ist es jedoch mit Schwierigkeiten verbunden, die Verlängerung des vertikalen Fadens durch das Innere des Körpers genau zu verfolgen.

§ 64. Vom Gleichgewicht aufgehängter Körper. Die einzige Gleichgewichtsbedingung fester, der Schwerkraft allein ausgesetzter Körper ist die, daß ihr Schwerpunkt unterstützt sei. Diese Bedingung kann aber auf verschiedene Weise erfüllt sein, je nachdem die Körper in festen Punkten aufgehängt sind oder auf Unterlagen ruhen.

Betrachten wir zunächst einen Körper, der an einem festen Punkte oder einer horizontalen Achse gleichsam aufgehängt ist, um welche er sich frei drehen kann, so ist er nur dann im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt s mit jenem festen Drehpunkte c oder der Drehachse in einer Vertikallinie liegt Was die gegenseitige Lage dieser Punkte betrifft, so sind folgende drei Fälle möglich:

thoden, aber zur Physik werden diese Disziplinen nicht gerechnet, denn der Physiker interessiert sich für diese Naturprodukte als solche nicht, solange sie keine Veränderungen erleiden oder zu einwirkenden Kräften in Beziehung treten.

Unter den bei der gegenseitigen Einwirkung der Körper entstehenden Veränderungen lassen sich zwei Gruppen ziemlich scharf unterscheiden. Diese Veränderungen sind entweder mehr äußerliche, die Lage, Form oder die Anordnung der wahrnehmbaren Teile derselben betreffend, nicht aber auf die materielle Zusammensetzung sich beziehend, oder aber sie erstrecken sich auf die innere materielle Beschaffenheit der Körper, indem dieselben durch ihre ganze Masse hindurch in Teile ungleicher materieller Beschaffenheit zerlegt oder aus solchen zusammengesetzt werden. Die erstere Gruppe bildet den Gegenstand der Physik, die letztere den der Chemie. Aber auch so wäre die Physik noch eine zu umfassende Wissenschaft, als daß sie von einem Menschen beherrscht werden könnte. Darum sind die Bewegungen der Weltkörper, der Fixsterne, Planeten, Kometen und Meteore einer eigenen Wissenschaft, der Astronomie, zugewiesen, ja selbst die Vorgänge in der Atmosphäre der Erde und verwandte Gegenstände werden meistens als eine besondere Abteilung der Physik unter der Bezeichnung Meteorologie abgetrennt.

Es möge das Vorgetragene noch durch ein Beispiel näher erläutert werden.

Ein Naturforscher findet ein Mineral, welches er an seiner rhombischen Kristallgestalt, seiner gelben Farbe, seiner Härte vom Grade 2, seinem spezifischen Gewichte = 2,07, seinem Knistern beim Erwärmen und seinem Geruche beim Zerreiben als natürlichen Schwefel erkennt. Als beschreibender Naturforscher hat er mit dieser Betrachtung der Eigenschaften und der Erkennung des Minerals, der Konstatierung des Fundortes und der Art des Vorkommens, endlich mit der Einreihung des Minerals in die systematische Sammlung seine hauptsächliche Aufgabe erfüllt. Zeigt das Mineral Eigenschaften und eine Zusammensetzung, wie sie an den bisher bekannten noch nicht beobachtet wurden, so kommt noch die genaue Untersuchung dieser Zusammensetzung und Eigenschaften und die Aufgabe der Namengebung und der Einreihung ins System dazu.

Der Physiker nimmt die Untersuchung der Eigenschaften wieder auf, aber in anderer Weise und Richtung. Er bringt an dem Stück Schwefel äußerliche Veränderungen hervor, indem er dasselbe der Einwirkung verschiedener Agenzien aussetzt. Durch Reiben wird der Schwefel elektrisch, durch Erwärmen dehnt er sich zuerst aus, dann schmilzt und verdampft er, durch Abkühlen wird er wieder in feste Kristallform gebracht usw. Aber bei keiner dieser Veränderungen zerfällt der Schwefel in zweierlei materiell verschiedene Bestandteile oder geht mit einem fremden Körper eine Verbindung ein; immer behält er den Namen „Schwefel“.

Noch weiter aber geht der Chemiker; er entzündet den Schwefel, wobei derselbe mit dem Sauerstoff der Luft zu schwefliger Säure verbrennt, oder er

1. Der feste Punkt c (die feste Drehungsachse) geht durch den Schwerpunkt des Körpers selbst hindurch, wie dies z. B. Fig. 182 darstellt. In diesem Falle liegen s und c, weil identisch, jedenfalls in einer Vertikalen, welche Lage man übrigens auch dem Körper gibt; es findet also Gleichgewicht statt, wie er auch gestellt sein mag, für die Stellung AB also ebensogut wie für die Stellung CD.

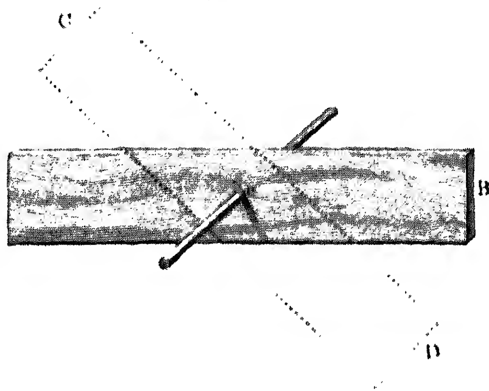


Fig. 182.

Es ist dies der Fall des indifferenten Gleichgewichtes.

2. Der Schwerpunkt s liegt vertikal unter dem Drehpunkte (der Drehachse) c, Fig. 183. Dreht man den Körper aus dieser Lage heraus, so daß etwa der Schwerpunkt nach s' kommt, so führt die Schwerkraft den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurück, sobald die störende Kraft zu wirken aufhört. Ein solches Gleichgewicht wird ein beständiges oder stabiles genannt. Liegt endlich

3. der Schwerpunkt s des Körpers vertikal über dem Drehpunkte (der Drehachse) wie Fig. 184, so befindet sich der Körper im Zustande des labilen

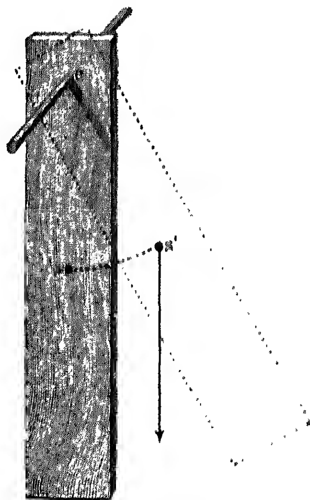


Fig. 183.

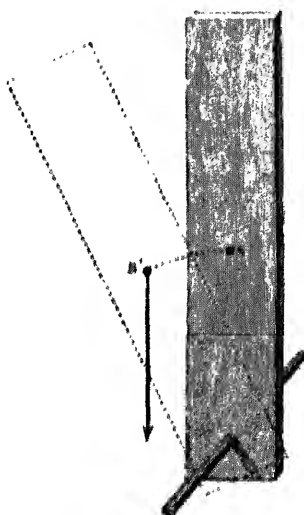


Fig. 184.

oder unbeständigen Gleichgewichtes; denn wenn die geringste störende Kraft den Körper aus dieser Lage herausbringt, so wirkt die im Schwerpunkte s' angreifende Schwerkraft des Körpers dahin, ihn noch weiter aus dieser Gleichgewichtslage zu entfernen, und er kann nicht eher wieder zur Ruhe kommen, als bis nach einer halben Umdrehung der Schwerpunkt vertikal unter

dem Drehpunkte angekommen und ein neues, nunmehr stabiles Gleichgewicht eingetreten ist.

Einen interessanten Fall des stabilen Gleichgewichtes zeigt Fig. 185.

Ein Holzstück B, welches unten mit einer Stahlspitze versehen ist, wird mit dieser auf ein flach ausgehöhltes Metallstückchen gesetzt, welches die obere Endfläche des Stativs A bildet. Für sich allein würde es umfallen, weil sein Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkte liegt. Wenn aber durch B ein Drahtbogen MN gezogen wird, welcher an beiden Enden die Bleikugeln pp trägt, so daß durch dieselben der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Holzstückes B und der Bleikugeln unter die Stahlspitze fällt, so findet nun ein stabiles Gleichgewicht statt, B fällt nicht mehr um; der Körper ist jetzt eigentlich aufgehängt.

Fig. 185.

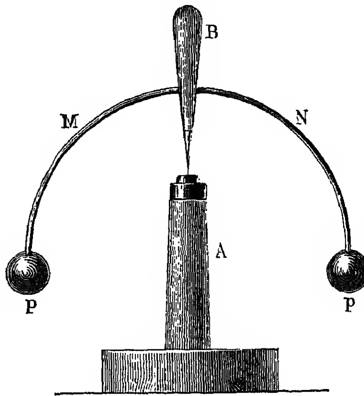
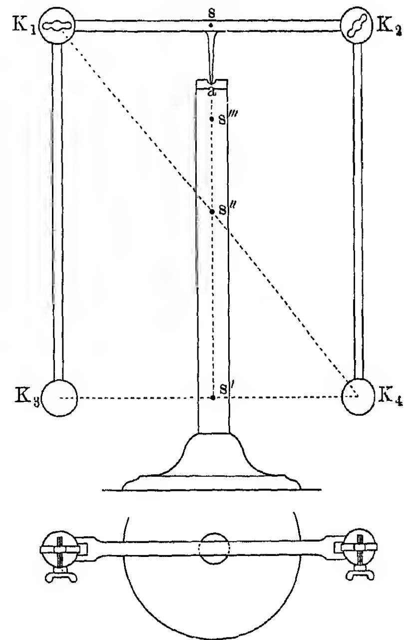


Fig. 186.



Man gibt manchmal dem auf die Spitze gestellten Körper die Gestalt einer menschlichen Figur, z. B. eines Seiltänzers, welcher zwei Eimer in den Händen trägt und auf einem horizontal gespannten Drahte balanciert. Instruktiver ist ein von Bock stammender Apparat, wovon Fig. 186 einen Auf- und Grundriß gibt. An den Enden des Querstabes sind die schweren Kugeln K_1 und K_2 befestigt, welche zugleich Gelenke bilden, in denen die vertikal herabgehenden, die gleich schweren Kugeln K_3 und K_4 tragenden Stäbe beweglich eingehängt sind. Durch Anziehen der Flügelschrauben lassen sich aber diese Gelenke fest stellen, so daß eine starre Verbindung entsteht. Vernachlässigen wir die Masse der leichten Stäbe gegenüber der der Kugeln, so ist ersichtlich, daß der gemeinsame Schwerpunkt der oberen Kugeln in s, jener der unteren Kugeln in s', der Schwerpunkt aller zusammen in s'' liegen muß. Das starre System hat daher seinen Schwerpunkt s'' unter dem Aufhängepunkt a und ist deshalb stabil.

Lockert man eines der Gelenke, z. B. bei K_1, so wirkt die Masse der Kugel K_3 so, als ob sie in K_1 wäre. Der gemeinsame Schwerpunkt der unteren beiden Kugeln kommt also dann scheinbar nach s'' zu liegen, der

Schwerpunkt des ganzen Systems nach einem Punkte bei s'''. Er liegt unter den gegebenen Bedingungen immer noch **unter** der Spitze a, und es herrscht daher noch immer stabiles Gleichgewicht. Sobald man aber auch das andere Gelenk K_2 lockert, so daß beide Vertikalstangen schwingen können, ist es so, als ob die Schwerpunkte der unteren Kugeln in die oberen verlegt wären. Der Schwerpunkt des ganzen Systems erscheint dann in s, und das Gleichgewicht ist ein labiles geworden.

§ 65. Vom Gleichgewicht aufgestellter Körper, Standfestigkeit. Wenn ein Körper mit mehr oder weniger breiter Basis auf dem Boden steht, so muß die durch seinen Schwerpunkt gezogene Vertikale noch die Basis selbst treffen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Demnach muß der schiefe Zylinder, Fig. 187, im Gleichgewicht sein, wenn er nur die in der Figur schattierte Länge hat; er würde umfallen müssen, wenn er die durch punktierte Linien angedeutete Höhe hätte.

Man versteht unter **Standfestigkeit** das Moment, mit welchem sich ein auf seiner Basis ruhender Körper seinem Umwerfen (Umkippen) um eine Kante dieser Basis widersetzt.

Soll z. B. der prismatische Körper, den Fig. 188 im Durchschnitt darstellt, durch eine in seinem Schwerpunkte s angreifende Kraft P um seine

Fig. 187.

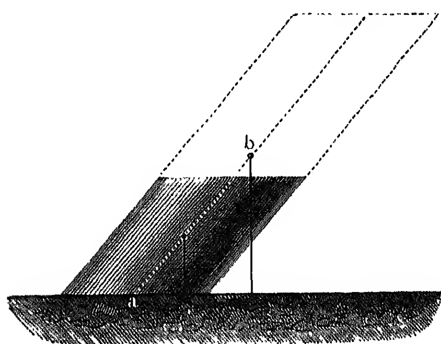
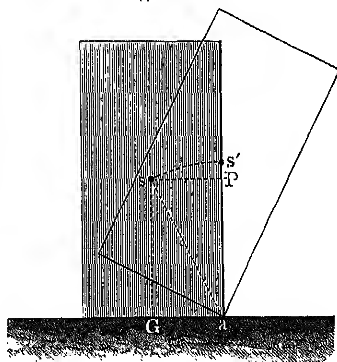


Fig. 188.



Kante bei a umgestürzt werden, so ist der Hebelarm, an welchem diese Kraft P in bezug auf die Drehachse a wirkt, gleich der Höhe h des Schwerpunktes über der Basis des Körpers, also das Moment derselben $= P.h$. Diesem Moment wirkt entgegen dasjenige des Gewichtes G des Körpers, das ebenfalls im Schwerpunkt s angreift. Dieses Moment ist $G.b$, wenn b den horizontalen Abstand der Drehkante a von dem Lote $s\,G$ bedeutet. Es findet demnach Gleichgewicht statt, solange

$$P = G\frac{b}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist, d. h. es muß die Kraft P um so größer werden, je größer das Gewicht G des Körpers und die Breite b der Basis und je kleiner die Höhe des Schwerpunktes über der Basis ist.

Ist der Körper bereits um einen gewissen Winkel α um die Achse a gedreht, wie Fig. 189 andeutet, so ändert sich die Kraft P, welche ihm das

Gleichgewicht hält. Bezeichnen wir wiederum die Strecke ab mit b, die Hö
sb mit h, so tritt in dieser neuen Lage an Stelle von ab der Absta
$ae = ad - ed = b.\cos\alpha - h.\sin\alpha$, und an die Stelle von sb tritt
Strecke $se = bd + sc = b.\sin\alpha + h\cos\alpha$.

Die Gleichung (1) verwandelt sich dann in die folgende

$$P = G\,\frac{b.\cos\alpha - h\sin\alpha}{b.\sin\alpha + h.\cos\alpha} = G\,\frac{b - h\,tang\,\alpha}{b\,tang\,\alpha + h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Daraus folgt, daß die Kraft P gegenüber dem Gewichte G des Körp
um so kleiner werden muß, je näher der letztere durch die Drehung in
Fig. 188 angedeutete Lage gebracht ist, wo der Schwerpunkt s vertikal ül
der Kante a liegt oder $b - h\,tang\,\alpha = 0$ wird. In letzterem Falle herrsc
labiles Gleichgewicht, und eine unendlich kleine Kraft P bewirkt das Umfall

Nicht immer befindet sich der Schwerpunkt dort, wo wir ihn nach
äußeren Gestalt des Körpers vermuten, weil er durch eine unhomogene V

Fig. 189.

Fig. 190.

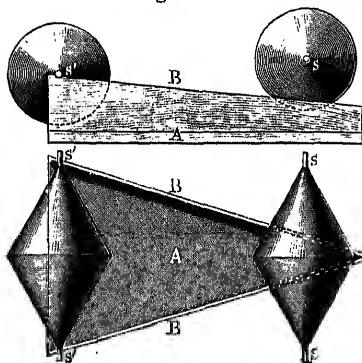
Fig. 191.

teilung der Massen von der Stelle gerückt ist. Darauf beruhen dann Ersch
nungen, die uns auf den ersten Moment überraschen, bis wir ihre Ursac
erkannt haben. Hierher gehören z. B. die sogenannten **Stehaufmännche**
Fig. 190. Sie bestehen aus einer Figur aus Holundermark, welche auf ein
bleiernen Fuß in Form eines umgekehrten Kegelstumpfes aufgekittet
Ein solches Männchen kann weder in der Lage I noch in der Lage II v
bleiben, weil der Schwerpunkt s nicht unterstützt ist. Dies ist erst in
aufrechten Lage III der Fall. Der **bergauf laufende Zylinder**, Fig. 1
ist eine Walze aus Holz, welche durch Einguß von Blei ihren Schwerpunk
außerhalb der Achse nahe der Mantelfläche erhalten hat. In der Lage
kann derselbe auf der schiefen Ebene nicht stehen bleiben, er rollt aufwär
bis er in die Lage II gekommen ist. Auf einem anderen Prinzip beruht
scheinbar bergauf laufende Doppelkegel. Fig. 192 zeigt denselben im A
und Grundriß. Der Doppelkegel ss wird auf eine schiefe Ebene aufgeset
die aus den beiden im Winkel auf das Grundbrett A aufgeleimten Seit
brettchen B, B gebildet wird. Er bleibt dann nicht stehen, sondern wand
nach der Lage $s's'$, was bei oberflächlicher Betrachtung den Schein erwec
als rolle er aufwärts. Man sieht aber sofort beim Anblick des Aufriss
daß der in der Achse gelegene Schwerpunkt s in Wirklichkeit nicht stei

vielmehr auf dem Wege nach s' sinkt, was daher kommt, daß der Doppelkegel im Anfang der Bewegung an seiner dicksten Stelle, am Ende derselben mit den dünnen Enden auf den divergierenden Leisten aufruht.

Andere kompliziertere Schwerpunktsapparate sind der einfache und doppelte Treppenläufer, Figuren mit beweglichen Gliedern, welche teilweise mit Quecksilber gefüllt sind. Die durch die Bewegung des letzteren eintretenden Schwerpunktsverschiebungen verursachen die possierlichen Bewegungen dieser Figuren. Wir erwähnen alle diese Apparatchen, weil sie nun einmal zum Inventar der physikalischen Kabinette gehören und deshalb dem Physiker bekannt sein müssen.

Fig. 192.



Auch bei den Bewegungen und Haltungen des menschlichen Körpers spielt der Schwerpunkt eine wichtige Rolle. Der Mann, Fig. 193, der eine Last auf dem Rücken trägt, muß sich nach vorn beugen, der Gärtner, Fig. 194, nach der rechten Seite neigen, um den Schwerpunkt in jene Lage zu bringen, daß die Vertikallinie durch denselben innerhalb der Fußbasis zu liegen kommt.

Fig. 193.



Fig. 194.



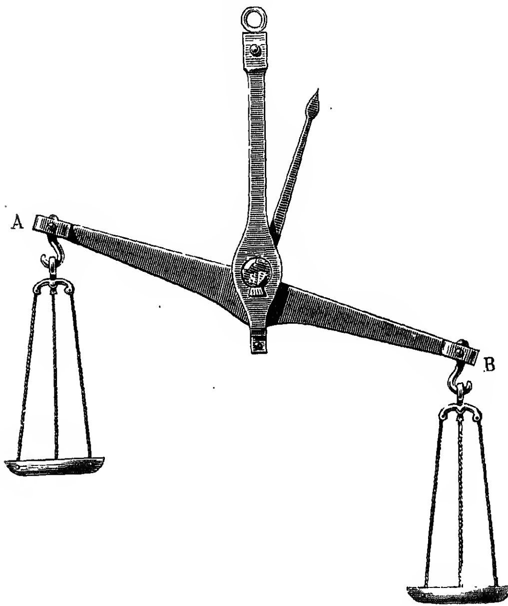
§ 66. Die gleicharmige Wage; Richtigkeit derselben. Die gleicharmige Wage, in einfachster Ausführung wie in Fig. 195 auch Krämerwage genannt, beruht auf den in den §§ 56 und 60 abgeleiteten Sätzen und dient zur Vergleichung der Gewichte der Körper zum Zwecke der Bestimmung ihrer Massen.

Die gleicharmige Wage besteht aus einem aus zwei symmetrischen Armen bestehenden Wagebalken AB, welcher um eine horizontale Achse (Mittelachse) drehbar, und zwar im stabilen Gleichgewichte aufgehängt ist. Die Mittelachse wird durch die nach abwärts gerichtete Kante s eines am Balken befestigten Prismas aus hartem Material gebildet (Mittelschneide), welche auf einer Unterlage (Pfanne), ebenfalls aus hartem Material, aufruht. An den Enden des Balkens sind ebensolche, aber nach aufwärts gerichtete

Kanten (Endschneiden, Endachsen) befestigt, auf welchen die Gehänge entweder ebenfalls mit Pfannen oder in einfacherer Weise aufgehängt sind, welche die Schalen tragen.

Zur leichteren Konstatierung der horizontalen Lage des Wagebalkens oder auch zur Messung der Abweichung von derselben ist senkrecht auf die Längsrichtung des Balkens in der Mitte desselben nach aufwärts oder abwärts ein metallener Zeiger, die Zunge, befestigt, welche bei horizontaler Lage des Balkens auf eine Marke oder auf den mittleren Teilstrich einer Skala zeigt, welcher meistens, aber nicht immer, mit Null bezeichnet ist. Wenn die Zunge, sobald der Balken zur Ruhe gekommen ist, auf diesen mittleren Teilstrich zeigt, sagt man, die Wage „spiele ein" oder sie sei im Gleichgewicht. Das Eintreten dieses Ruhezustandes wird aber nicht immer abgewartet, sondern meist aus den Ausschlägen der Zunge erschlossen.

Fig. 195.



Die Mittelpfanne ist nur bei Handwagen oder solchen von geringerer Genauigkeit, wie in Fig. 195, an einer Schere aufgehängt. Bei genauen Wagen ruht sie auf einer feststehenden Metallsäule. Ferner ist bei genauen Wagen dafür gesorgt, daß der Balken und die Schalen, manchmal auch die Gehänge, während des Nichtgebrauches der Wage separat unterstützt werden können, um einen schädlichen Druck auf die Schneiden und dadurch eine Abnutzung derselben zu vermeiden.

Es geschieht dies durch die Arretierungsvorrichtungen. Endlich werden feine Wagen durch Wagekästen mit Glaswänden gegen Staub und Luftzug geschützt, deren Unterbau zwischen den Schubladen zur Unterbringung der Gewichte und Utensilien gewöhnlich noch eine durch einen Schlüssel in Drehung zu setzende Achse enthält, mittels welcher die Arretierung aufgehoben oder wirksam gemacht werden kann.

Daß der Wagebalken stabil aufgehängt, also die Mittelachse über dem Schwerpunkte angebracht sein müsse, damit man mit der Wage wägen könne, ist leicht einzusehen. Wäre die Aufhängung indifferent, also der Schwerpunkt in die Mittelachse fallend, so würde bei gleicher Belastung der Balken in jeder Lage stehen bleiben. Bei ungleicher Belastung würde ein großes Übergewicht keine andere Wirkung hervorbringen als ein kleines; beide würden die mehr belastete Schale bis zur Hemmung heruntersinken machen. Man hätte also kein Mittel, zu erkennen, wie weit man noch vom Gleichgewichte entfernt ist. Bei labilem Gleichgewichte würde der Balken fortwährend auf

der einen oder der anderen Seite bis zur Hemmung niedersinken. Nur bei der stabilen Aufhängung ist es möglich, aus der Größe der Abweichung von der horizontalen Lage den Betrag der noch fehlenden Gewichtsstücke zu schätzen und so durch systematisches Probieren sich der gleichen Belastung sicher zu nähern.

Man nennt eine Wage richtig, wenn ihr Balken bei beliebig großer gleicher Belastung der beiden Schalen in horizontaler Lage zur Ruhe kommt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Konstruktionsbedingungen erfüllt sein müssen, damit die Wage richtig sei.

Es stelle Fig. 196 eine schematische Zeichnung einer Wage vor. AB sei die Verbindungslinie der Endschneiden. In der Mitte dieser Geraden soll,

Fig. 196.



wie wir später erörtern werden, die Mittelschneide C und senkrecht darunter der Schwerpunkt c liegen. Wir wollen aber die Armlängen AC und BC vorderhand als möglicherweise ungleich mit L und L' bezeichnen. Denkt man sich den Balken durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften geteilt, so kann man sich vorstellen, daß jede dieser Hälften für sich einen Schwerpunkt habe. Diese Punkte seien in a und b gelegen, deren Abstände von der Mitte wir ebenfalls als möglicherweise ungleich mit l und l' bezeichnen. Es sollen ferner bedeuten:

p und p' die in a und b wirkenden Gewichte der Balkenhälften,
S und S' die Gewichte der beiden Schalen,
P und P die gleichen Gewichte der beiderseits aufgelegten Gewichtsstücke.

Soll die Wage in horizontaler Lage zu Ruhe kommen, so muß auf beiden Seiten beim Eintritte dieser Lage die Summe der Drehungsmomente gleich groß sein. Es muß also die Gleichung erfüllt sein:

$$PL + SL + pl = PL' + S'L' + p'l' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soll diese Gleichung für beliebige gleiche Belastungen P gültig bleiben, so muß $L = L'$ sein, d. h. die Wage muß genau gleicharmig sein (erste Bedingung der Richtigkeit).

Es bleibt somit von Gleichung (1), wenn wir $L = L'$ setzen, noch übrig:

$$SL + pl = S'L + p'l' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Soll diese Gleichheit auch dann fortbestehen, wenn der Wagebalken infolge Temperaturänderungen eine Änderung seiner Dimensionen erleidet, so müssen zunächst:

$$l = l' \text{ und } p = p' \text{ sein, woraus dann auch } S = S' \text{ folgt} \quad . \quad . \quad (3)$$

Das heißt also, es müssen die Schwerpunkte der Arme eine gleiche E fernung von der Drehschneide haben und diese Arme sowie die Scha gleiches Gewicht besitzen. Diese Bedingungen lassen sich dahin formulier daß die beiden Wagebalkenarme in bezug auf Masse und ihre V teilung und Anordnung durchaus symmetrisch seien (zweite Bed gung der Richtigkeit) und die Schalen gleiches Gewicht besitzen (dri Bedingung der Richtigkeit).

Es könnte scheinen, daß der Gleichung (2) auch dadurch entsprocl werden könnte, daß man ein größeres Balkengewicht auf einer Seite du ein entsprechend größeres Schalengewicht auf der anderen Seite kompensie Die Wage würde dann allerdings bei allen gleichen Belastungen so unbelastet im Gleichgewichte bleiben, aber nur so lange, als sich die Te peratur nicht ändert. Geschieht dies, so rücken die unsymmetrischen Mas der Arme von der Drehschneide hinweg oder nähern sich derselben und v ändern dadurch die Drehungsmomente pl und $p'l'$ um ungleiche Wer ebenso ändern sich die Drehungsmomente SL und $S'L$ um ungleiche Größ und diese sämtlichen Änderungen werden sich im allgemeinen nicht komp sieren, sondern die Wage unrichtig machen.

Aus (2) folgt, daß eine richtige Wage auch ohne Belastung der Scha horizontal stehen muß, aus (3), daß dies auch dann eintreten muß, wenn m die Schalen wegnimmt oder vertauscht.

Aus dem Umstande allein, daß die Wage mit unbelasteten Schalen ho zontal stehen bleibt, folgt aber noch nicht die Richtigkeit derselben, da, oben erwähnt, ein größeres Gewicht des einen Armes durch ein größer Gewicht der anderen Schale kompensiert sein könnte.

Auch das Horizontalstehen des Balkens ohne Schalen ist für sich no kein Beweis für die Richtigkeit der Wage. Sie könnte nämlich unglei armig sein und diese Ungleichheit durch unsymmetrische Massenanordnu kompensiert sein.

Um also eine Wage vollständig auf ihre Richtigkeit zu prüfen, hat m folgende Proben vorzunehmen:

1. Man läßt die Wage bei unbelasteten Schalen einspielen und vertaus dann die Schalen. Zeigt sie beide Male auf 0 oder doch auf denselben Skale teil, so sind die beiden Schalen gleich schwer.

2. Man belastet die beiden Schalen mit den größten gleichen Gewicht für welche die Tragkraft der Wage ausreicht, und stellt, wenn nötig, das E spielen auf 0 durch kleine Zulegegewichtchen her; hierauf vertauscht man Schalen samt den darauf befindlichen Gewichten. Zeigt sich kein Untersch in dem Einspielen, so ist die Wage gleicharmig.

3. Man bringt die Wage bei ziemlich großen Belastungen zum Einspiel und setzt sie dann Temperaturänderungen aus, welche aber für beide Ar in gleicher Weise erfolgen müssen. Zeigt sich dann wieder kein Unterschi im Einspielen, so ist auch die Masse an beiden Armen symmetris angeordnet.

Ist durch die Probe 2. die Gleicharmigkeit der Wage erwiesen, so erken man aus dem Ausfalle der Probe 1., wenn dieselbe die Gleichheit der Schale gewichte ergeben hat, überdies noch, ob auch die beiden Arme gleich schw sind. In diesem Falle stellt sich die Wage vor und nach Vertauschung Schalen horizontal. Nimmt sie aber hierbei beide Male nach derselben Se

lbe schiefe Stellung ein, so sind die Arme ungleich schwer. Weicht sie gen beide Male nach entgegengesetzten Richtungen um gleich viel ab, lgt daraus die Ungleichheit der Schalen.

Die Probe 2. kann auch ohne Aushängen der Schalen ausgeführt werden, n man die Wage zuerst ohne Belastung, wenn nötig, durch eine kleine ge ins Einspielen bringt und dann vollkommen gleich große Gewichte rseits auflegt. Spielt die Wage neuerdings ein, so ist sie gleicharmig. nan aber selten sicher ist, daß die verfügbaren größeren Gewichte vollnen gleich sind, so verfährt man am zweckmäßigsten auf folgende Weise, i man den Fehler nicht bloß nachzuweisen, sondern auch der Größe nach estimmen vermag:

Man beobachtet den Ruhepunkt der Zunge bei unbelasteter Wage (aber angehängten Schalen), setzt dann die wenigstens angenähert gleichen chte auf, deren genaue Werte mit P und P' bezeichnet seien, und fügt links oder rechts, wo es eben nötig ist, noch das Zulagegewichtchen p , um die Zunge wiederum auf dieselbe Ruhelage zu bringen. Hierauf uscht man die Gewichte und verfährt ebenso wie früher. Das diesmal er anderen Seite benötigte Zulagegewichtchen betrage q.

Sind die Längen der beiden Arme L und L', so ergeben sich hieraus eiden Gleichungen:

$$L(P + p) = L'P'$$
$$LP' = L'(P + q).$$

Durch Addition beider erhält man:

$$L(P + P' + p) = L'(P + P' + q),$$

us das Verhältnis der Armlängen

$$\frac{L}{L'} = \frac{P + P' + q}{P + P' + p} = \text{(angenähert) } 1 + \frac{q - p}{P + P'}$$

Die letzte Umformung beruht auf der Erwägung, daß die Gewichtchen q gegenüber $P + P'$ sehr klein sind. Infolgedessen unterscheidet sich Drehungsmoment Lp von $L'p$ nur um die verschwindend kleine Größe $L')p$. Man kann sich daher vorstellen, man habe, statt auf der linken das Gewichtchen p zuzulegen, dasselbe auf der rechten Seite fortmen.

Die obige Gleichung wird dann:

$$L(P + P') = L'(P + P' + q - p),$$

ns sofort

$$\frac{L'}{L} = 1 + \frac{q - p}{P + P'}$$

Aus dem gleichen Grunde kann man auch, falls beide Übergewichtchen erselben Seite aufzulegen wären, eines derselben als negatives auf der en Seite ansehen. Für $P + P'$ kann man die Summe der Nennwerte Gewichte einsetzen.

Zahlenbeispiel: Man habe auf die bei leeren Schalen im Gleichgewichte lliche Wage aufgelegt:

Links:	Rechts:
ein 500 g-Stück nebst 0,5 mg;	ein 200 g-Stück und 3 Stücke zu 100 g.

Die links zugelegten 0,5 mg stellen das Gleichgewicht her.

Hierauf vertausche man und habe bei wieder eingetretenem Gleichgewicht:

Links:	Rechts:
das 200 g-Stück und die 3 Stücke zu 100 g;	das 500 g-Stück nebst 5,5 mg;

folglich ist:

$$p = 0{,}5 \text{ mg} \quad q = 5{,}5 \text{ mg} \quad P + P' = 1000 \text{ g} = 1\,000\,000 \text{ mg}$$

$$\frac{L}{L'} = 1 + \frac{5{,}5 - 0{,}5}{1\,000\,000} = 1{,}000\,005.$$

Eine solche Ungleichheit ist bei den Wägungen entweder durch Rechnung zu korrigieren, oder durch die Methode der Wägung zu eliminieren, oder endlich an der Wage selbst mittels hierzu angebrachter Adjustierungsvorrichtungen wegzuschaffen, worüber später Näheres mitgeteilt werden soll. Überhaupt sind die obigen Bedingungen der Richtigkeit nicht zugleich als die Bedingungen der Brauchbarkeit anzusehen. So z. B. ist eine kleine Ungleichheit im Gewichte der Schalen, ja sogar der Balkenhälften von geringer Bedeutung, da man sie durch die Art des Wägens ebenfalls eliminieren kann.

Viel wichtiger ist, daß die Wage bei wiederholter Arretierung und Auslösung immer wieder in gleicher Weise einspiele, daß ferner die Schwingungsbögen nur langsam abnehmen (also die Reibung an der Achse sehr gering sei), daß die Arretierung den Balken beiderseits gleichzeitig loslasse; ferner daß eine Verstellung der Gewichtsstücke auf derselben Schale keine Änderung im Einspielen zur Folge habe, endlich daß die Wage die nötige Empfindlichkeit habe, worüber der folgende Paragraph handeln soll.

§ 67. Empfindlichkeit der Wage. Eine Wage, mit welcher man genau wägen will, muß empfindlich sein, d. h. sie muß schon bei einem sehr kleinen Übergewicht p einen meßbaren Ausschlag α geben. Die Empfindlichkeit ist also verkehrt proportional dem dazu erforderlichen Übergewichte, also direkt proportional dem reziproken Werte desselben $\frac{1}{p}$. Wir wollen nun untersuchen, von welchen Konstruktionsbedingungen diese Empfindlichkeit abhängt.

Es seien A und B in Fig. 197 die Endschneiden eines Wagebalkens, an denen die gleichen Gewichte P und P (die Schalen inbegriffen) hängen.

Durch die Mitte von AB in M denken wir uns in der Zeichnungsebene eine Senkrechte gezogen. In dieser müssen der Aufhängepunkt C (die Mittelschneide) und der Schwerpunkt S gelegen sein. Daß der letztere unterhalb des ersteren sich befinden müsse, haben wir bereits erörtert, da sonst kein stabiles Gleichgewicht bestehen könnte. Hingegen ist in bezug auf die relative Lage des Aufhängepunktes C gegenüber M bisher noch nichts festgestellt.

Nehmen wir daher einmal an, derselbe befinde sich über dem Mittelpunkte M, wie Fig. 197 zeigt, in C. Nach dem Auflegen des Übergewichtes p auf die linksseitige Schale nimmt die Wage die neue Ruhelage an, welche

heißen.

Die Arbeiten des Mineralogen, des Physikers und des Chemikers greifen demnach vielfach ineinander über. Auch der Mineraloge zersetzt die Mineralien, um sie zu erkennen, und der Chemiker interessiert sich um deren Vorkommen, da er sie zur Herstellung seiner Präparate benötigt. Allein dadurch wird die obige Abgrenzung nicht umgestoßen; denn indem der Mineraloge die Mineralien zersetzt, tritt er eben als Chemiker auf und benutzt die Chemie als Hilfswissenschaft der Mineralogie. Ebenso macht der Chemiker für seine Zwecke physikalische Messungen, und der Physiker führt chemische Operationen aus oder benutzt chemische Prozesse zur Erzeugung von Wärme oder Elektrizität.

Physik und Chemie insbesondere sind einander ganz unentbehrlich. Ein großes Grenzgebiet beider, welches sich als physikalische Chemie zu einer eigenen Disziplin entwickelt hat, ist ihnen gemeinschaftlich angehörig, und es sind nur äußerliche praktische Gründe, welche eine gesonderte Behandlung derselben erheischen.

§ 3. Quellen des physikalischen Wissens. Das menschliche Wissen wird im allgemeinen aus drei verschiedenen Quellen geschöpft; diese sind: die Autorität, die Spekulation und die Erfahrung.

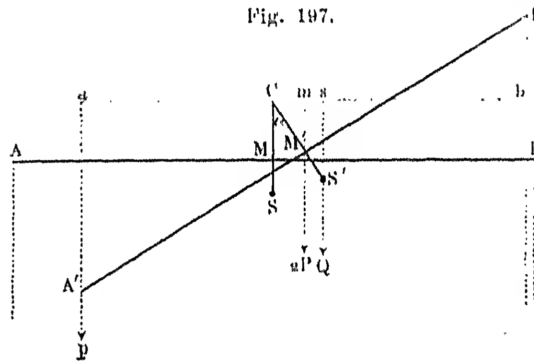
Die Autorität von Personen oder von Schriftwerken galt früher überhaupt und gilt heute noch dem Theologen als Hauptquelle für wissenschaftliche Wahrheiten. Für die physikalische Forschung ist sie nicht allein ohne Wert, sondern geradezu von schädlichem Einflusse, wie dies die Geschichte der Physik mehrfach bewiesen hat.

So z. B. zogen die Kirchenväter, gestützt auf die Autorität der Heiligen Schrift, physikalische Schlüsse über die Gestalt und Beschaffenheit der Erde, sowie über deren Stellung zum Weltall, welche sich als gänzlich unhaltbar und irrig erwiesen haben. Ebenso war die Autorität des Aristoteles und seiner Schule auf Jahrhunderte hinaus ein Hemmschuh für die Entwickelung der Wissenschaft. Der Kampf gegen das Kopernikanische System und die Verfolgung seines geistreichen Vorkämpfers Galilei war der hoffentlich letzte gewaltsame Versuch, der Autorität auf physikalischem Gebiete Geltung zu verschaffen. Seitdem dieser Versuch so gründlich gescheitert ist, nahm die Physik erst ihren ungehemmten Aufschwung. Selbst das unbedingte Vertrauen auf die Autorität berühmter Physiker ist verwerflich und hat nicht selten geschadet.

Die Spekulation, d. h. die reine Forschung mittels des Denkens ohne Zuhilfenahme der Erfahrung hat in der Mathematik unbestrittene, in der Philosophie weniger sichere Erfolge aufzuweisen. In der Physik ist sie ebenfalls nur insoweit als Quelle neuen Wissens zulässig, als sie sich auf mathematischem Boden bewegt. Wo letzteres nicht der Fall ist, ist sie unfruchtbar oder schädlich. Belege hierfür sind die Mißerfolge der griechischen Philosophen auf physikalischem Gebiete, die Unfruchtbarkeit jener Jahrhunderte, während welcher die Aristotelische Metaphysik Geltung hatte, ohne daß der

um den Aufhängepunkt C dem Winkel α entsprechende Kreisbogen beschrieben.

Fig. 197.



Ist die Wage in Ruhe gekommen, so muß die Summe der Drehungsmomente beiderseits gleich groß sein. Die beiden gleichen Gewichte P und P können wir uns in dem Punkte M vereinigt denken. Das Gewicht des Balkens Q greift in S' an, das Übergewicht p in A'. Ziehen wir die Horizontale durch C und die vertikalen Hilfslinien $A'a$, $M'm$, $S's$, $B'b$, so muß die Gleichung bestehen:

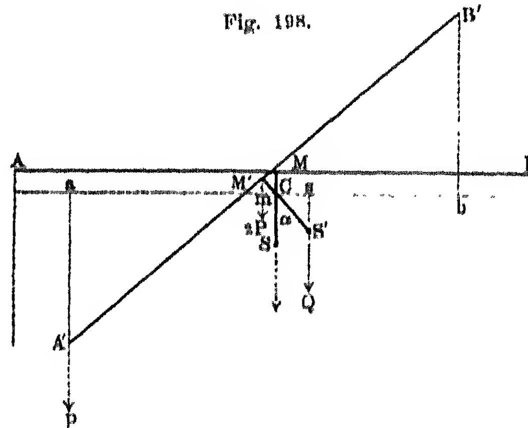
$$p \,.\, Ca = Q \,.\, Cs + 2\,P \,.\, Cm,$$

also:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \,.\, Cs + 2\,P \,.\, Cm}.$$

Man ersieht aus diesem Ausdrucke zunächst, daß die Empfindlichkeit außer von den übrigen Konstruktionsverhältnissen der Wage insbesondere

Fig. 198.



noch von der Größe der Belastung der Endschneiden abhängt, und zwar nimmt in diesem Falle die Empfindlichkeit ab, wenn die Belastung zunimmt.

In Fig. 198 ist der andere Fall dargestellt, wo der Aufhängepunkt C sich **unterhalb** der Mitte M befindet. Für diese Lage erhält man:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \,.\, Cs - 2\,P \,.\, Cm}.$$

Hier nimmt die Empfindlichkeit zu, wenn die Belastung $2P$ zunimmt. Soll die Wage nicht indifferent werden oder gar umschlagen, so darf jedoch $2P.Cm$ nicht gleich $Q.Cs$ oder gar größer werden.

Diese Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Belastung ist bei einer guten Wage möglichst zu vermeiden. Man erreicht dies, indem man das Produkt $2P.Cm = 0$ macht. Dazu ist nur nötig, die Länge $Cm = 0$ zu machen, indem man den Aufhängepunkt C in die Mitte M verlegt, so daß also alle drei Drehschneiden in eine Ebene zu liegen kommen.

In diesem dritten Falle geht die Figur in die einfachere Form (Fig. 199) über, und die Gleichgewichtsbedingung lautet nun:

$$p.Ca = Q\,Cs,$$

daraus folgt:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q.Cs}.$$

Da Ca proportional der Balkenlänge, Cs proportional dem Abstande des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte ist, so ergibt sich hiermit:

Die Empfindlichkeit direkt proportional der Balkenlänge . . . . . . (1)
„ „ verkehrt „ dem Balkengewichte . . . . . (2)
„ „ „ „ dem Abstande des Schwerpunktes von der Mittelschneide . . (3)

Wollte man aus dem Satze (1) schließen, daß es für die Empfindlichkeit der Wage zweckmäßig sei, ihrem Balken eine möglichst große Länge zu geben, so wäre dies ein Irrtum, denn man würde dadurch mit der aus (2) folgenden Bedingung, daß der Balken so leicht als möglich zu machen sei, in Widerspruch geraten.

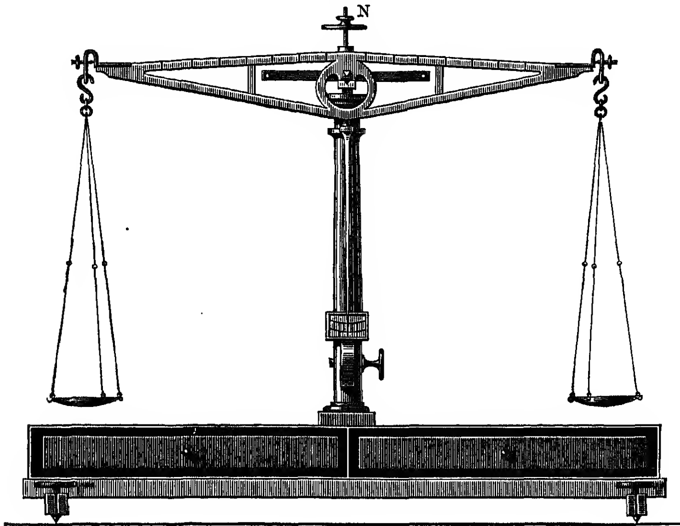
Soll nämlich der Balken fest genug bleiben, um sich unter der Belastung nicht merklich zu biegen, so muß bei Zunahme seiner Länge sein Gewicht in rascherem Verhältnis zunehmen. Das Verhältnis $\frac{\text{Balkenlänge}}{\text{Balkengewicht}}$ und damit auch die Empfindlichkeit wird daher viel eher dadurch gesteigert, daß man den Balken verkürzt statt verlängert, und da außerdem kurze Balken noch den Vorteil rascherer Schwingungen für sich haben, so gebührt ihnen der Vorzug. Auf diesen Sachverhalt gestützt, hat Bunge in Hamburg zuerst Wagen mit sehr kurzen Balken konstruiert. Doch darf man auch in dieser Richtung nicht zu weit gehen, da sonst andere Mißstände auftauchen.

Fig. 199.

Das möglichst geringe Gewicht des Balkens bei genügender Festigkeit sucht man außerdem dadurch zu erreichen, daß man den Wagebalken in durchbrochener Form (Fig. 200) ausführt oder auch durch Strebespangen gegen Verbiegungen schützt. Neuestens wird der Wagebalken mit Erfolg aus der von Mach jun. entdeckten Legierung aus Aluminium und Magnesium, welche unter dem Namen Magnalium im Handel vorkommt und sich durch Leichtigkeit und Festigkeit auszeichnet, hergestellt.

Die aus (3) folgende Bedingung verlangt, daß der Schwerpunkt nahe dem Aufhängepunkte, d. i. der Mittelschneide, liege. Dies ist stets und in beliebigem Grade zu erreichen mit Hilfe eines verschiebbaren Gewichtes, welches entweder längs der Zunge oder (meistens) oberhalb der Balkenmitte

Fig. 200.



an einer senkrecht stehenden Schraubenspindel in Form einer geränderten Scheibe auf und ab zu schrauben ist. Theoretisch könnte hierdurch die Empfindlichkeit bis ins Unbegrenzte gesteigert werden. In der Praxis ist man aber durch den Umstand beschränkt, daß die dadurch empfindlicher gemachte Wage langsamer schwingt und dadurch das Wägen endlich zu zeitraubend wird. Auch werden dann die Einstellungen unregelmäßiger. Bei gewöhnlichen genauen Wagen reguliert man den Schwerpunkt so, daß eine Schwingung ungefähr zehn Sekunden dauert. Bei kurzarmigen Wagen kann die Schwingungsdauer auf sechs Sekunden reduziert werden.

Die Empfindlichkeit der Wage hängt ferner auch von der Länge des Zeigers (der Zunge) ab. Um diese Länge ohne Beschwerung des Balkens zu vergrößern, hat man bei den feinsten Wagen die Poggendorffsche Spiegelablesung mit Fernrohr (§ 17) eingeführt, indem man über der Drehachse oder am Ende des Balkens einen vertikalen Spiegel befestigte, dessen Bewegung von einem Ende aus mittels Fernrohrs an einer vertikal gestellten Skala beobachtet wird. Besser noch ist eine von v. Wild bei den Wagen des internationalen Maß- und Gewichtsbureaus in Sèvres eingeführte Konstruktion, bei welcher der Spiegel oben auf dem Wagebalken horizontal befestigt und darüber ein total reflektierendes Prisma aufgestellt wird. Das letztere wirft die Strahlen nach vorn, so daß mittels einer vor die Wage gestellten horizontalen Skala mit Fernrohr beobachtet werden kann. Hierdurch wird die Übersicht über die Wage erhalten und einseitige Erwärmung durch den Beobachter sicherer vermieden. Kuhlmann in Hamburg hat eine Spiegelablesung am Ende der Zunge angebracht, welche mittels eines Zylinderspiegels ein fünffach vergrößertes Bild der Skala erzeugt.

Zu den eben abgeleiteten mathematischen Bedingungen der Empfinc keit kommt noch die technische, daß die Drehschneiden möglichst ohne bung beweglich seien, was durch möglichste Schärfe der Kante des Pri erreicht wird. Um dieselbe recht haltbar zu machen, wählt man für Prisma und dessen Unterlage sehr hartes Material, wie Stahl, Achat, I kristall. Auch die Endschneiden und zugehörigen Pfannen bestehen solchem Material.

Um die Sätze über die Richtigkeit und über die Abhängigkeit der Emp lichkeit der Wage von der gegenseitigen Lage der Mittelschneide zu Endschneiden und zum Schwerpunkte experimentell zu demonstrieren, man sich mit Vorteil der Demonstrationswage von Alb. Rueprecht in bedienen, welche auch sonst zu vielen Vorlesungsversuchen, wo es meh deutliche Sichtbarkeit als auf wissenschaftliche Genauigkeit ankommt, geeignet ist[1]).

Fig. 201 gibt eine perspektivische Ansicht dieses Apparates nebst e überschüssigen Schalenpaar und einer Vorrichtung zu Wagungen unter W Die Zunge trägt eine (abnehmbare) Verlängerung, deren Bewegung übe einfachen Skala auf große Distanz deutlich sichtbar ist. Zur Ausgleic kleiner Gewichtsdifferenzen kann man sich der an dem senkrechten Fort oberhalb des Balkens drehbaren „Fahne" bedienen. Die Vorrichtung Verrückung des Schwerpunktes besteht aus einer auf der Zunge versc baren Hülse. Hebt man diese bis zu einer angebrachten Marke, so kc die Wage in das indifferente Gleichgewicht, bei weiterer Hebung wird Aufhängung eine labile. Schiebt man die Hülse ungefähr 1 cm unter erwähnte Marke herab, so erhält die Wage eine Empfindlichkeit, welch Übergewicht von 20 mg dem Auditorium noch sicher zu erkennen gibt. man noch weiter, endlich bis zur Grenze herunter, so nimmt die Empfinc keit ab, so daß schließlich 2 g Übergewicht erforderlich werden, um Grad Ausschlag zu geben.

Um den Einfluß der relativen Stellung der Mittelschneide zu den schneiden zu zeigen, sind letztere derartig verstellbar befestigt, daß sie ihrer normalen Lage um 5 mm gesenkt oder gehoben werden können. diesem Zwecke werden die beiden seitlichen Lappenschrauben gelüftet beiden vertikal wirkenden Kopfschrauben nieder- oder emporgeschraubt dann die Lappenschrauben wiederum fest angezogen.

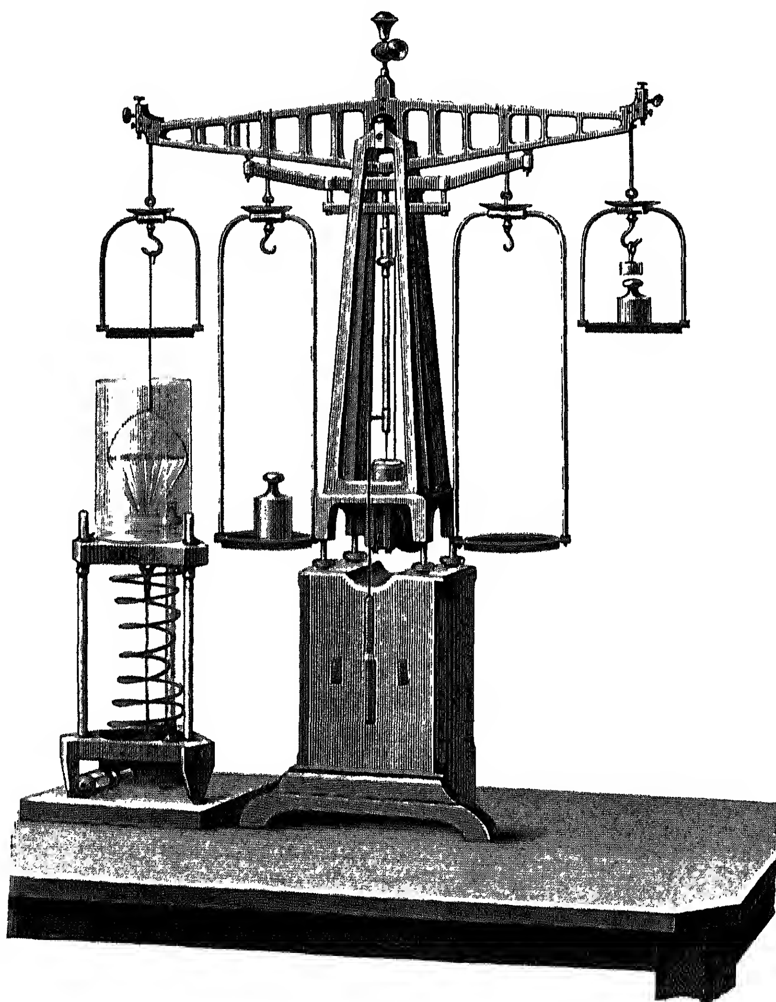
Die dadurch bewirkte Verrückung des Schwerpunktes kann mittel Hülse an der Zunge ausgeglichen werden, so daß die unbelastete Wage w sehr empfindlich ist. Sind die Endschneiden um 5 mm gesenkt worden zeigt sich dann eine rasche Abnahme dieser Empfindlichkeit mit Zun der Belastung, so daß zuletzt bei 1 kg Belastung auf jeder Seite 1 g gewicht erforderlich ist, um einen deutlichen Ausschlag zu geben. Hat dagegen die Endschneiden um 5 mm über ihre normale Lage gehober zeigt die Wage bei Vermehrung der Belastung eine zunehmende Empfinc keit, welche bei weiterer Vermehrung der ersteren in das indifferente dann ins labile Gleichgewicht übergeht.

---

[1]) Nähere Beschreibung dieser Wage und ihrer Anwendungen findet m der Zeitschrift für Instrumentenkunde, März 1882, S. 99.

Hat man bei verhältnismäßig kleinen Belastungen die normale Lage der Endschneiden durch Herstellung konstanter Empfindlichkeit hervorgebracht, so kann man bei großen Belastungen eine eintretende Biegung des Balkens an dem Umstande erkennen, daß dann infolge der Senkung der Endschneiden

Fig. 201.



wieder eine Abnahme der Empfindlichkeit bei steigender Belastung eintritt. Hebt man die Endschneiden so weit, daß die Empfindlichkeit wiederum konstant erscheint, so beträgt diese Verrückung ebenso viel wie die Biegung, da sich beide kompensieren.

Auch in bezug auf die Richtigkeit gestattet die Rueprechtsche Demonstrationswage Abänderungen vorzunehmen.

Zu diesem Zwecke ist eine Einrichtung getroffen, daß die Endschneiden auch in horizontaler Richtung um 1 mm der Mittelachse genähert, bzw. von ihr entfernt werden können. Durch Vertauschung der nahe gleich belasteten

Gehänge läßt sich dann die Ungleichheit der Arme konstatieren, ihr Verhältnis messen und ihre Lage korrigieren[1]).

§ 68. Konstruktion und Rektifikation einer genauen Wage. So einfach in der Theorie die Konstruktion einer richtigen und empfindlichen Wage erscheint, so schwierig ist die praktische Ausführung derselben für den Mechaniker. Da es nicht möglich ist, die Konstruktionsbedingungen, insbesondere die relativen Lagen von Schwerpunkt, Mittelschneide und Endschneiden zueinander von vornherein mit der äußersten Genauigkeit herzustellen, so müssen Vorrichtungen getroffen sein, welche die nachträgliche gegenseitige Vorstellung dieser Teile und dadurch die Rektifizierung der Wage in methodischer Weise ermöglichen. Außerdem erfordern die zum Schutze der Schneiden anzubringenden Arretierungsvorrichtungen mehr oder minder komplizierte Konstruktionen.

Die beiden Endschneiden sollen, wie gezeigt wurde, mit der Mittelschneide in einer Ebene und parallel mit derselben in gleichen Abständen sich befinden.

Aus dieser richtigen Lage kann eine Endschneide auf folgende Weise in eine unrichtige Lage verschoben sein:

1. durch Parallelverschiebung in horizontaler Ebene, wodurch die Wage ungleicharmig wird;

2. durch Parallelverschiebung in vertikaler Ebene, wodurch die Empfindlichkeit abhängig wird von der Größe der Belastung;

3. durch Drehung in horizontaler Ebene, wodurch das Verhältnis der Längen der Balkenarme abhängig wird von der zufälligen Lage der Gehänge auf den Endschneiden;

4. durch Drehung in vertikaler Ebene, wodurch während der Schwingungen der Wage Ungleicharmigkeit eintreten kann.

Aus 4. kann nur bei grober Abweichung von der richtigen Lage ein erheblicher Fehler entstehen und wird deshalb selten hierfür eine eigene Adjustierungsvorrichtung angebracht. Aus 2. folgt keine eigentliche Un-

---

[1]) Der Verfasser hat beim Unterrichte die Erfahrung gemacht, daß alle Konstruktionen von Wagen, an denen alle Fehler einzeln oder in Kombination hergestellt werden können, zeitraubend und umständlich zu behandeln sind; auch ist es schwierig, dafür zu sorgen, daß die Fehler unabhängig voneinander und in beliebiger Kombination hervorgebracht werden können. Er bedient sich daher lieber einer ganzen Reihe von sehr einfach und billig herstellbaren Wagen mit hölzernen Balken, deren jede einen anderen Fehler oder eine andere Fehlerkombination besitzt. Es befinden sich darunter z. B.

eine Wage mit ungleichen Armlängen, kompensiert durch ungleiche Schalengewichte,
eine Wage mit ungleichen Armlängen, kompensiert durch ungleiche Armgewichte,
eine Wage mit gleichen Armlängen, aber ungleichen Armgewichten, kompensiert durch ungleiche Schalen,
eine Wage mit Aufhängepunkt über der Verbindungsgeraden der Endschneiden,
eine Wage mit Aufhängepunkt unter der Verbindungsgeraden der Endschneiden

usw. Der Umstand, daß man gleichzeitig nebeneinander die Wirkung des Auflegens gleicher größerer Gewichte auf die verschieden fehlerhaften Wagen zeigen kann, ist von didaktischem Vorteile.

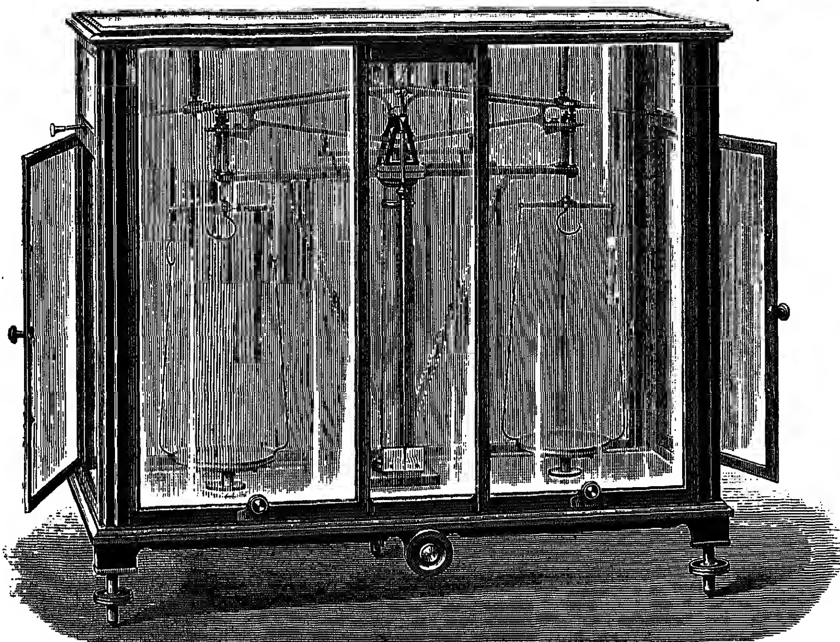
'chtigkeit, sondern nur eine Unvollkommenheit der Wage, dagegen sind die ıbweichungen aus 1. und 3. um so wichtiger, und es sollen daher bei jeder uten Wage Adjustierungsvorrichtungen vorhanden sein, wodurch diese 'ehler korrigiert werden können.

Wie man die Fehler 1. und 2. erkennt, wurde bereits oben gezeigt. Iethoden zur Entdeckung der Fehler 3. und 4. werden weiter unten mitgeteilt werden.

Außerdem sind noch zwei Adjustierungen des Schwerpunktes erforderich, nämlich eine Vorrichtung zur Verschiebung desselben in vertikaler und ine zur Verschiebung in horizontaler (mit dem Balken paralleler) Richtung.

Die Art und Weise, wie die Mechaniker diese Adjustierungsvorrichtungen ür die Schneiden und den Schwerpunkt an dem Wagebalken anbringen. ist

Fig. 202.



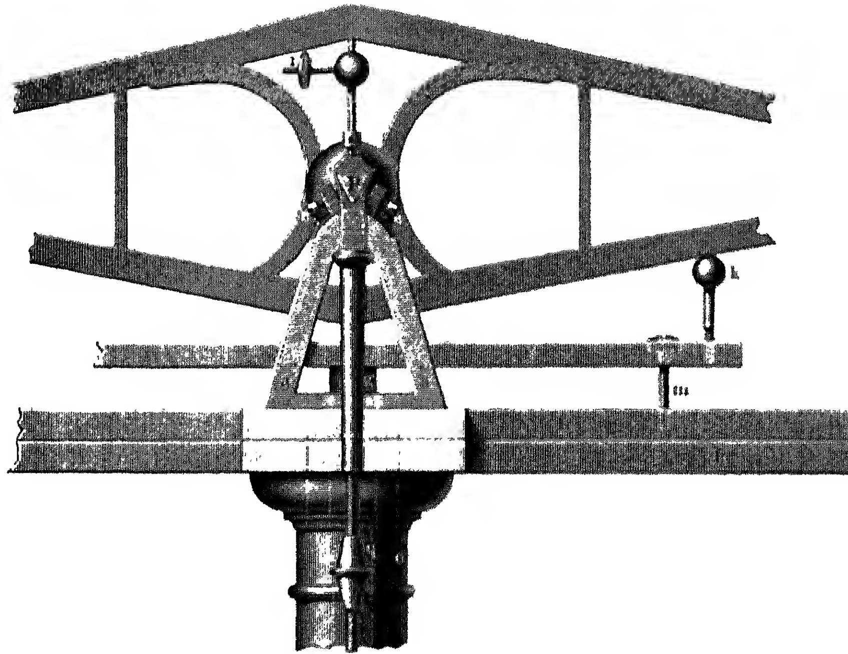
sehr mannigfaltig, ebenso wechselt die Konstruktion der Arretierungsvorrichtungen von einer Wage zur anderen. Wir können hier nur einige Hauptformen erwähnen und wollen zunächst eine Wage mittlerer Tragkraft von Rueprecht in Wien näher beschreiben. Die Fig. 202 gibt eine perspektivische Totalansicht derselben in $^1/_7$, die Figuren 203 bis 209 Detaildarstellungen in $^3/_4$ der wirklichen Größe.

Der Wagekasten ist, um möglichst wenig Licht abzuhalten und insbesondere, um der Unbeständigkeit des Holzes auszuweichen, ganz aus Messing und Glas gearbeitet. Die Schiebertüren an der Vorderseite werden durch Gegengewichte in jeder Lage im Gleichgewicht gehalten.

Die Wagsäule besteht aus drei konzentrischen Teilen, zwei Hohlzylindern und einem zylindrischen Kern. Siehe Fig. 204. Der äußere Hohlzylinder c bildet die feststehende Säule, sie ist mit der horizontalen

Lamelle *b* und den beiden Böcken *a*, *a* zu einem festen Ganzen zusamm
geschraubt. Auf den Böcken sind die Planlagersteine aus Bergkristall
befestigt, auf welche die Mittelschneide niedergelassen wird, wenn der Ba
frei schwingen soll. Der zylindrische Kern *g* aus Stahl vermittelt
Balkenarretierung. Er trägt zu diesem Zwecke die fest mit ihm
bundene Lamelle *f* (Fig. 203) und nach aufwärts die beiden Böcke *d*, *d* (Fig. 2

Fig. 205.



welche, oben geschlitzt, das Prisma *m* des Balkens aufnehmen, indem
dessen schräge Flächen auf die polierten, abgerundeten, harten St
schrauben *e*, *e*, *e*, *e* auflegen. Durch passende Stellung der letzteren er
das Prisma und damit der Balken seine richtige Lage, wobei die Schn
des Prismas der Lagerebene genau parallel gestellt und auch ihre rich
Einstellung in bezug auf eine vertikale Achse gesichert wird. Eine wei
Unterstützung erhält der Balken gleichzeitig durch die Kugelschraube
(Fig. 203). Die Balkenarretierung erhält durch die zylindrischen Stift
eine Führung im feststehenden Teile *b*.

Die **Gehängearretierung** wird durch den inneren Hohlzylind
(Fig. 204) vermittelt, welcher im unteren Teile der Säule seine Führung fi
und mit den beiden schief ansteigenden Stützen, Fig. 202, fest verbunden
Am oberen Ende ist dieser Hohlzylinder mit dem horizontalen Träger *h*
sammengeschraubt, welcher selbst an seinen Enden je zwei Säulchen *i*, *i* (Fig. 2
zur Arretierung der Gehänge trägt. Die Art und Weise, wie der Träg
durch den äußeren Hohlzylinder *c* hindurch wirkt, ist aus Fig. 206 ersicht
welche den Träger *h* von oben gesehen zeigt. Der letztere besitzt
Ausschnitte in Form von konzentrischen Kreissegmenten, durch welche
geschlitzte äußere Hohlzylinder, der als Tragsäule fungiert, hindurcht

Außerdem erhält der Träger *h* noch eine Führung durch die zylindrischen Stifte *n*, welche vom feststehenden Teil *b* aus in Bohrungen von *h* eingreifen.

Die Hebung und Senkung der beiden Arretierungsvorrichtungen erfolgt durch die Drehung zweier an einer Welle unterhalb der Säule liegender Exzenter (in der Figur nicht sichtbar).

Die Schalenarretierung wird mittels eines dritten Exzenters an derselben Stelle durch Hebelübertragung vermittelt.

Fig. 204.

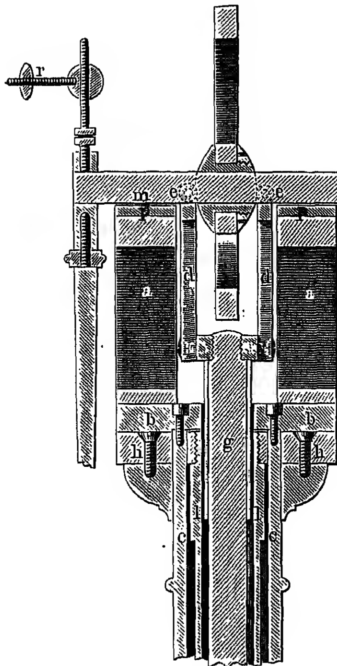
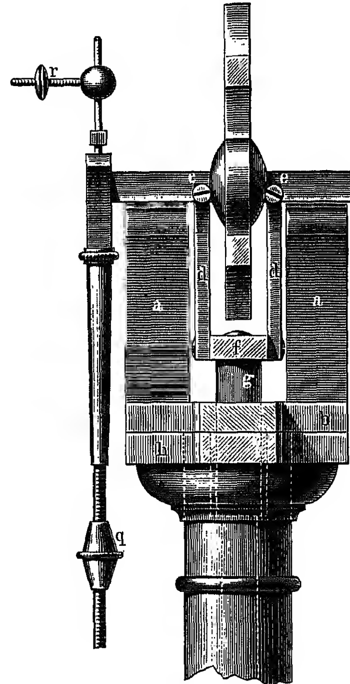


Fig. 205.



Der Vorgang bei der Lösung der Arretierung ist derartig, daß zuerst die Schalen von der Unterstützung frei werden, danach die Gehänge mit ihrer Last auf die Seitenachsen aufgesetzt werden und erst jetzt die Mittelschneide des Balkens mit den Lagersteinen in Berührung kommt. Die Arretierung erfolgt in umgekehrter Reihenfolge[1]).

Der Wagebalken hat die aus der Fig. 203 ersichtliche durchbrochene Form. Die Art der Befestigung des Prismas *p* aus Bergkristall ist aus dem Querschnitt Fig. 204 hinlänglich ersichtlich; sie gestattet eine Drehung des Prismas um eine seiner Schneide parallele Achse. Ebenso ersichtlich ist aus Fig. 204 und der Seitenansicht Fig. 205 die Befestigung der Zunge mit dem

---

[1]) Man findet oft auch die umgekehrte Anordnung, und es lassen sich für beide Gründe vorbringen. Für das Lösen der Arretierung ist die oben beschriebene Anordnung vorzuziehen, für die Arretierung selbst verdient die entgegengesetzte Reihenfolge den Vorzug. Siehe Löwenherz, Metrologische Instrumente, S. 251 des Berichtes über die wissenschaftlichen Apparate der Londoner Ausstellung 1876 (Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn, 1878).

Laufgewichte *q* zur Regulierung der Lage des Schwerpunktes in vertikaler, sowie die Vorrichtung *r* zur Verschiebung derselben in horizontaler, dem Balken paralleler Richtung.

Von den Adjustierungsvorrichtungen für die Endschneiden sind bei dieser Wage zwei vorhanden, von denen die eine die Endschneide in

Fig. 206.

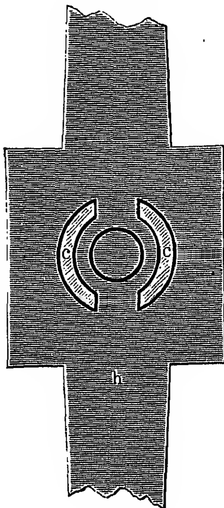


Fig. 207.

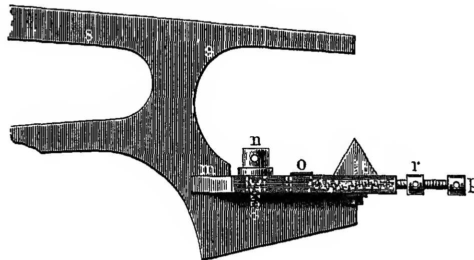
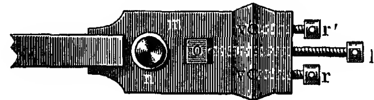


Fig. 208.



der Richtung des Balkens horizontal zu verschieben, die zweite dieselbe in horizontaler Ebene zu drehen gestattet (Figuren 207 bis 209).

Das Bergkristallprisma *b*, Fig. 207, ist mit der Schneide nach aufwärts durch die zwei Schrauben *v* und *v'* an den stählernen Prismenträger *m* angeschraubt, welcher selbst durch die Schraube *n* mit dem Balken fest verbunden, bei Lüftung der letzteren aber ein wenig längs desselben verschiebbar ist. Er erhält dabei seine horizontale Führung einerseits an seinen geschlitzten Enden, andererseits an dem prismatischen Stück *o*, welches durch einen viereckigen Ausschnitt des Trägers emporragt. Die Bewegung erfolgt durch die Schraube *p*. Zur Parallelstellung endlich dienen die Schrauben *r*, *r'*, welche gegen den Hals der Fixierungsschrauben der Seitenachsen drücken und deren Verschiebung bewerkstelligen können. Die richtige Höhe der Endschneide und eine allfällig nötige Drehung derselben in einer durch sie senkrecht auf den Balken gelegten Vertikalebene muß bei dieser Konstruktion durch Abfeilen des Prismenträgers oder Unterlegen des Prismas erreicht werden.

Fig. 209.

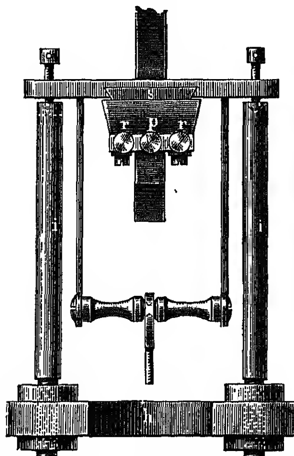


Fig. 209 stellt die stählernen Gehänge der Wage vor, in welche bei *s* die Planfläche aus Bergkristall prismatisch eingefügt ist. Seine beiden Bügel sind durch eine in der Mitte eingekerbte und hier rein auspolierte harte

kalischen Forschung. Diese Behauptung ist schon in dem ent- was wir am Schlusse des § 1 als Inbegriff der Naturwissenschaft upt bezeichnet haben. Die Physik ist als Teil der Naturwissenschaft uch nur ein System von geordneten und einfach dargestellten Er- gen, verbunden mit dem Versuche, diese Erfahrungen untereinander salen Zusammenhang zu bringen.

ie Erfahrungen können auf zweierlei Weise gewonnen werden: ent- durch Wahrnehmungen von Erscheinungen, welche uns die Natur ohne Dazutun unmittelbar darbietet, oder indem wir die Körper absichtlich he Umstände versetzen, welche sie nötigen, jene Erscheinungen hervor- gen, welche wir beobachten oder messen wollen. Im ersten Falle wir nur Beobachtungen, im zweiten stellen wir Versuche an, perimentieren. Die letztere Methode ist natürlich die fruchtbarere rd überall dort angewendet, wo es überhaupt möglich ist. Den Blitz önnen wir nur beobachten, mit dem elektrischen Funken können wir nentieren. Da wir in der Lage sind, den letzteren beliebig oft, unter schiedensten Umständen und insbesondere dann hervorzurufen, wenn Aufmerksamkeit bereits gespannt ist und alle Mittel zur genauen htung vorbereitet sind, so ist es nicht zu verwundern, daß wir über tur des elektrischen Funkens viel früher und genauer unterrichtet ls über den Blitz, obwohl letzterer um Tausende von Jahren länger htet wurde als der künstliche elektrische Funke.

4. **Die physikalischen Apparate und Instrumente.** Zur An- g der Versuche und Beobachtungen benutzen die Physiker eigenartige tungen, unter denen wir drei Gruppen unterscheiden können.

ie erste Gruppe umfaßt diejenigen Vorrichtungen, welche die physi- en Agenzien herbeischaffen, deren Wirkungen beobachtet werden Hierher gehören z. B. Motoren, Schwungmaschinen, Heiz- und Be- ngsapparate, Elektrisiermaschinen, galvanische Batterien, Gebläse usw. t den Vorkehrungen zur Regulierung und Applikation dieser Agenzien. die zweite Gruppe gehören die Vorrichtungen zur genauen Beob- g und Messung der wirksamen Agenzien und deren Wirkungen, z. B. age, das Fernrohr, das Mikroskop, der Theodolit, das Barometer, neter, Thermometer, Photometer, Galvanometer usw. Es sind die nstrumente. Bei diesen sind Richtigkeit und Genauigkeit Haupt- ungen.

die dritte Gruppe gehören die Demonstrationsapparate, welche dazu bestimmt sind, die Erscheinungen erst zu erforschen, sondern

---

„Ich fand", schrieb H. v. Helmholtz in einem Briefe an den Physiologen ig, „daß das viele Philosophieren zuletzt eine gewisse Demoralisation herbei- nd die Gedanken lax und vage macht, ich will sie erst wieder eine Weile das Experiment und durch Mathematik disziplinieren . . ." (L. Königs- rs Biographie H. v. Helmholtz', Bd. II, S. 162.)

Stahlwalze verbunden. In dieser rechtwinklig zur Seitenachse stehenden Kerbe hängt eine schneidige und gehärtete Stahlöse, welche die Wagschale trägt.

Eine Konstruktion, welche alle vier theoretisch gebotenen Rektifikationen mit der Endschneide, und zwar unabhängig voneinander vorzunehmen

Fig. 210.

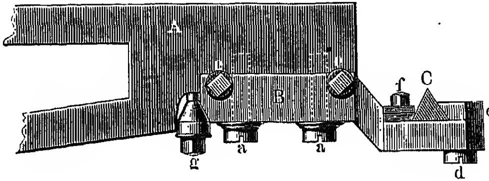


Fig. 214.

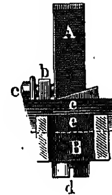


Fig. 211.

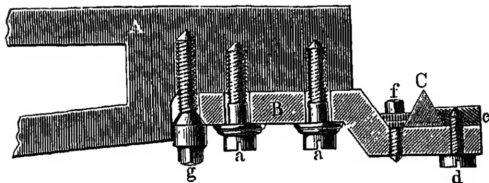


Fig. 212.

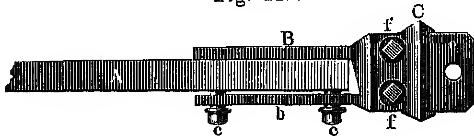


Fig. 215.

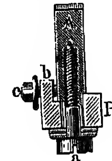
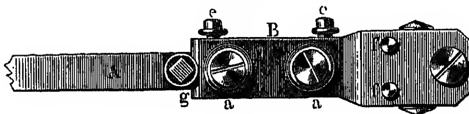


Fig. 213.



gestattet, hat sich Georg Westphal in Celle patentieren lassen. Dieselbe ist folgende:

An dem Endteil des Balkens A (Figuren 210 bis 215) ist der Teil B und auf diesem die Endachse C befestigt; die Adjustierungen geschehen in folgender Weise:

1. Stellung der Endachsen in die richtige Höhe gegen die Mittelachse, so daß eine an die Schneide der Mittelachse und durch die Mitte ihrer Länge gelegte gerade Linie so viel oberhalb der beiden Endachsen liegt, als es die verlangte und zulässige Empfindlichkeit des Wagebalkens erforderlich macht.

Die Unterkante des Balkens A ist an seinem Ende, da, wo der Teil B angesetzt ist, im Querschnitt spitzwinklig, die Oberkante von B dem entsprechend gearbeitet, wie Fig. 214 zeigt. Die beiden Preßschrauben $a\,a$, Fig. 210 und 211, mit untergelegten Stahlplättchen, verbinden beide Teile fest miteinander. Die Löcher für dieselben in B sind größer gebohrt, als

die Hälse von $a\,a$ dick sind, so daß, wenn $a\,a$ gelöst, eine Verschiebung B nach allen Richtungen möglich wird. In einem Vorsprung b auf der (kante an B (siehe besonders wieder Fig. 214) sind zwei Stellschraube mit viereckigen Köpfen angebracht, welche gegen den Balken treten vorerst so gestellt sind, daß der Vorsprung b in der Längsrichtung pa der Seitenfläche des Balkens steht. Schraubt man sie nun, während genügend gelöst sind, mittels eines passenden Schlüssels beide gleichmäßi den Vorsprung hinein, so muß sich letzterer parallel vom Balken abbewe dadurch aber der Teil B und somit die Endachse sich senken; beim He schrauben von $c\,c$ und Andrücken von B, so daß die Schrauben wieder g den Balken liegen, wird die Achse umgekehrt sich heben, und zwar wird Schneide dabei immer parallel zu ihrer ersten Lage bleiben.

2. Stellung jeder Endachse in eine unter die Schneide Mittelachse gelegte horizontale Ebene.

Sollte die gedachte Ebene das eine Ende einer Endachse eher berü als das andere, so muß B unter der schiefen Unterkante an A, anstat vorher parallel dem Balken zu nähern oder zu entfernen, gedreht, dahe eine der Schrauben c gelöst und die andere um ebensoviel angezogen we wodurch das eine Ende der Schneide von C sich hebt und das andere ebensoviel sich senkt.

3. Parallele Stellung der Schneide jeder Endachse zu e durch die Schneide der Mittelachse gelegten senkrechten Eb

Die Endachse C bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Unterfläche a ruht. Die rechte Seitenfläche liegt in ganzer Länge und etwa bis zur ha Höhe, so weit es das Spiel der Gehänge gestattet, gegen die Seitenkante auf B mit der Schraube d befestigten Plättchens e. Sie wird gegen letz angedrückt durch zwei Stahlschrauben $f\,f$, die in B ihr Gewinde haben. Kopf dieser Schrauben besteht außer dem Vierkant für den Schlüssel einem Zylinder und einem darunter befindlichen Konus. Der Zylinder (in der Zeichnung) links gegen einen Absatz von B, während der Konus rechts gegen die Seite der Achse legt. Durch Anziehen der beiden Sch ben $f\,f$ wird daher die Achse fest gegen e und auf B angepreßt.

Löst man nun eine der beiden Schrauben $f\,f$ und zieht die andere eb viel an, so wird die Achse sich drehen, indem zugleich das Plättchen die Schraube d sich ebensoviel dreht, womit das Mittel für die verla Parallelstellung gegeben ist.

4. Stellung der Endachsen in gleiche Entfernung von Mittelachse.

Diese wird hervorgebracht durch Verschiebung des Teiles B in Längsrichtung des Balkens mittels der Schraube g, welche ebenso konstr ist wie $f\,f$. Der Zylinder ihres Kopfes legt sich links gegen den Balken Konus rechts gegen B.

Schraubt man also nach Lösung der beiden Preßschrauben $a\,a$ g t in den Balken hinein, so wird der Konus den Teil B samt der Achse rechts schieben, dieser Hebelarm also langer werden. Schraubt man gekehrt g heraus, so hat man den Teil B nach links hinüber zu drücke

Wir wollen hier einige Mitteilungen über die Methoden einscha deren man sich bedient, um die Abweichungen der Endschneiden vom

allelismus mit der Mittelschneide zu erkennen. Es gibt deren insbesondere zwei [1]).

Erste Methode von Gauss mit Spiegel [2]). Nehmen wir zunächst an, die Endschneide sei innerhalb der Horizontalebene, also um eine vertikale Achse so verdreht, daß das dem Beschauer zugekehrte Ende der Mittelschneide genähert, das rückwärtige Ende aber von derselben weiter entfernt sei. Sobald die Wage schwingt, beschreibt dann die Endschneide die Mantelfläche eines Kegelstutzes, dessen Achse in die verlängerte Mittelschneide fällt, und zwar mit dem Scheitel gegen den Beschauer gerichtet. Es ist folglich klar, daß die Schneide beim Steigen sich nach vorn neigen muß, beim Sinken dagegen nach rückwärts.

Dieselbe Neigung nach vorn und nach rückwärts während der Schwingungen muß auch die Pfanne des Gehänges mitmachen. Befestigt man daher auf dieser Pfanne einen kleinen Spiegel, dessen Ebene möglichst nahe senkrecht auf die Schneide gestellt ist, so neigt sich auch dieser beim Neigen der Endschneide nach vorn über, beim Sinken neigt er sich oben zurück. Beobachtet man daher mittels eines senkrecht auf den Spiegel gerichteten Fernrohres das Bild einer vertikal aufgestellten Skala, so schwingt auch dieses Bild senkrecht auf und nieder.

Sollte die Endschneide auch in vertikaler Ebene vom Parallelismus abweichen, so würde das Spiegelbild außer der vertikalen Bewegung auch noch eine Seitenbewegung zeigen. Man hat also an den Adjustierungsvorrichtungen so lange zu operieren, bis im Spiegel keine Verschiebung des anvisierten Bildes mehr eintritt.

Zweite Methode mittels Probiergehänge [3]). Man behängt die zu prüfende Endschneide mit einem eigens zu diesem Zwecke angefertigten Probiergehänge mit sehr schmaler Pfanne, die man auf der Schneide vor- und zurückschieben kann. Zeigt sich dabei kein Unterschied in der Einstellung der Wage, so ist sie von diesem Fehler frei. Diese Methode dürfte sich für die Praxis am meisten empfehlen, da sie leicht ausführbar ist.

Um bei den Wägungen den Gebrauch von Gewichtsstücken unter 1 cg vermeiden zu können, bedient man sich des von Berzelius angegebenen Milligrammhakens, d. i. eines aus Draht hergestellten Laufgewichtes von 1 cg Gewicht, welches man rittlings auf den in zehn gleiche Längsteile geteilten Wagebalkenarm aufsetzt. Befindet sich dieser Milligrammhaken auf dem ersten, zweiten, dritten usw. Teilstriche, von der Mittelschneide an gerechnet, so ersetzt er dort ein auf die Wagschale gelegtes Gewicht von ein, zwei, drei usw. Milligramm. Die Unterabteilungen können dann noch weiter geschätzt werden.

Strenge genommen sollte der Milligrammhaken auf der Verbindungslinie der Schneiden aufgehängt werden, weshalb auch bei manchen Wagen ein eigens hierzu bestimmtes, an den Wagebalken befestigtes Reiterlineal vorhanden ist. Dasselbe braucht übrigens nicht die ganze Länge des Balkens zu besitzen, falls nur das Gewicht des zugehörigen Milligrammreiters so

---

[1]) Eine dritte auf Anwendung der Anlegelibelle beruhende liefert nicht genügende Resultate.

[2]) Göttingische gelehrte Anzeigen 1837, März 13. Gauss' sämtliche Werke, Band V, S. 511.

[3]) Prof. Hartig, „Civilingenieur" 1867.

reguliert wird, daß es, auf den äußersten mit 10 bezeichneten Teilstrich aufgesetzt, einem auf die Schale aufgelegten Zentigrammgewicht äquivalent ist. Man gibt auch manchmal dem Reiter das Gewicht von 5 mg und verschiebt ihn längs des ganzen Balkens, wodurch ebenfalls eine Belastungsdifferenz von 10 mg erzielt wird.

Die Verschiebung und Abnahme des Reiters erfolgt entweder mit Pinsel oder Pinzette oder, was bei genaueren Wagen immer der Fall ist, durch eine eigene von der Außenseite des Kastens in Bewegung zu setzende Vorrichtung, die Reiterverschiebung, welche das Öffnen des Wagekastens während des letzten Auswägens vermeiden läßt. Dieselbe besteht aus einer oberhalb des Balkens oder des Reiterlineals parallel mit diesem verschiebbaren und um seine Achse drehbaren massiven oder hohlen Messingstange, welche die Seitenwand des Kastens durchsetzt und in passender Weise geführt ist. Ihr äußeres Ende trägt einen geränderten Knopf, ihr inneres Ende einen Seitenarm mit seitlich hervorragendem Stifte, mittels welchem man in die Öse des Milligrammreiters eingreifen und denselben darauf abheben kann, indem man den Knopf passend dreht. Auf analoge Weise erfolgt das Wiederaufsetzen des Reiters an anderer Stelle. Bei manchen Wagen ist diese Einrichtung noch dahin vervollkommnet, daß die Bewegung des den Reiter abhebenden Stiftes in genau senkrechter Richtung (statt in einem Bogen) erfolgt. Sehr bequeme Reitervorrichtungen hat Nemetz in Wien an seinen Wagen angebracht, welche das Herabfallen des Reiters unmöglich machen und die Verschiebung erleichtern. Auf jeden Fall soll dafür Sorge getragen sein, daß die Bewegung des Reiterträgers gehemmt wird, bevor er auf den Balken aufschlagen oder den Reiter zu weit abheben würde.

Die Fig. 202 zeigt zwei einfache Reiterverschiebungen auf beiden Seiten des Balkens.

Zum Schlusse wollen wir erwähnen, daß es Wagen gibt, welche kunstreiche Mechanismen enthalten, durch welche man aus Distanz, ohne den Kasten zu öffnen, die aufgelegten (zu vergleichenden) Gewichtsstücke vertauschen kann[1]), ja auch solche, welche eine vollständige Abwägung mit vielen Gewichtsstücken in einem luftleer gepumpten Kasten auszuführen gestatten[2]). Endlich sei noch einer neuestens konstruierten Vorrichtung von Rueprecht gedacht[3]), welche unterhalb des Bodens des Wagekastens angebracht werden kann, durch welche ein auf die Schale gesetzter Körper sofort annähernd abgewogen wird, so daß man sogleich weiß, welche größeren Gewichtsstücke aufzusetzen sind, und keine Zeit mit dem Probieren derselben verliert — ein Vorteil, der beim Wägen hygroskopischer Körper besonders hervortritt.

§ 69. Gebrauch der Wage. Die Aufstellung der Wage hat auf einer vor Erschütterungen möglichst gesicherten Unterlage, am besten auf einer an die Mauer befestigten horizontalen Steinplatte zu geschehen. Da-

---

[1]) Eine solche Wage von Rueprecht in Wien dient im Bureau des internationalen Maß- und Gewichtskomitees in Paris zur Vergleichung der Kilogrammetalons. Sie findet sich beschrieben und abgebildet in den *Travaux et Mémoires* dieses Komitees, Band I.

[2]) Siehe über die Vakuumwage von Stückrath den Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente der Berliner Gew.-Ausst. 1879 von L. Löwenherz, S. 186.

[3]) Nach brieflicher Mitteilung des Erfinders.

bei ist insbesondere noch Sorge zu tragen, daß die Wage nicht der einseitigen Erwärmung von seiten des Ofens oder des direkten Sonnenlichtes ausgesetzt sei[1]). Sind die Schneiden der Wage von Stahl, so ist alles sorgfältig zu meiden, was dieselben zum Rosten veranlassen könnte. Das Lokal soll daher möglichst trocken sein, und es dürfen in demselben keinerlei Objekte aufbewahrt werden, welche saure Dämpfe, wenn auch nur in geringer Menge, entwickeln (Reagenzien, galvanische Batterien, Lötwasser). Um die Luft im Wagekasten trocken zu erhalten, stellt man ein Gefäß mit hygroskopischen Substanzen hinein. Es empfiehlt sich dazu besser Ätzkalk als Chlorcalcium, weil letzteres durch Dissoziation Spuren von Salzsäure entwickeln kann. Bei Anwendung des ersteren muß auf dessen Volumzunahme Rücksicht genommen werden.

Die Aufstellung mittels der Fußschrauben des Kastens soll so geschehen, daß der arretierte Balken horizontal steht. Man stellt meistens mittels eines Senkels oder einer Libelle, welche vom Mechaniker angebracht sind; diese Hilfsmittel müssen daher so adjustiert sein, daß beim Einspielen des Senkels oder der Libelle die Arretierung dem Balken eine horizontale Lage verschafft. Kleine Abweichungen von dieser Bedingung bringen jedoch keinen Nachteil. Daß unter allen Umständen bei arretiertem Balken die Zunge auf den mittleren Teilstrich der Skala zeigen soll, versteht sich von selbst. Vor jedesmaligem Aufsetzen oder Abnehmen von Gewichten muß die Wage arretiert werden.

Vor dem Wägen muß mittels eines feinen Pinsels der auf Balken, Gehängen und Schalen abgelagerte Staub vorsichtig entfernt werden. Da dies nicht auf beiden Seiten in vollkommen gleicher Weise möglich ist und insbesondere auch die Schalen infolge des Gebrauches ihr Gewicht verändern, so wird die Zunge der Wage, wenn letztere auch ursprünglich aufs genaueste rektifiziert worden war, bei unbelasteten Schalen im allgemeinen nicht mehr auf die Mitte der Skala einspielen. Soll daher eine sog. einfache Wägung vorgenommen werden, bei welcher der abzuwägende Körper auf die eine Seite, die Gewichte auf die andere Seite gesetzt werden, bis die Zunge einspielt, so muß vorher die Abweichung der Zunge durch eine der hierzu vorhandenen Vorrichtungen (drehbare Fahne, Laufgewichtchen) beseitigt werden.

Wägt man nach der unten beschriebenen Tariermethode oder der Methode der Doppelwägung, so entfällt die Notwendigkeit dieser Regulierung. Sie entfällt auch dann, wenn der abzuwägende Körper in einem Gefäße gewogen werden soll, welches man dann vorher auf die Schale setzt und durch Gewichte auf der anderen Seite bis zum Einspielen der Zunge austariert.

Bestimmung des Ruhepunktes. Es wäre zu zeitraubend, die Wage jedesmal so lange schwingen zu lassen, bis sie zur Ruhe kommt. Man beobachtet vielmehr die Ausschläge auf beiden Seiten. Bei minder genauen Wägungen nimmt man an, daß der Ruhepunkt der Zunge in der Mitte zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrpunkten gelegen sei. Da die

[1]) Wie wichtig es ist, den Wagebalken vor einseitigen Temperaturänderungen zu bewahren, geht daraus hervor, daß bei einem Balken aus Messing, dessen Ausdehnungskoeffizient $\lambda = 0{,}000\,018$ ist, bei einer Belastung von 1 kg eine Temperaturdifferenz der Balkenarme von nur $^1/_{10}$ Grad bereits einen Wägefehler von 1,8 mg veranlaßt.

Amplitude der Schwingungen fortwährend abnimmt, so ist dies nicht g
richtig, und deshalb leitet man den Ruhepunkt aus einer ungeraden An
von beobachteten Umkehrpunkten ab, indem man von der jedenfalls
richtigen Annahme ausgeht, daß die Amplituden um gleiche Differenzen
nehmen.

Ist die Mitte der Skala mit Null bezeichnet, so rechnet man zweckm
die Ausschläge nach der Seite, wo die Gewichte aufgelegt werden, als pos
die auf der anderen Seite als negativ. Die Umkehrpunkte jeder Seite we
zuerst für sich zu einem arithmetischen Mittel vereinigt und dann aus be
Mitteln wieder (unter Rücksicht auf das Zeichen) das Mittel genommen.
positives Resultat deutet an, daß der abzuwägende Körper mehr wiegt
die aufgelegten Gewichte.

Angenommen, man beschränke sich, was in der Regel genügt, auf
Beobachtung der ersten drei Umkehrpunkte l_1, r_1, l_2. Man rechnet die Ruhe
$R = \frac{1}{2}\left(\frac{l_1 + l_2}{2} + r_1\right) = \frac{l_1 + l_2 + 2 r_1}{4}$. Man habe z. B. nach Aufleg
von 21,25 g an Gewichtsstücken und Aufsetzung des Reiters auf den Pun
die Umkehrpunkte erhalten:

Auf Seite der Last	der Gewichte
$l_1 = -3{,}6$	
	$r_1 = +4{,}1$
$l_2 = -3{,}4$	

so ist die Ruhelage

$$R = \frac{-3{,}6 - 3{,}4 + 8{,}2}{4} = \frac{+1{,}2}{4} = +0{,}3.$$

Daraus ersieht man, daß das Gewicht 21,255 g noch etwas zu klein
Statt aber den Reiter so lange hin und her zu schieben, bis der Ruhepu
Null herauskommt, ermittelt man die dem Ruhepunkte Null zugehörige
wichtsmenge durch Interpolation mit Hilfe eines zweiten Schwingungsversuch
bei welchem der Milligrammreiter um einen Teilstrich nach außen, also au
geschoben wird.

Angenommen, man erhalte dann den Ruhepunkt $-0{,}6$, so weiß n
daß Einem Milligramm eine Verschiebung des Ruhepunktes von 0,9 Skalen
entspricht, daß man also nur $\frac{1}{3}$ mg hätte hinzufügen müssen, um den Ru
punkt Null zu erhalten. Das gesuchte Gewicht wäre also gleich 21,255

Viel bequemer und weniger zu Rechenfehlern Anlaß gebend ist es, w
man die Mitte der Skala statt mit Null mit Zehn bezeichnet und alle U
kehrpunkte positiv rechnet. Man kann dann einfach in der Weise verfah
daß man die ersten drei Ausschläge untereinander anschreibt, wobei man a
gleich den mittleren verdoppelt. Die Summe gibt dann die vierfache Ru
lage. Obiges Beispiel würde sich dann folgendermaßen gestalten:

$l_1 = 6{,}4$		6,4
	$r_1 = 14{,}1$	28,2
$l_2 = 6{,}6$		6,6
		$R = 41{,}2 : 4 = 10{,}3.$

Da es gleichgültig ist, nach welchem Maße man die Ausschläge m
so kann man, solange die Anzahl der drei Umkehrpunkte beibehalten wi

auch das Dividieren durch 4 unterlassen und festhalten, daß die Belastungen einander gleich sind, sobald die Summe 40 herauskommt.

Wägung nach der Tariermethode. Man setzt auf die eine Schale (meist auf die rechtsseitige, weil man mit der rechten Hand leichter manipuliert) den abzuwägenden Körper, auf die andere (linksseitige) Schale eine Tara, zu welcher man am bequemsten einen zweiten Gewichtssatz benutzt, der nicht genau adjustiert zu sein braucht. Die letzte Ausgleichung geschieht dann mittels des Reiters auf der rechten Seite, den man so lange verschiebt, bis angenähert der Ruhepunkt 0 (bzw. 10 oder 40) herauskommt. Derselbe wird notiert, ebenso die Reiterstellung.

Hierauf vertauscht man den abzuwägenden Körper mit genauen Gewichtsstücken und verschiebt den Reiter wieder, bis nahezu derselbe Ruhepunkt wie früher erscheint; dieser, sowie die Reiterstellung werden samt den Gewichten notiert. Endlich verschiebt man noch den Reiter um einen Teilstrich, so daß ein Ruhepunkt eintritt von solcher Lage, daß der erstgefundene zwischen dem zweiten und dritten zu stehen kommt. Aus diesen beiden ermittelt man durch Interpolation jene Stellung des Reiters, welche wiederum den ersten Ruhepunkt herbeiführen würde. Bei dem folgenden Beispiele wird angenommen, daß man die Mitte der Skala mit 10 bezeichnet habe und die Zahl 40 als zugehörigen Ruhepunkt nehme.

Linksseitige Schale	Rechtsseitige Schale	Reiter	Ruhepunkt
I. Tara	abzuwägender Körper	3 mg	40,5
II. Dieselbe Tara	Gewichte = 302,53 g	7 „	41,5
III. „ „	„ = 302,53 „	8 „	40,1

Aus II. und III. berechnet man die Reiterstellung für den Ruhepunkt in I. wie folgt:

$$= 7\,\mathrm{mg} + \frac{41{,}5 - 40{,}5}{41{,}5 - 40{,}1} = 7 + \frac{1}{1{,}4} = 7{,}7\ \mathrm{mg}\ ^{1)}.$$

[1]) Da Wägungen zu den häufigsten Arbeiten des Physikers gehören, so verlohnt es sich, dieselben so bequem als möglich einzurichten. Man ersetzt dann die obige Interpolationsrechnung mit Vorteil durch ein graphisches Verfahren. Eine kleine abwischbare Tafel enthält ein passendes Quadratnetz eingraviert Auf der Abszisse trägt man die Reiterstellungen in II. und III. auf, dazu die Ruhepunkte als Ordinaten. Diese werden (etwa durch Anlegen des Schreibstiftes) geradlinig verbunden. Wo diese Gerade die Ordinatenhöhe des Ruhepunktes I. besitzt, zeigt die zugehörige Abszisse die gesuchte Reiterstellung. Hätten die Wagen bei allen Belastungen dieselbe Empfindlichkeit, so könnte das Verfahren sehr vereinfacht werden, indem man die Bezifferung der Skala so einrichtet, daß sie die Gewichte angibt, welche noch zugelegt werden müßten, um die Gleichheit der Belastungen herzustellen, bzw. den Ruhepunkt auf 0 zu bringen. Man hätte dann nur jedesmal den Betrag der aufgelegten Gewichtsstücke, die Reiterstellung und die aus den Schwingungen abgeleitete Ruhelage zu addieren. Da aber die Abweichungen der Ruhelage vom Nullpunkte zwar dem Übergewichte proportional, aber außerdem von der Belastung abhängig sind, so ist dies im allgemeinen nicht ausführbar. Das bequemste Verfahren besteht dann darin, sich für jede Wage ein Täfelchen zu berechnen, welches für eine Reihe passend abstehender Belastungen die Übergewichte angibt, welche den verschiedenen Werten der Ruhelagen entsprechen. Natürlich behält dieses Täfelchen nur so lange Gültigkeit, als die Empfindlichkeit der Wage nicht geändert wird. Will man daher ganz sicher gehen, so ist das oben beschriebene Verfahren der Interpolation aus zwei benachbarten Ruhelagen immer das empfehlenswerteste.

Folglich ist das gesuchte Gewicht = 302,5377 — 0,003 = 302,5347 g.

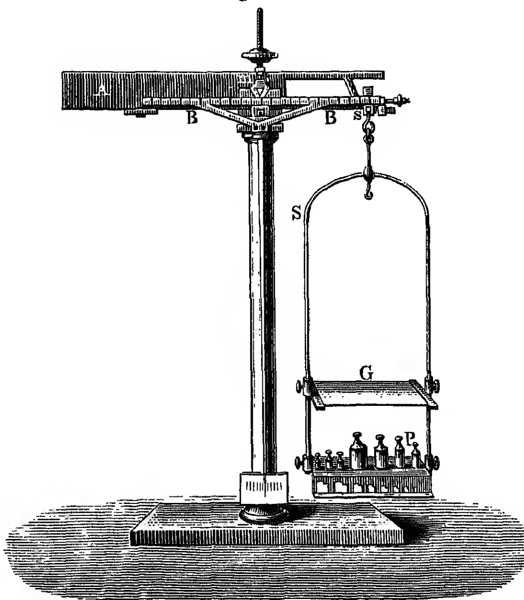
Dieses Verfahren ist frei von dem Einfluß der Ungleicharmigkeit und des ungleichen Gewichtes der Arme oder Schalen.

Doppelwägung. Man legt einmal den abzuwägenden Körper auf die linke Schale, die Gewichte auf die rechte und sucht den Ruhepunkt; dann legt man den Körper auf die rechte Schale und ermittelt die Gewichte, welche, auf die linke Schale gelegt, denselben Ruhepunkt hervorbringen. Das gesuchte Gewicht ist dann, streng genommen, gleich dem geometrischen Mittel der beiden beobachteten Gewichte, wofür aber stets mit vollkommen genügender Annäherung das arithmetische Mittel gesetzt werden kann. Dieses gibt dann das gesuchte Gewicht unabhängig von der Ungleicharmigkeit der Balkenarme und dem ungleichen Gewichte der Schalen usw.

Von den beiden erwähnten Methoden wird die letztere häufig als die vorzüglichere erklärt; wir möchten aber in den meisten Fällen der Tariermethode den Vorzug geben, da sie nicht bloß bequemer, sondern auch schneller in der Ausführung ist und deshalb auch bei Änderungen des Auftriebes in der Luft genauere Resultate verspricht.

§ 70. Andere Wagenkonstruktionen. Substitutionswage. Reimann hat die in Fig. 216 dargestellte besondere Form einer Wage angegeben, welche die Wägung nach der Tariermethode in eigentümlicher (im Prinzip übrigens schon von F. E. Neumann[1]) angegebener) Weise gestattet. Dieselbe besitzt nur eine Schale S mit zwei Etagen, wovon die untere P zur Aufnahme des ganzen Gewichtssatzes und die obere G für den abzuwägenden Körper bestimmt ist. Das Gegengewicht zu der konstanten Belastung durch den Gewichtssatz bildet die am anderen Balkenarme angebrachte Masse A. Der Balken BB ist auch zur Aufnahme eines Reiters eingerichtet. Hat man den abzuwägenden Körper auf die Schale G gebracht, so nimmt man vom Gewichtssatz P so viele Stücke weg, bis wieder Gleichgewicht eintritt, und erhält so das gesuchte Gewicht. Die Wage bleibt also, wie schon bemerkt, stets gleich belastet. Diesen Vorteil und diese ganze Art der Wägung könnte man selbstverständlich auch mit

Fig. 216.

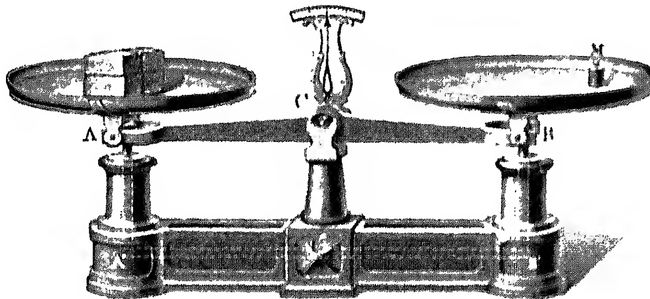


[1]) C. Pape, Einleitung in die theoretische Physik von F. E. Neumann, S. 115. Leipzig bei Teubner, 1883.

der gewöhnlichen gleicharmigen Wage erzielen, wenn man ebenfalls den ganzen Gewichtssatz auf die eine Wagschale bringen und den Körper unter Fortnahme der entsprechenden Gewichtsstücke auf dieselbe Schale legen würde. Dazu wird aber meist der Platz fehlen.

Roberval-Wage (Tisch- oder Tafelwage, Fig. 217). Es ist diese Wage eine besondere Form der gleicharmigen Wage, die bezweckt, die beiden Schalen oben ganz frei und doch stets in horizontaler Lage zu haben. Zu dem Ende sind ihre vertikalen Tragstangen, wie dies die Abbildung eines rohen Modelles, Fig. 218, zeigt, in zwei untereinander liegende parallele Wag-

Fig. 217.



arme AB und $A'B'$ eingelenkt, die bei C und C' ihre Mittelachsen haben. Ein am oberen Arme angebrachter Zeiger, der ebenfalls auf einen Gradbogen weist, läßt die normale Gleichgewichtslage ablesen. Da hier für den zweiten Wagarm noch drei weitere Achsen hinzukommen, so kann eine solche Wage selbstverständlich nicht so empfindlich wie eine gewöhnliche Wage sein.

Fig. 218.

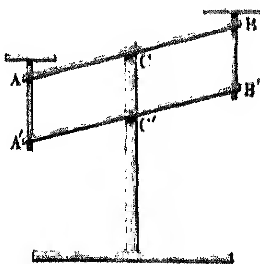
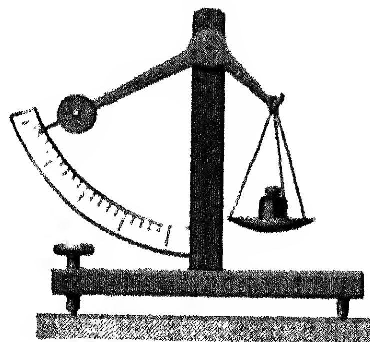


Fig. 219.

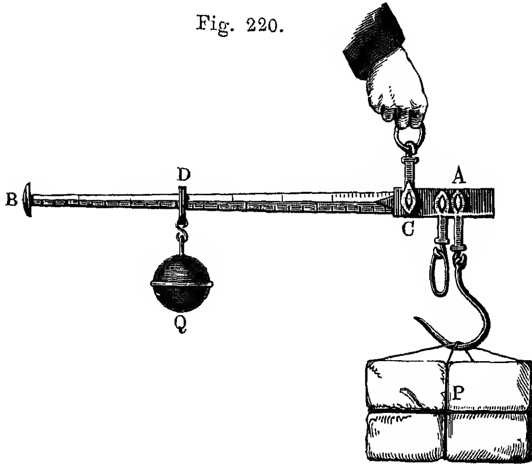


Sortier- oder Briefwage. Um rasch Gegenstände verschiedenen Gewichtes nach gewissen Klassen zu sortieren, benutzt man die in der Fig. 219 schematisch dargestellte Sortier- oder *Briefwage*, da sie auch zur raschen Wägung der Briefe in dieser oder einer verwandten Form dient. Der dem Wagschalenarme gegenüberstehende Arm der Wage ist nach unten gebogen, mit einem Gegengewichte versehen und weist zugleich mit seiner Spitze als Zeiger auf einen Gradbogen. Sowie nämlich dieser Arm beim Beschweren

der Wagschale steigt, wirkt das Gegengewicht in einem größeren Abstande, wodurch wieder Gleichgewicht hergestellt wird. Die Teilung am Gradbogen wird empirisch so angefertigt, daß die Teilstriche unmittelbar das auf die Wagschale gelegte Gewicht in Grammen angeben.

Schnellwage oder Römische Wage. Zu den ungleicharmigen Wagen gehört auch die uralte Schnellwage oder Römische Wage, wie sie die Fig. 220 zeigt. Der zweiarmige Hebel hat seine Achse bei C, während bei A die Wagschale oder ein Haken zur Aufnahme der Last P angebracht ist. Am anderen prismatisch gestalteten Arme B ist ein Laufgewicht Q verschiebbar, und eine Teilung auf diesem Arme gibt an, wie viele Male der Hebelarm CD größer ist als AC. Entspricht also der Nullpunkt der Teilung dem Gewichte der leeren Wagschale, so wird, wenn Q auf Teilstrich n steht, die Last P dem n-fachen Gewichte von Q entsprechen.

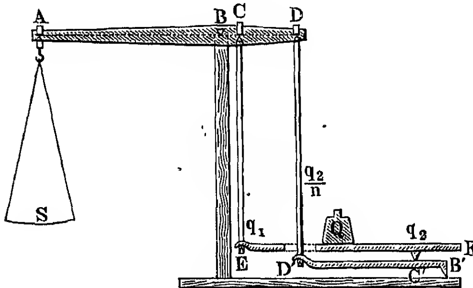
Fig. 220.



Brückenwage. Eine sehr häufig gebrauchte, wichtige Anwendung der ungleichen Hebel stellt die Brückenwage dar, deren Prinzip wir am besten an der schematischen Fig. 221 klar machen können.

Am längeren Arme des Wagbalkens $ABCD$ ist bei A die Wagschale S für die Gewichte angehängt, die also am Hebelarme AB wirkt. Jenseits der Achse B sind am kürzeren Arme zwei Stangen bei C und D angehängt, von welchen DD' unten am längeren Arme des Hebels $B'\ D'$, der bei B' seine Achse hat, eingelenkt ist, während am kürzeren Arme $B'\,C'$ ein Teil der auf dem dreieckigen Brette EF ruhenden Last Q wirkt. Das Brett EF, gewissermaßen die andere Wagschale der Wage, hat also bei C' seinen einen Stützpunkt (oder, wie wir sehen werden, zwei der Basis des Dreiecks entsprechende Stützpunkte) und bei E den zweiten, indem dort an der Spitze des Dreiecks das untere Ende der Stange CE eingelenkt ist.

Fig. 221.



Setzen wir nun kurz die Hebelarme:

$AB = l$, $BC = m$, $BD = o$, $B'D' = o'$, $B'C' = m'$ und bezeichnen das auf die Schale S gelegte Gewicht mit P, die Last auf dem Brette EE

vielen Zuschauern zugleich vorzuführen. Bei diesen tritt die Ge
zurück, die Einfachheit und Übersichtlichkeit dagegen in den
grund. Hierher gehören die verschiedenen Schulapparate, die Pro
apparate usw. [1]).

Die zur physikalischen Forschung bestimmten Apparate und Ins
kommen aus den Händen des Mechanikers nicht in vollkommenem Z
sie besitzen, worauf der Physiker von vornherein gefaßt ist, gewisse
vermeidliche Fehler, welche derselbe entweder durch die Art des Ex
tierens selbst unschädlich zu machen, zu **eliminieren** sucht, oder v
zum Zwecke der **Korrektion** ausmittelt. Häufig ist das Instrumen
gerichtet, daß seine Fehler durch Verstellung seiner Teile weggeschafl
können. Diese Operation wird als **Adjustierung** oder Rektifika
Instruments bezeichnet.

Die richtige Behandlung der Apparate überhaupt, die Adjustier
Rektifikation der Meßinstrumente, die Eliminierung der Beobachtu
durch sinnreiche Gruppierung der Messungen, kurz, das Experir
erfordert nicht allein theoretische Kenntnisse, sondern auch techn
schicklichkeit, welche selbstverständlich nur im physikalischen Labo
praktisch angeeignet werden kann [2]).

§ 5. Methode der physikalischen Forschung. Bei der physi
Erforschung einer Gruppe von Erscheinungen lassen sich mehrer
unterscheiden.

Die **erste Stufe**, welche wir die **qualitative** nennen kön
schäftigt sich mit der Beobachtung des allgemeinen Verlaufes der
nungen, mit der Feststellung derjenigen Elemente oder Größen
dabei eine Veränderung erleiden, und mit der experimentellen Erf
der gegenseitigen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der beobacht
änderungen.

Wenn z. B. das freie Fallen von Körpern Gegenstand der Erf
wäre, so würde zuerst die senkrechte Richtung des Falls, dann die
der Geschwindigkeit mit der Verlängerung der Fallzeit oder des F
zur Beobachtung gelangen; auch würde man durch gleichzeitiges Fa
mehrerer Körper von ungleicher Größe und Beschaffenheit sich üb
daß die Fallgeschwindigkeit von diesen letzteren nicht merklich abl

Die **zweite Stufe** ist die der **quantitativen** Erforschung. M
die voneinander als abhängig erkannten veränderlichen Größen zu
wobei man die Umstände der Beobachtungen so auswählt, bezieh
die Experimente so abändert, daß alle möglichen Hauptfälle zur Bec

[1]) Eine ganz vortreffliche, leider zu wenig bekannt gewordene A
über wissenschaftliche Apparate aus der Feder des hervorragenden
Physikers J. Cl. Maxwell findet sich in dem Handbuch zur internatio
stellung wissenschaftlicher Apparate in London 1876, deutsche Aus
R. Biedermann. London, Chapman and Hall.

[2]) Anleitung hierzu geben die bekannten vortrefflichen Lehrbüche
rausch, Praktische Physik; Frick-Lehmann, Physikalische Technik
mann und Ebert, Physikalisches Praktikum; Weinhold, Physikalisc
strationen.

oder der zweiten Wagschale mit Q und die Distanzen dieser Last vom Stützpunkt bei E und bei C' mit r und s, so sind die Teilkräfte q_1 und q_2, mit welchen die Last Q bei E auf die Stange EC und bei C' auf den unteren Hebel $D'B'$ drückt, gegeben durch:

$$q_1 = Q \frac{s}{r+s}, \quad q_2 = Q \frac{r}{r+s};$$

ferner ist die Kraft, welche am Hebel $D'B'$ bei D' der Kraft q_2 das Gleichgewicht hält bzw. an der Stange DD' wirken wird:

$$q_2' = \frac{m'}{o'} \cdot q_2 = Q \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \frac{m'}{o'}.$$

Demnach wird nun am Haupthebel $ABCD$ Gleichgewicht sattfinden, wenn man hat:

$$P.l = mq_1 + oq_2' = Q\left[m \frac{s}{r+s} + o \frac{m'}{o'} \frac{r}{r+s}\right].$$

Ist nun das Verhältnis der Hebelarme BC und BD gleich dem der Hebelarme $B'C'$ und $B'D'$, also:

$$\frac{m}{o} = \frac{m'}{o'} \quad \text{oder} \quad o = m \frac{o'}{m'},$$

so wird einfach

$$P.l = Q.m.$$

Es hängt also das Verhältnis $\frac{P}{Q}$ bloß von demjenigen der Hebelarme $\frac{m}{l}$, d. h. dem Arme der Wagschale l und dem kurzen Arme m jenseits, an welchem die Stange CE wirkt, ab, und ist ganz unabhängig von der Stelle, an welcher die Last Q auf die Brücke aufgesetzt wird. Ist also der Arm l 10 mal länger als m, so hat man

$$P = \frac{Q}{10},$$

und erhält also dann die sogenannte Dezimalwage, bei der man auf die Wagschale S zum Gleichgewicht nur $^1/_{10}$ der Last Q aufzulegen braucht. Aus den obigen Gleichungen folgt auch, daß, wenn die Stange CE, welche das Brett an der einen Seite hält, um die Größe x sinkt, dann die Stange DD' am Hebel BD um $x \frac{o}{m}$ und folglich der Stützpunkt C' des Brettes am Hebel $D'B'$ um $x \frac{o}{m} \cdot \frac{m'}{o'}$ sinken wird, oder also gemäß der Relation

$$\frac{m'}{o'} = \frac{m}{o}$$

ebenfalls um x; das Brett bleibt sonach, wie es auch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten verlangt, bei der Bewegung der Wage horizontal, wenn es anfänglich diese Lage hatte.

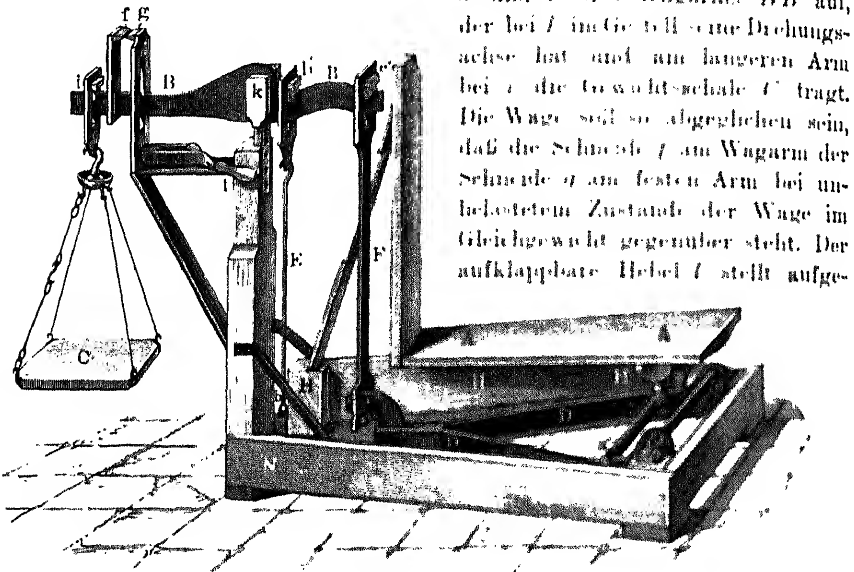
Die Fig. 222 gibt eine perspektivische Ansicht einer Dezimalwage, wie sie 1823 von Quintenz in Straßburg angegeben und konstruiert worden ist.

Das Brett A, welches zur Aufnahme der Last dient, ist auf einem dreiseitigen hölzernen Rahmen H befestigt, von dem die Figur ebenso wie vom

Brett A nur die hintere Hälfte darstellt, um den unteren Mechanismus zu zeigen.

Der Rahmen H ruht nämlich einerseits auf der langen Schneide aa auf und hängt andererseits mit einem Haken in der Öse b der Stange E. Die Schneide aa ist auf den Schenkeln des eisernen Dreiecks DD befestigt, dessen Basis mit den Schneiden dd als Achsen auf festen Pfannen am Gestell N aufruht. An der Spitze des Dreiecks ist die Nase e mit Schneide befestigt, die in eine Pfanne der Stange F eingehängt ist. Die Stangen E und F ruhen mit Pfannen auf den Schneiden h' und e' des Wagarms BB auf, der bei i im Gestell seine Drehungsachse hat und am längeren Arm bei k die Gewichtsschale C trägt. Die Wage soll so abgeglichen sein, daß die Schneide f am Wagarm der Schneide g am festen Arm bei unbelastetem Zustande der Wage im Gleichgewicht gegenüber steht. Der aufklappbare Hebel l stellt aufge-

Fig. 222.



schlagen eine Arretierung der Wage dar, indem er durch Heben des Wagschalearmes das Brett A so weit sinken macht, daß es sich auf den Rand des Gestelles N auflegt. Zur Schonung der Schneiden wird der Hebel erst heruntergeschlagen, wenn auf die Schale C bereits so viel Gewichte aufgelegt worden sind, daß sie der Last auf der Brücke A nahezu das Gleichgewicht halten und man dann nur wenig hinzuzulegen oder fortzunehmen hat, um die beiden Schneiden f und g zum Einstehen zu bringen.

Eine für den Gebrauch wohl etwas bequemere und kompendiösere Form der Brückenwage hat Schönemann 1854 angegeben[1].

§ 71. Einfluß vertikaler Beschleunigung auf den Druck oder Zug einer Masse; Poggendorffs Wage.

Denken wir uns zwei Körper A und B (Fig. 223) aufeinander gelegt. Die Masse des oberen Körpers A betrage m, folglich der Druck desselben auf den unteren Körper im Ruhezustande mg, wenn g die Acceleration der Schwere ist. Dieser selbe Druck wird gemäß dem Prinzip der Wechselwirkung (§ 44) auch auf den oberen

---

[1]) Denkschriften der math.-naturforschenden Klasse der Wiener Akademie VIII, 1854, Abh. von Nichtmitgliedern.

Körper ausgeübt. Um dies besser einzusehen, können wir uns denken, daß zwischen beide Körper eine Spiralfeder gelegt werde (Fig. 224). Es ist klar, daß dieselbe, indem sie zusammengedrückt wird, nach unten und nach oben den gleichen Druck ausüben muß [1]), welchen die direkt aufeinander gelegten Körper gegenseitig ausüben.

Der untere Körper drückt offenbar nur deshalb auf den oberen, weil er ihn am Fallen hindert; wenn also der untere Körper selbst fällt, so hindert er auch den oberen nicht mehr am Fallen, und somit hört auch der gegenseitige Druck während des freien Fallens beider Körper auf.

Um auch dies klarer einzusehen, denken wir uns zuerst beide Körper vertikal übereinander mit einem Abstande zwischen beiden festgehalten und dann zu gleicher Zeit frei fallen gelassen. Beide fallen gleich schnell; ihr Abstand bleibt daher während des Fallens immer gleich groß. Würden wir daher beide Körper vor dem Fallenlassen durch eine nicht gespannte Spiral-

Fig. 223.



Fig. 224.

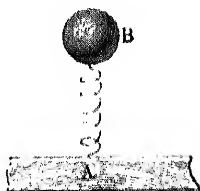
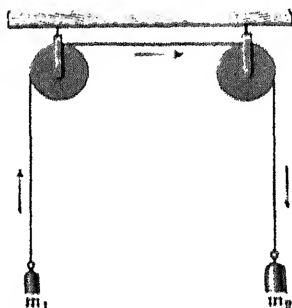


Fig. 225.



feder verbunden haben, so würde diese Feder auch während des Fallens keinen Druck und keinen Zug erleiden; die beiden Körper würden daher auch dann aufeinander keine Kraft ausüben, wenn sie von vornherein unmittelbar miteinander in Berührung ständen.

Was wird aber erfolgen, wenn wir den unteren Körper nicht mit der Acceleration des freien Falles g, sondern mit einer kleineren γ nach abwärts bewegen? Der untere Körper hindert dann den oberen Körper zwar nicht vollständig, zwingt ihn aber doch, eine um $g - \gamma$ kleinere Beschleunigung anzunehmen als er bei voller Freiheit annehmen würde. Es ist unschwer einzusehen, daß unter diesen Umständen der gegenseitige Druck die Größe $m(g - \gamma)$ haben wird. Für $\gamma = 0$, d. h. für den Fall der Ruhe, geht dieser Ausdruck in mg über, für den Fall $\gamma = g$, d. h. für den freien Fall, wird er $= 0$. Würden wir $\gamma > g$ werden lassen, so würde der Druck $= m(g - \gamma)$ negativ, d. h. aus dem Druck wird ein Zug, der die Körper trennt oder zu trennen strebt, wenn sie zusammenhängen.

Geben wir endlich dem unteren Körper eine Beschleunigung nach aufwärts, d. h. nehmen wir γ negativ, so wird der gegenseitige Druck $= m(g + \gamma)$, also größer als während der Ruhe.

Fassen wir dies zusammen, so können wir sagen: der Druck, den ein Körper infolge der Schwere auf seine Unterlage ausübt und seinerseits von

[1]) Das Gewicht der Spiralfeder wird hier vernachlässigt.

der letzteren erfährt, ist keine unter allen Umständen konstante Größe, sondern abhängig von dem Werte der Beschleunigung, mit welcher der Körper samt der Unterlage sich der Erde nähert oder von ihr entfernt. Der Druck ist nämlich nicht bloß proportional der Masse des Körpers, sondern auch dem Unterschied zwischen der Beschleunigung des freien Falles und der Beschleunigung der wirklich stattfindenden Bewegung. Dasselbe gilt natürlich auch für den Zug von Körpern, welche vertikal übereinander zusammenhängen.

Denken wir uns jetzt einen Faden horizontal über zwei Rollen gelegt und an dem einen Ende mit der Masse m_1, an dem anderen mit der Masse m_2 belastet (Fig. 225).

Ist die Acceleration der Schwere $= g$, so sind die Kräfte, mit welchen die ruhig hängenden Massen m_1 und m_2 den Faden nach der einen und nach der anderen Seite zu ziehen suchen, gegeben durch

$$m_2 g \quad \text{und} \quad m_1 g.$$

Es sei nun $m_2 > m_1$, mithin überwiegt die Kraft auf Seite der Masse m_2 um den Betrag

$$(m_2 - m_1) g.$$

Mit dieser Kraft wird also auch eine Bewegung der Massen m_1 und m_2 in der Richtung der Pfeile eingeleitet werden. Die dabei eintretende Beschleunigung γ finden wir aus der Gleichung:

$$(m_1 + m_2) \gamma = (m_2 - m_1) g$$

$$\gamma = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Untersuchen wir jetzt, mit welcher Kraft der Faden an den beiden Enden gespannt wird, während die Beschleunigung γ dauert.

Die Masse m_1 wird von der Schwere mit der Acceleration g nach abwärts gezogen, gleichzeitig wirkt die oben berechnete resultierende Beschleunigung γ nach aufwärts, folglich ist die Fadenspannung auf der linken Seite $= m_1 (g + \gamma)$. Auf der rechten Seite findet man für dieselbe auf ähnliche Weise den Wert $m_2 (g - \gamma)$.

Diese beiden Fadenspannungen müssen nun offenbar einander gleich sein gemäß dem Prinzip der Wechselwirkung. Dabei darf man aber nicht die Kräfte, welche den Faden während der Bewegung spannen, verwechseln mit der Kraft, die den Faden samt den Massen in Bewegung setzt.

In der Tat erhält man für die beiden Fadenspannungen, wenn man für γ seinen Wert untersetzt, ein und denselben Wert, nämlich:

$$\frac{2\, g m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Mit dieser selben Kraft werden die Achsen der beiden Rollen senkrecht nach abwärts gedrückt, während die Bewegung vor sich geht[1]).

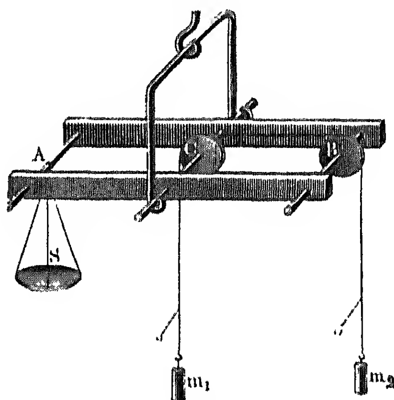
Würde man dagegen die Bewegung hindern, indem man den Faden zwischen den Rollen festhält, so wären die beiden Fadenspannungen, also auch die Vertikaldrucke auf die Rollenachsen nicht gleich groß, sondern hätten die oben angegebenen Werte $m_1 g$ und $m_2 g$.

[1]) Die Richtigkeit dieser Behauptung wird später bei Besprechung der fixen

Um das hier Vorgetragene experimentell zu bestätigen, eignet sich vortrefflich der unter dem Namen Poggendorffsche Wage (oder Poggendorffsche Fallmaschine) bekannte, beistehend schematisch abgebildete Apparat, Fig. 226.

Der Wagebalken besteht aus zwei parallelen Stäben, welche durch drei Querstäbe in der Mitte und an den beiden Enden verbunden sind. Der mittlere Querstab dient zugleich als Mittelachse für den Balken und als Achse für die Rolle C. Von den Querstäben an den Enden dient der eine ebenfalls als Achse einer Rolle B, der andere, A, trägt ein Gehänge mit Schale S.

Fig. 226.



Der über die beiden Rollen gelegte starke Faden kann mit zwei Massen, m_1 und m_2, belastet werden, welche die Form von Gefäßen besitzen, um Zulagegewichte aufnehmen zu können. Es ist bequem, wenn das Gehänge mit der Schale links ebensoviel wiegt wie die Rolle B, so daß sich also der Balken horizontal einstellt, wenn die Massen m_1, m_2 nicht angehängt sind. Man kann nun folgende Versuche anstellen [1].

Erster Versuch. Es werden an die Fadenenden zwei gleiche Massen m_1 angehängt. Der Faden bleibt dann in Ruhe, aber der Balken sinkt bei B; um ihn horizontal zu erhalten, muß man bei A ebenfalls eine Masse $= m_1$ zulegen.

Zweiter Versuch. An das Fadenende bei C wird eine Masse m_1, an das Fadenende bei B eine größere Masse $m_2 = m_1 + q$ angehängt. Um die letztere zu kompensieren, wird auf die Schale S eine gleich große Masse aufgelegt. Dann wird zuerst eine am Faden rechts befindliche Schleife an das Zapfenende von B eingehängt, damit die Masse m_2 noch nicht sinken kann. Es muß dann der Wagebalken horizontal stehen bleiben. Hängt man aber jetzt die Schleife aus (oder brennt sie ab), so beginnt m_2 zu sinken, und sofort steigt der Balken bei B in die Höhe. Er wird nämlich bei B, wie oben berechnet wurde, nur mit der Kraft $\frac{2\,g\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$ nach abwärts gezogen, während das Ende A mit der Kraft $g m_2$ angezogen wird. Die Differenz dieser Kräfte ist:

$$g m_2 - \frac{2\,g\,(m_1\,m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{g m_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Folglich muß an den Faden bei B noch eine Masse

$$\frac{m_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + q)\,q}{2\,m_1 + q}$$

---

[1] Die ersten drei dieser Versuche sind von W. Barontin quantitativ angestellt und in Poggendorffs Jubelband, S. 213, näher beschrieben. Es wurde dabei zur Kompensation der Reibung und der Trägheit der Rollenmasse noch ein weiteres Zulegegewicht beigefügt. Wegen der richtigen Deutung dieser Versuche vergleiche man Dr. A. Amthors kritische Darstellung in den Sitzungsberichten der Naturw. Ges. Isis in Dresden 1879, S. 32.

hinzugegeben werden, damit während der Bewegung der Massen der Wagebalken im Gleichgewicht bleibe.

Dritter Versuch. An das Fadenende bei B kommt die Masse m_1, an das Ende bei C die größere Masse $m_2 = m_1 + q$. Die Schale S erhält eine Masse $= m_1$. Es wird zunächst das Sinken von m_2 durch Einhängen der Fadenschleife verhindert. Der Balken stellt sich dann horizontal. Sowie aber die Masse m_2 freigelassen wird, so sinkt der Balken bei B. Um dieses zu verhindern, muß man bei A eine Masse zulegen, welche sich folgendermaßen berechnen läßt.

Die Fadenspannung bei B ist wiederum wie früher $= \frac{2\,g\,(m_1 m_2)}{m_1 + m_2}$, die bei A dagegen ist $= m_1\,g$. Es muß daher bei A eine Kraft hinzugefügt werden gleich der Differenz:

$$\frac{2\,g\,(m_1 m_2)}{m_1 + m_2} - m_1 g = g\,\frac{m_1\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2},$$

die zuzulegende Masse beträgt demnach:

$$\frac{m_1\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\,q}{2\,m_1 + q}.$$

Vierter Versuch[1]. Man legt den Faden nur über die Rolle B allein und hängt an seine beiden Enden die Massen m_1 und $m_2 = m_1 + q$. Man verhindert zuerst das Sinken von m_2, indem man eine Fadenschleife einhängt. Die Schale S wird mit einer Masse $= m_1 + m_2$ belastet, worauf der Wagebalken sich horizontal stellt. Läßt man nun die Masse m_2 frei, so sinkt sie, während m_1 steigt. Dies hat denselben Effekt, als wenn die Masse $m_2 - m_1 = q$ allein sinken würde. Die Beschleunigung γ, mit der dies geschieht, ist $= \frac{q}{2\,m_1 + q}\,g$. Indem die Masse q mit der Beschleunigung γ sinkt, verliert sie an Zugkraft die Größe:

$$\gamma\,q = \frac{q_2\,g}{2\,m_1 + q},$$

was einem Verluste an Masse $= \frac{q_2}{2\,m_1 + q}$ gleichkommt.

Man muß also auch der Schale S eine Masse $= \frac{q_2}{2\,m_1 + q}$ entnehmen, damit während der Bewegung der Balken horizontal bleibt.

Poggendorff hat bei Veröffentlichung dieses sehr instruktiven Apparates das demselben zugrunde liegende Prinzip folgendermaßen ausgesprochen: Das Gewicht eines Körpers ändert sich, wenn er sich vertikal nach aufwärts oder abwärts bewegt, und zwar wird der Körper im ersten Falle schwerer, im letzten Falle leichter.

Allein in dieser Form ist der Satz nicht bloß ungenau, sondern geradezu unrichtig.

---

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, S. 192. Daselbst ist auch eine vollkommener ausgeführte Poggendorffsche Wage abgebildet. Der Verfasser hat statt des Abbrennens der Fadenschleife eine elektromagnetische Auslösung angebracht, welche die Rolle durch elektromagnetische Einwirkung festhält und durch Öffnen eines Stromkontaktes frei läßt.

Es ist klar, daß hier „Gewicht" nicht als Masse verstanden ist. Definieren wir aber Gewicht als Kraft, mit der der Körper von der Erde angezogen wird, so würde obiger Satz dem Unabhängigkeitsprinzip (§ 45) widersprechen, welches verlangt, daß die Einwirkung einer Kraft auf einen Körper unabhängig sei von dem Bewegungszustande, der vorher in ihm vorhanden ist. Statt „Gewicht" muß hier Druck auf die Unterlage oder Fadenspannung gesagt werden. Aber auch dann ist der Satz noch unrichtig, da er als Bedingung für die „Gewichtsänderung" einfach nur Bewegung in vertikaler Richtung ausspricht. Es müßte also auch dann diese „Gewichtsänderung" eintreten, wenn man den Körper mit konstanter Geschwindigkeit, ohne Beschleunigung bewegen würde. Dies ist aber nicht der Fall; nur eine Beschleunigung kann diese Wirkung hervorbringen.

Um dies einzusehen, fassen wir noch einmal die in Fig. 224 dargestellten, durch eine Spiralfeder verbundenen Körper ins Auge. Dieselben seien ursprünglich in Ruhe, daher die Spirale mit der Kraft mg zusammengedrückt. Wir versetzen nun den Körper A in eine Bewegung vertikal nach abwärts mit konstanter Geschwindigkeit v. Offenbar ist es unmöglich, diese Geschwindigkeit sofort zu erreichen, wenn wir auch eine noch so große Kraft dazu aufwenden. Die Geschwindigkeit muß vielmehr alle Werte zwischen Null und v erst durchlaufen, d. h. der Körper A wird zuerst in beschleunigte Bewegung und dann erst in gleichförmige Bewegung versetzt. Während der beschleunigten Bewegung gilt nun das, was wir oben gezeigt. Je nachdem die Beschleunigung gleich, kleiner oder größer als g ist, wird während dieser ersten Zeit die Spiralfeder entspannt oder zusammengedrückt, oder auseinandergezogen.

Nach Eintritt der konstanten Geschwindigkeit ändert sich der Sachverhalt. Der Körper A hindert von da an wiederum den Körper B am freien Fall, d. h. an Zunahme von Geschwindigkeit, es muß daher wiederum die Feder zunächst zusammengedrückt werden wie während der Ruhe. In Wirklichkeit wird die Feder dabei in schwingende Bewegung um die frühere Ruhelage gelangen.

Denken wir uns jetzt die beiden Körper ohne Spiralfeder direkt im Zusammenhange, so werden sie denselben Druck (bzw. Zug) direkt aufeinander ausüben, den sie vorhin durch die Spiralfeder ausübten. Sobald die Geschwindigkeit konstant geworden, drücken oder ziehen sie sich wie während der Ruhe. Dasselbe gilt bei gleichförmiger Geschwindigkeit vertikal nach aufwärts. Wenn man in einem Aufzuge (Lift) emporsteigt oder niedersinkt, bemerkt man stets nur zu Beginn und am Ende der Fahrt, wo sich die Geschwindigkeiten ändern, eine Wirkung auf das Blut im Gehirn, nicht aber während der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

§ 72. Kraftantrieb, Bewegungsgröße, Arbeit und lebendige Kraft.

Indem wir bei der Darstellung der Bewegungserscheinungen zunächst nur die Raum- und Zeitbeziehungen ins Auge faßten, gelangten wir zu den vier Begriffen: Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, für welche wir die Gleichungen

$$v = \varphi t,\ s = \frac{\varphi t^2}{2}$$

feststellten. Aus der letzteren folgt:

$$q s = \frac{v^2}{2}.$$

Wir können also die Beziehungen [illegible] ausdrücken durch das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} v &= q t \\ q s &= \frac{v^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Nachher führten wir den Begriff der M[illegible] Multiplizieren wir die Gleichungen (1) beiderseits mit m, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} m v &= m q t \\ m q s &= \frac{m v^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Das Produkt mq haben wir [illegible] Kraft belegt. Führen wir zur Abkürzung hierfür den Buchstaben [illegible] ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} m v &= p t \\ p s &= \frac{m v^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Die in diesen beiden Gleichungen [illegible] haben, teils schon vor längerer, teils in neuerer Zeit [illegible] erhalten, und zwar nennt man:

- mv die Bewegungsgröße (Bewegungsquantität[1]),
- pt den Kraftantrieb (Impuls, Zeiteffekt der Kraft[2]),
- ps die Arbeitsgröße (Wegeffekt der Kraft[3]),
- $\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft[4] (lebendige Arbeit, Wucht).

Die Gleichungen (3) lauten also in Worten:

1. Die Bewegungsgröße hat denselben Wert wie der Kraftantrieb.
2. Die Arbeitsgröße hat denselben Wert wie die lebendige Kraft.

Wir haben nun die physikalische Bedeutung dieser Sätze zu erklären.

Es handelt sich darum, ein richtiges Maß für die Wirkung einer Kraft aufzustellen. Nun tritt aber eine Wirkung durch eine Kraft nur ein, wenn sie eine gewisse Zeit hindurch und einen gewissen Weg entlang ausgeübt wurde, und es ist von vornherein klar, daß die Größe ihrer Wirkung außer von der Größe der Kraft selbst auch noch von der Zeitdauer derselben, bzw.

---

[1]) Diese Benennung stammt von [illegible]

[2]) Die Bezeichnung Kraftantrieb wurde [illegible] vorgeschlagen.

[3]) Der Ausdruck Arbeit wurde [illegible] Poncelet wurde dessen Gebrauch befestigt.

[4]) Diese Bezeichnung wurde ursprünglich [illegible] für die Größe mv^2 eingeführt, dann von Coriolis auf $\frac{mv^2}{2}$ [illegible] Nach [illegible] wird mv^2 als lebendige Kraft, $\frac{mv^2}{2}$ als lebendige [illegible] Das deutsche Wort „Wucht" bezeichnet den Begriff sehr treffend.)

von der Länge des Weges abhängig sein müsse. Von vornherein sind daher beide Fragen gleichberechtigt; nämlich die Frage: welches ist die Wirkung einer Kraft in gegebener Zeit? und die andere Frage: welches ist die Wirkung einer Kraft nach Zurücklegung eines gegebenen Weges ihres Angriffspunktes? Das erstemal fragen wir nach dem Zeiteffekt, das zweitemal nach dem Wegeffekt der Kraft.

In beiden Fällen äußert sich die Wirkung der Kraft darin, daß eine Masse eine gewisse Geschwindigkeit aufnimmt. Aus der Größe dieser Masse und der von ihr aufgenommenen Geschwindigkeit muß also die Wirkung der Kraft berechnet werden. Es ergibt sich aber nun, daß diese Berechnung in den beiden Fällen nach ganz verschiedener Weise erfolgen muß, wenn ihr Resultat ein richtiges Maß für die zu messende Kraftwirkung liefern soll. Offenbar soll die Berechnung der Wirkung aus Masse und Geschwindigkeit ein Resultat ergeben, welches unter allen Umständen proportional ist der Größe der Ursache, denn sonst erhielten wir ja kein brauchbares Maß.

Die erste der Gleichungen unter (3) zeigt nun, daß der Zeiteffekt der Kraft (der Antrieb der Kraft p in der Zeit t) gemessen wird durch das Produkt aus der Größe der Masse m und der aufgenommenen Geschwindigkeit v, d. i. durch die Bewegungsgröße.

Die zweite der obigen Gleichungen zeigt, daß der Wegeffekt der Kraft (die Arbeit) gemessen wird durch das Produkt aus der Größe der Masse m mit dem halben Quadrate der aufgenommenen Geschwindigkeit v.

Beide Arten zu messen sind, wie gesagt, gleich richtig und gleich berechtigt. Der lange Streit, der seinerzeit zwischen Cartesius und Leibniz über das richtige Maß der Kraftwirkung geführt wurde[1]), wobei Cartesius die erstere, Leibniz die letztere Methode verfocht, beruhte daher wie später D'Alembert[2]) gezeigt hat, auf einem Mißverständnis.

Die Gleichung

$$pt = mv$$

sagt also zunächst aus, daß die Wirkung einer Kraft p in gegebener Zeit t desto größer ist, je stärker die Kraft p ist und je länger die Zeit t dauert; sie sagt ferner, daß die Kraft bei gleicher Zeitdauer um so größer sein müsse, je größer die Masse m ist, welche in gegebener Zeit in Bewegung gesetzt werden soll, und je größer die Geschwindigkeit ist, welche sie dabei aufnehmen soll.

Um irgend eine Masse m in Bewegung mit der Geschwindigkeit v zu versetzen, reicht also eine beliebig kleine Kraft p aus, wenn wir sie nur hinlänglich lange Zeit t hindurch wirken lassen. Soll jedoch die Geschwindigkeit in kurzer Zeit erreicht werden, so muß die Kraft entsprechend größer sein. Hierher gehört folgender Versuch. An eine Masse, z. B. gleich einem Kilogramm, binden wir einen Faden, der eben hinreicht, etwas mehr als 1 kg zu tragen, ohne zu reißen. Ziehen wir nun an diesem Faden das Kilogramm anfangs sehr langsam, allmählich immer schneller in die Höhe, so können wir demselben nach und nach eine beliebig große Geschwindigkeit erteilen, ohne daß der Faden abreißt. Ziehen wir aber den Faden rasch an, so reißt

---

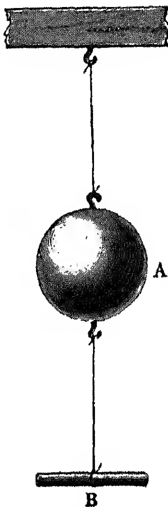
[1]) Derselbe wurde von 1686 an vorzugsweise in den „*Acta eruditorum*" geführt.

[2]) Traité de dynamique, 1743.

derselbe sofort ab, weil die Kraft, welche nötig wäre, um das Kilogramm so schnell in Bewegung zu setzen, größer ist, als der Faden verträgt.

Durch dasselbe Prinzip erklärt sich auch der folgende Versuch: Eine 200 bis 300 g schwere Metallkugel A, Fig. 227, hängt an einem Zwirnsfaden, während ein zweiter ganz gleicher Faden von der Kugel herabhängt. Zieht man nun langsam an dem Querstäbchen B, so bricht der obere Faden, während der untere bricht, wenn man das Querstäbchen durch einen raschen, kräftigen Ruck herabreißt.

Fig. 227.



Im ersten Falle hat der obere Faden den Zug der Hand und das Gewicht der Kugel, der untere Faden nur den Zug der Hand auszuhalten. Im zweiten Falle hat der untere Faden die größere Kraft auszuhalten, die nötig ist, um der Kugel rasch große Geschwindigkeit zu geben.

Den Flügel einer geöffneten Tür kann man durch den schwachen Druck eines Fingers leicht um seine Angeln drehen, weil man Zeit genug aufwenden kann, den nötigen Kraftantrieb allmählich zu sammeln. Schießt man dagegen eine Pistolenkugel gegen den Türflügel ab, so wird er durchlöchert, ohne sich merklich zu bewegen, weil der Widerstand, den die Kohäsion des Holzes der Durchbohrung entgegensetzt, immer noch schwächer ist als die Kraft, welche nötig wäre, in so kurzer Zeit einen Kraftantrieb zu liefern, um die Masse des Flügels mit so großer Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen. Auf ähnliche Versuche kommen wir bei der Reibung zu sprechen.

Da wir von keinem Körper sagen können, welchen absoluten Wert von Geschwindigkeit er besitzt, da ja Geschwindigkeit nur eine relative Größe ist (§ 7), welche je nach dem Bezugskörper einen verschiedenen Wert haben kann, so können wir auch von keiner Masse sagen, wie groß der absolute Wert ihrer Bewegungsquantität ist. Auf der Erdoberfläche nehmen wir gewöhnlich an, daß eine Masse keine Bewegungsquantität habe, wenn sie in bezug auf die Erdoberfläche in relativer Ruhe ist. Wir lassen also die Bewegungsquantität unberücksichtigt, welche der Masse schon infolge ihrer Rotation um die Erdachse und der Bewegung um die Sonne zukommt. Ferner machen wir darauf aufmerksam, daß, da die Masse immer nur eine positive Größe ist, dagegen v positiv oder negativ genommen werden kann, auch die Bewegungsquantität sowohl positiv als negativ sein kann. Demgemäß sollte also die Gleichung $pt = mv$ besser so ausgedrückt werden: die Veränderung der Bewegungsgröße eines Körpers ist numerisch gleich dem Antriebe der Kraft, durch welchen sie hervorgebracht wird, und stimmt in der Richtung mit jener der Kraft überein.

Bevor wir daran gehen, die physikalische Bedeutung der zweiten Gleichung

$$ps = \frac{mv^2}{2}$$

zu erklären, müssen wir die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft näher auseinandersetzen, weil von dem richtigen Erfassen der Bedeutung dieser überaus wichtigen Begriffe das Verständnis eines großen Teiles der Physik abhängt.

keit gemessen werden.

Die dritte Stufe beschäftigt sich mit der Aufstellung eines empirischen Gesetzes, beziehungsweise einer empirischen Gleichung, das heißt eines Satzes (einer Regel) oder einer Gleichung, welche, wie man sich ausdrückt, „die Beobachtungen wiedergibt". Jede solche Gleichung enthält zwei oder mehrere veränderliche Größen und eine Anzahl konstanter Zahlenwerte, kurzweg Konstante genannt. Je weniger Konstante die Gleichung enthält, desto einfacher lautet das Gesetz. Man sucht daher mit der möglichst kleinsten Anzahl von Konstanten auszukommen und greift nicht früher zu einer größeren Anzahl derselben, als bis man sich überzeugt hat, daß die kleinere Anzahl nicht ausreicht, um sämtliche Beobachtungen mit derselben Genauigkeit darzustellen, mit der sie gemessen sind.

In dem gewählten Beispiele würde man also allenfalls zuerst versuchen, die Fallzeit t und den zugehörigen Fallraum s durch eine Gleichung von der Form:

$$s = at$$

zu verknüpfen, wonach das empirische Gesetz lauten würde: die Fallräume sind proportional den Fallzeiten. Man würde dann aber sofort finden, daß es keinen Wert der Konstanten a gibt, welcher allen Beobachtungen genügt, daß mithin dieses Gesetz ungenügend oder unrichtig ist. Man wird folglich ein weniger einfaches Gesetz, z. B. jenes entsprechend der Gleichung:

$$s = at + bt^2$$

anzuwenden versuchen und sich bald überzeugen, daß dieses bis auf die Beobachtungsfehler genau sämtlichen Messungsresultaten sich anschließe, indem bei geeigneter Wahl der Konstanten a und b sämtliche beobachtete Werte von t, der Reihe nach in die Gleichung eingesetzt, die zugehörigen beobachteten Werte von s mit genügender Annäherung ergeben.

Die aufgestellte empirische Gleichung ist zunächst der kürzeste Ausdruck sämtlicher von uns gemachter Beobachtungen; aber sie ist noch etwas Wesentliches mehr. Haben wir die Fallräume für die Fallzeiten von 1, 3, 5 Sekunden beobachtet, so halten wir es für höchstwahrscheinlich, daß auch die Fallräume für die dazwischen liegenden Fallzeiten von 2, 4 Sekunden dieser selben Gleichung entsprechen (Interpolation), ja wir schließen, wenn auch schon mit einem geringeren Grade der Sicherheit, daß dies auch für die über das Beobachtungsgebiet von 5 Sekunden hinausgehenden Zeiträume von z. B. 10 Sekunden der Fall sein werde (Extrapolation). Das heißt, wir betrachten die empirische Gleichung nicht allein als Ausdruck aller wirklich gemachten, sondern auch als den aller künftig zu machenden Erfahrungen. Indem wir aber diese Bedeutung der Gleichung zulassen, ziehen wir, auf Grund einer stillschweigend gemachten Annahme, einen Schluß, der uns höchst wahrscheinlich scheint, dessen Berechtigung aber erst noch zu erweisen ist. Es ist dies die Annahme, daß dieselbe Abhängigkeit des Fallraumes von der Fallzeit, die wir für bestimmte Fallzeiten beobachtet

§ 73. Begriff der Arbeit und Maß derselben. Man sagt, eine Kraft eiste eine Arbeit, wenn durch diese Kraft ihr Angriffspunkt in ihrer Richtung unter Überwindung einer Gegenkraft oder überhaupt eines Widertandes längs eines Weges verschoben wird. Zu einer Arbeit gehören also mmer zwei Dinge, eine Kraft und eine dadurch bewirkte Bewegung; wo ines von beiden fehlt, ist keine Arbeitsleistung vorhanden.

So z. B. übt ein auf den Tisch gestelltes Kilogrammgewicht zwar einen Druck, also eine Kraft aus; da aber keine Bewegung erfolgt, so ist dabei eine Arbeit. Ein Pferd, das an einen Wagen gespannt ist, welchen es nicht n Bewegung zu setzen vermag, leistet trotz allen Kraftaufwandes keine rbeit. Andererseits leistet ein Mann, der eine Säge in freier Luft hin und er bewegt, keine Arbeit, da dabei kein Widerstand, keine Gegenkraft überunden wird[1]). Sobald aber die Säge in den Holzblock eingreift, beginnt r Widerstand und damit die Arbeitsleistung.

Arbeiten oder Arbeit leisten bedeutet also zunächst den Akt oder den Vorgang der Bewegung unter Überwindung einer Gegenkraft. Das, was araus entsteht, die eingetretene Veränderung in der Lage oder im Bewegungsustande der Massen, also das Resultat des Arbeitens wird meistens Arbeit enannt, doch werden wir noch einen anderen Ausdruck dafür kennen lernen. ie Arbeitsgröße wird bestimmt durch das Produkt aus der Länge des bei er Arbeitsleistung zurückgelegten Weges mit der Größe der Kraft. Wird er Angriffspunkt der Kraft nicht in ihrer Richtung, sondern in einer anderen ichtung verschoben, so kommt nur die in die Richtung der Bewegung fallende omponente der Kraft in Betracht.

Als Einheit der Arbeitsgröße gilt die Überwindung einer Kraft von er Stärke Eins längs des Weges Eins. Im Gravitationsmaßsystem ist rafteinheit bekanntlich jene Kraft, mit welcher 1 kg nach abwärts gezogen ird. Als Längeneinheit gilt das Meter. Folglich ist eine Arbeitseinheit in iesem Maßsystem entsprechend der Hebung eines Kilogramms um die Höhe nes Meters. Diese Arbeitseinheit heißt Kilogrammeter oder Meterilogramm.

Im absoluten Maßsystem gilt als Krafteinheit für größere Kräfte dienige Kraft, welche einer Masse = 1 kg pro Sekunde die Beschleunigung m erteilt. Die Überwindung dieser Kraft ngs eines Meters ist demnach die absote Einheit der Arbeit. Hierfür wird der ame Joule (zu Ehren des englischen hysikers dieses Namens) gebraucht[2]). In

Fig. 228.



esem Maße gemessen wäre die Hebung eines Kilogramms auf 1 m Höhe e Arbeit = 9,8 Joule (vorausgesetzt, daß 9,8 m die Acceleration der hwere an dem betreffenden Orte ist).

Um uns auch von dieser Arbeitseinheit nach absolutem Maße eine klare orstellung zu verschaffen, denken wir uns eine schiefe Ebene, Fig. 228, deren ypothenuse die Länge = 1 m, deren vertikale Kathete die Höhe von $\frac{1}{9,8}$ m = 10,2 cm besitzt. Setzen wir auf diese schiefe Ebene eine ohne Reibung

---

[1]) Dabei wird von der Masse der Säge zunächst abgesehen.

[2]) Ursprünglich verstand man unter „Joule" nur die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge; jetzt benutzen wir „Joule" als Einheit der Energie überhaupt.

bewegliche Masse = 1 kg, so erfährt dieselbe (nach § 48) in der Richtung CB eine Kraft, welche gleich $\frac{1}{9{,}8}$ der Kraft ist, mit welcher das Kilogramm von der Erde angezogen wird. Da die letztere Kraft aber in absolutem Maße = 9,8 ist, so ist sie längs der schiefen Ebene $= \frac{9{,}8}{9{,}8} = 1$. Um also das Kilogramm vom Fuße der schiefen Ebene in B auf die Höhe C zu bewegen, ist in absolutem Maße die Arbeit = 1 erforderlich. Genau dieselbe Arbeit ist aber auch erforderlich, um das Kilogramm vom Fußpunkte A auf die Höhe bis C zu heben. Denn die zu überwindende Kraft ist = 9,8, der Weg $= \frac{1}{9{,}8}$, das Produkt Kraft × Weg ist also $= 9{,}8 \times \frac{1}{9{,}8} = 1$ wie vorhin.

Zum horizontalen Transport des Kilogramms von B nach A ist kein Arbeitsaufwand erforderlich, da die Richtung BA auf der Richtung der Schwerkraft senkrecht steht, also die Projektion der Kraft auf die Bewegungsrichtung = 0 ist. Es folgt somit, daß der Transport von B über A nach C genau ebensoviel Arbeitsaufwand erfordert wie der Transport über die schiefe Ebene BC nach C.

Statt der aus dem Meter und dem Kilogramm abgeleiteten für physikalische Messungen unbequem großen Kraft- und Arbeitseinheiten sind, wie schon im § 40 mitgeteilt wurde, von den Physikern die Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekunden-Systems (C. G. S.) adoptiert worden.

Die aus diesem System abgeleitete Krafteinheit, welche einem Gramm pro Sekunde 1 cm Geschwindigkeit erteilt, wurde **Dyne** genannt. Die demselben System angehörige Arbeitseinheit, welche der Überwindung einer Dyne längs 1 cm gleichkommt, heißt **Erg**[1]).

Beispielsweise wird also an einem Orte, wo die Acceleration der Erde 980 cm beträgt:

1 g von der Erde angezogen mit der Kraft von . .	980 Dynen,
Zur Hebung von 1 g auf 1 cm Höhe erfordert eine Arbeit = ...	980 Erg,
Auf der in Fig. 228 dargestellten schiefen Ebene wird 1 kg längs CB durch die Schwerkraftskomponente gezogen mit einer Kraft = . .	1000×100 Dynen $= 10^5$ Dynen,
Zur Hinaufbewegung des Kilogramms von B bis C wird demnach erfordert ein Arbeitsaufwand = ...	$1000 \times 100 \times 100$ Erg $= 10^7$ Erg.

Wir haben demnach:

$$1 \text{ Joule} = \frac{\text{Meterkilogramm}}{9{,}8} = 10^7 \text{ Erg},$$

$$1 \text{ Erg} = \frac{\text{Centimeter-Gramm}}{980} = \frac{\text{Joule}}{10^7}.$$

[1]) Abgekürzt von Ergon (ἔργον) die Arbeit. In manchen Lehrbüchern wird statt „die Dyne“ „das Dyn“ gebraucht. Rein sachlich betrachtet ist die Kraft allerdings nichts Weibliches. Etymologisch wird aber „die Dyne“, „das Erg“ als die richtige Übersetzung anzusehen sein. Vom physikalischen Standpunkte ist wohl beides gleich zulässig.

Die Größe der Arbeit ist ganz unabhängig von der Zeit, in der sie geleistet wird. Natürlich wird eine größere Kraft dieselbe Arbeit in kürzerer Zeit zu leisten vermögen.

Die pro Sekunde geleistete Arbeit heißt Effekt oder Leistung. Als Einheit dieser Größe gilt: 1 Joule pro Sekunde. Diese Einheit des Effektes wurde zu Ehren des Erfinders der verbesserten Dampfmaschine Watt genannt. Es gilt also:

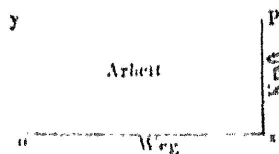
$$1 \text{ Watt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Sekunde}} = \frac{1}{9{,}8}\,\frac{\text{Meterkilogramm}}{\text{Sekunde}} = \frac{10^7\ \text{Erg}}{\text{Sekunde}}.$$

In der Maschinenlehre werden 735 Watt als gleichwertig mit 1 Pferdekraft (richtiger Pferdeleistung) gerechnet, da man letztere (wofür das Zeichen P üblich geworden) $= 75\ \frac{\text{Meterkilogramm}}{\text{Sekunde}}$ annimmt.

Solange wir mit einer konstanten Kraft zu tun haben, ist die Arbeitsgröße einfach proportional der Kraft und ebenso proportional dem Wege, also durch das Produkt der beiden Größen der letzteren gegeben.

Wie jedes Produkt, so können wir deshalb auch eine Arbeitsgröße durch den Flächeninhalt eines Rechteckes darstellen, wie Fig. 229 andeutet.

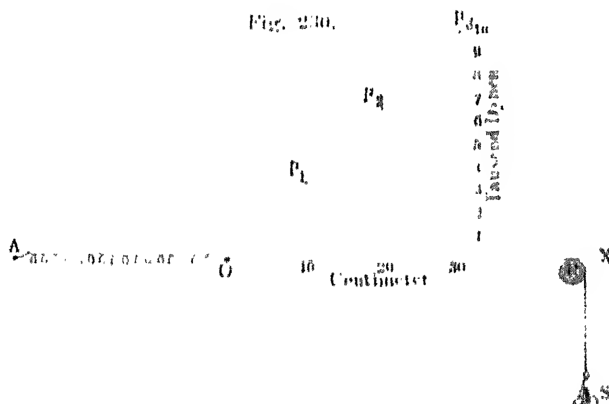
Fig. 229.



Ist die Kraft nicht konstant, so erhalten wir die Arbeitsgröße demnach nach einem analogen Verfahren durch den Flächeninhalt einer Figur, bei welcher an Stelle der Parallelen p eine andere Kurve tritt.

Nehmen wir z. B. folgenden Fall: die Spiralfeder *AO*, Fig. 230, sei bei *A* befestigt und reiche ungespannt bis *O*. Daselbst sei ein Faden angeknüpft, der bei *R* über eine Rolle läuft und bei *S* eine Schale zur Aufnahme von Gewichten trägt. Bei einer Belastung gleich 10,204 g werde die Spiralfeder um 30 cm verlängert. 10,204 g entsprechen einer Kraft = 10,204 · 980 Dynen

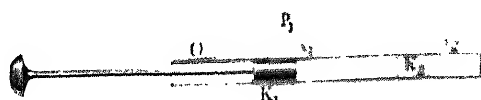
Fig. 230.



= 10000 Dynen. Wir tragen daher im Punkte 30 der Abszissenachse nach einem beliebigen Maße die Höhe 10000 als Ordinate auf. Ebenso verfahren wir bei einer Reihe anderer geringerer Belastungen. Ist die Spannkraft der Feder, was meistens annähernd der Fall ist, proportional ihrer Verlängerung,

so bilden die Spitzen aller Ordinaten eine Gerade, welche vom Punkte O ausgeht, weil dort die Kraft noch Null ist. Die zum Spannen des Fadens bis 30 erforderliche Arbeit wird dann offenbar erhalten durch den Flächeninhalt des Dreiecks. Derselbe ist in unserem Falle $\frac{30 \cdot 10000}{2} = 150000$ Erg. Wäre die Kraft der Feder nicht proportional der Verlängerung derselben, so würde an Stelle der Geraden Op eine krumme Linie treten; die Arbeit würde aber wiederum durch den Flächeninhalt unter der Kurve gegeben sein. Um auch für diesen Fall ein Beispiel heranzuziehen, denken wir uns in Fig. 231 eine einerseits geschlossene Röhre, in welcher mittels des Kolbens K Luft komprimiert wird. Nehmen wir nun die Kolbenwege als Abszissen an und tragen wir für die erreichten Stellungen desselben, z. B. x_1 und x_2, die Widerstände, welchen der Kolben dabei begegnet, als Ordinaten p_1, p_2 usw. auf, so erhalten wir eine Kurve $p_1 p_2$, deren Gestalt je nach den Umständen verschieden gestaltet ist, wie wir in der

Fig. 231.



Wärmelehre erfahren werden. Jedenfalls ist aber die Arbeit, welche wir aufwenden müssen, um den Kolben aus der Stellung K_1 in die Stellung K_2 zu bringen, dargestellt durch den Flächeninhalt der Figur $x_1 p_1 p_2 x_2$ und kann demgemäß durch ein geeignetes planimetrisches Verfahren ermittelt werden. Denkt man sich diesen Flächeninhalt wirklich bestimmt und dividiert man denselben durch den Wert der Länge $x_1 x_2$, so erhält man die Höhe eines Rechtecks von gleichem Flächeninhalt. Diese Höhe, die mittlere Ordinatenhöhe der Kurve $p_1 p_2$, stellt die mittlere Kraft vor. Man kann daher auch sagen, man erhält die Größe einer durch eine veränderliche Kraft geleisteten Arbeit, indem man die Größe des Weges mit dem mittleren Betrage der Kraft multipliziert.

Endlich müssen wir noch wegen des algebraischen Zeichens der Arbeitsgröße eine Bemerkung beifügen. Da wir die Richtung einer Kraft sowie die durch dieselbe hervorgebrachten Verschiebungen mit demselben algebraischen Zeichen belegen, so kann die von einer Kraft geleistete Arbeit nur als positive Größe erscheinen. Wenn aber die Gegenkraft stärker wird, so daß der Angriffspunkt der ursprünglich arbeitenden Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der letzteren verschoben wird, dann ist die Arbeit in bezug auf diese letztere eine negative Größe. Es ist dann die Gegenkraft jene, welche positive Arbeit leistet. Wenn wir z. B. die Feder in Fig. 230 mit unserer Muskelkraft ausziehen, so leistet unser Muskel positive Arbeit in bezug auf die Feder. Wenn aber unser Muskel nachläßt und unser Arm von der Feder zurückgezogen wird, so leistet jetzt die Feder positive Arbeit in bezug auf unseren Arm. Man sagt dann auch, die früher vom Muskel geleistete Arbeit werde wieder **verbraucht**, die Arbeit des Muskels sei nun eine negative. Da nie eine Kraft ohne Gegenkraft auftritt, so ist stets Arbeitsleistung mit Arbeitsverbrauch, positive Arbeit mit negativer verknüpft; es ist also stets nur die Übertragung einer Arbeitsgröße von einem System zum anderen, die

aber eine Erzeugung allein, welche stattfinden kann. Wir kommen hierauf später zurück. Vorderhand wollen wir festhalten, daß wir die Arbeit einer Kraft positiv bezeichnen, wenn die Bewegung im Sinne dieser Kraft stattfindet.

§ 74. Lebendige Kraft (Wucht). Im vorigen Paragraphen haben wir Beispiele von Arbeitsleistungen in Betracht gezogen, deren Resultat darin bestand, daß die Massen des Körpersystems, auf welche die arbeitende Kraft einwirkte, in eine andere relative Lage zueinander gebracht wurden.

Wird z. B. durch eine Kraft eine Masse vertikal gehoben, so wird dadurch der gegenseitige Abstand dieser Masse und der Erde vergrößert; bei Spannung einer elastischen Feder werden die Teile derselben in eine neue erzwungene Lage gebracht; bei Kompression der Luft werden die Luftteile einander genähert.

Nicht immer ist das Resultat einer Kraftwirkung ein derartiges. Häufig besteht dasselbe darin, daß einer Masse eine Geschwindigkeit erteilt wird, ohne daß dabei eine andere Kraft oder ein anderer Widerstand überwunden wird als jener, den jede Masse vermöge ihrer Trägheit einer Änderung ihres Geschwindigkeitszustandes entgegensetzt. Denken wir uns z. B., die Masse m werde auf einer ganz glatten horizontalen Unterlage, auf welcher sie ohne Reibung beweglich ist, durch eine horizontale konstante Kraft p in Bewegung gesetzt. Die Masse m erhält dadurch eine Beschleunigung $\varphi = \frac{p}{m}$ und, nachdem sie einen Weg s zurückgelegt hat, eine Geschwindigkeit, welche aus der Gleichung

$$\varphi s = \frac{v^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

berechnet werden kann; man findet dieselbe:

$$v = \sqrt{2 \varphi s}.$$

Während also die von der konstanten Kraft p geleistete Arbeit mit jeder gleichen Zunahme des Weges s um einen gleichen Betrag zunimmt, wächst die Geschwindigkeit nicht in demselben Verhältnisse; es ist vielmehr das Quadrat der Geschwindigkeit, welches proportional mit der geleisteten Arbeit wächst.

Will man also aus der Größe der Masse m und der Geschwindigkeit v einen Ausdruck bilden, welcher die Wirkung der von der Kraft geleisteten Arbeit in richtiger Weise berechnen läßt, so muß dieser Ausdruck die Geschwindigkeit in der zweiten Potenz enthalten.

Multipliziert man die Gleichung (1) beiderseits mit m, so kommt

$$m \varphi s = \frac{m v^2}{2}$$

oder, da $m \varphi = p$ ist:

$$p s = \frac{m v^2}{2}.$$

Letztere Größe wird nun, wie oben mitgeteilt wurde, mit dem nicht glücklich gewählten Namen: „Lebendige Kraft“ bezeichnet. Diese Gleichung sagt daher aus, daß die aufgewendete Arbeit numerisch gleich sei der entstandenen lebendigen Kraft.

Was ist also lebendige Kraft?

Lebendige Kraft ist ein Begriff, durch welchen der Bewegungszustand einer Masse derartig definiert wird, daß er der Größe nach übereinstimmt mit der Arbeit, welche eine Kraft leisten mußte, um diese Masse in diesen Bewegungszustand zu versetzen.

Wir wollen als Beispiel der Anwendung dieses Satzes von der Gleichheit der lebendigen Kraft und der Arbeit die Bewegung einer Flintenkugel in Rechnung ziehen.

Eine Flintenkugel von 20 g Masse werde aus einem Flintenlaufe von 60 cm Länge durch eine Pulverladung herausgeschossen, welche vom Moment der Entzündung bis zum Moment, wo die Kugel den Lauf verläßt, auf die letztere einen mittleren Druck gleich dem Gewichte von 153 kg ausübe. Mit welcher Geschwindigkeit wird die Kugel den Lauf verlassen, wenn die Reibung im Laufe vernachlässigt wird?

Wir verwandeln zuerst den Druck von 153 kg = 153000 g in absolute Krafteinheiten, indem wir letztere Zahl mit 980 multiplizieren. Wir erhalten $p = 153000 \times 980 = 149940000$ Dynen. Diese multipliziert mit dem Wege $s = 60$ cm geben eine Arbeitsleistung der Pulvergase $= 60 \times 149940000 = 8996400000$ Erg.

Diese Arbeit muß nun gleich sein der lebendigen Kraft $\frac{m v^2}{2}$, worin $m = 20$. Man hat daher:

$$v^2 = \frac{2 \times 8996400000}{20} = 899640000$$

$$v = 29993 \text{ cm} = 299{,}94 \text{ m}.$$

So wie die Arbeit einer Kraft verwendet werden kann, um in einer Masse lebendige Kraft aufzuspeichern, so kann auch umgekehrt eine mit lebendiger Kraft versehene Masse wiederum eine Arbeit leisten, wobei ebensoviel von der vorhandenen lebendigen Kraft verschwindet, als Arbeit geleistet wird.

So könnte beispielsweise die oben betrachtete Flintenkugel mit rund 300 m Geschwindigkeit verschiedenartige Arbeit leisten, indem sie verschiedenartige Kräfte überwindet. Als einfachsten Fall fassen wir den folgenden ins Auge. Wir denken uns die Flinte senkrecht gestellt, so daß die Kugel vertikal in die Höhe steigen muß. Sie leistet dabei die Arbeit der Überwindung der Anziehungskraft der Erde längs der ganzen Steighöhe. Die letztere beträgt, wie bekannt (§ 49), $\frac{v^2}{2g}$, wenn v die Anfangsgeschwindigkeit ist, also in unserem Falle $\frac{899640000}{2 \times 980}$ cm. Die Anziehungskraft ist die von 20 g, also gleich 20×980 Dynen. Das Produkt beider gibt die Arbeit, nämlich $\frac{899640000 \times 20 \times 980}{2 \times 980} = 8996400000$ Ergs, wie wir früher hatten. Sobald also die Kugel den höchsten Punkt erreicht hat, ist ihre lebendige Kraft wiederum = 0 geworden und die gleich große Arbeit wieder von ihr geleistet, welche früher für sie zur Erzeugung ihrer lebendigen Kraft von den Pulvergasen geleistet worden war.

Allein sofort beginnt eine neue Umwandlung. Die Kugel und die Erde bilden zusammen ein Körpersystem, welches fähig ist, Arbeit zu leisten, sobald

beide auf einen Abstand voneinander entfernt worden sind, so daß sie der gegenseitigen Anziehung Folge leisten können. Diese Arbeitsfähigkeit wurde eben durch die Arbeit gewonnen, welche aus der lebendigen Kraft entstand. Indem also jetzt die Kugel durch die Schwerkraft nach abwärts in Bewegung gesetzt wird, sammelt sich in ihr wiederum lebendige Kraft an. Sehen wir vom Luftwiderstande ab, so erlangt bekanntlich der fallende Körper bis zu seiner Ankunft am Ausgangspunkte die gleiche Geschwindigkeit, also auch die gleiche lebendige Kraft wieder, die er hatte, als er emporzusteigen begann. Dafür hat das Körpersystem, Erde — Kugel, die Fähigkeit verloren, Arbeit zu leisten.

Die Verfolgung dieses Gegenstandes vorbehaltend, wollen wir noch bezüglich des algebraischen Zeichens der lebendigen Kraft einiges bemerken.

Da das Quadrat einer Größe immer positiv ausfällt, so muß auch das Quadrat der Geschwindigkeit immer positiv sein, wenn auch die Richtung der Bewegung sich umkehrt; da ferner die Masse immer nur positiv sein kann, so muß eine aufgenommene lebendige Kraft $\frac{m v^2}{2}$ stets eine positive Größe sein, ebenso wie die geleistete Arbeit, aus der sie hervorgegangen und der sie numerisch gleich sein muß.

Sobald ein Körper auf Kosten seiner lebendigen Kraft selbst Arbeit leistet, d. h. eine Arbeitsgröße auf ein anderes System überträgt, kann man allerdings, dem Sprachgebrauch der Algebra gemäß, sagen, er habe negative lebendige Kraft aufgenommen, was aber nichts anderes bedeutet, als daß er positive lebendige Kraft abgegeben habe.

Ferner machen wir darauf aufmerksam, daß bezüglich der lebendigen Kraft wie bezüglich der Bewegungsquantität nie davon die Rede sein kann, ihren absoluten Wert zu bestimmen.

Die Kugel z. B., von der eben die Rede war, besitzt ja schon, bevor der Schuß losgeht, eine Geschwindigkeit infolge Achsendrehung der Erde und Bewegung um die Sonne. Die davon stammende lebendige Kraft lassen wir aber für gewöhnlich unbeachtet. In Wahrheit können wir also immer nur von einer Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kraft, nie aber von ihrem absoluten Werte sprechen.

Steigt die Geschwindigkeit einer Masse m von v auf v_1, so ist der Zuwachs an lebendiger Kraft $= \frac{m}{2}(v_1^2 - v^2)$.

Sowie ein Körper A gleichzeitig in bezug auf einen Körper B in Ruhe und gleichzeitig in bezug auf einen anderen Körper C in Bewegung sein kann, so kann ein Körper A auch in bezug auf einen Körper B ohne lebendige Kraft sein und gleichzeitig in bezug auf einen Körper C eine solche besitzen.

Stellen wir uns eine größere Eisscholle vor, welche mit der Geschwindigkeit von 10 m pro Sekunde einen Fluß hinabgetrieben wird. Auf der Scholle liege eine Kugel. Dann haben sowohl Scholle als Kugel lebendige Kraft in bezug auf die Erdoberfläche.

Wenn nun aber ein Mann auf der Scholle die Kugel antreibt, so daß sie mit 10 m Geschwindigkeit flußaufwärts rollt, so hat dieselbe keine lebendige Kraft mehr in bezug auf die Erdoberfläche, wohl aber solche in bezug auf die Scholle. Da man überhaupt von zwei Körpern A und B, die sich relativ nähern oder entfernen, nie behaupten kann, der eine stehe still und der

andere bewege sich, so kann man auch nie behaupten, der eine sei ohne lebendige Kraft, der andere besitze sie. Sie besitzen sie eben beide zusammen. Dies hindert uns aber nicht, für gewöhnlich die lebendige Kraft in demjenigen Körper vorhanden zu betrachten, den wir konventionell als den bewegten ansehen.

§ 75. Begriff der Energie. Die in den vorangegangenen Paragraphen besprochenen Beispiele von Arbeitsleistungen lassen uns erkennen, daß die dazu nötige Kraft stets aus einem Körper oder Körpersystem stammt, welches entweder durch die Lage und Verteilung seiner Massen oder durch die in ihm aufgespeicherte lebendige Kraft die Fähigkeit besitzt, Arbeit zu leisten.

Die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, wird Energie genannt[1].

Energie besitzt also eine gehobene Last, welche mit der Erde zusammen als Körpersystem anzusehen ist (aufgezogene Gewichtsuhr, Wassergefälle); Energie besitzt eine gespannte Feder (aufgezogene Taschenuhr, gespannte Armbrust); Energie besitzt ferner ein komprimiertes Gas, ein gespannter Dampf; ebenso ist Energie aufgespeichert in explosiven Stoffen (im Schießpulver, Dynamit, Knallgas).

Energie besitzt jede bewegte Masse (fließendes Wasser, Wind, abgeschossene Kugel, geschwungener Hammer, rotierendes Schwungrad); Energie muß ferner aufgespeichert sein in dem Muskelapparate der Menschen und der Tiere, da sie sonst nicht Kraft entwickeln und Arbeit leisten könnten.

Alle diese Energie besitzenden Körpersysteme, von denen hier nur wenige als Beispiele aufgezählt wurden, verlieren jedoch an Arbeitsfähigkeit, sobald sie Arbeit leisten. Ihr Energieinhalt vermindert sich um einen Betrag, den wir messen durch die Anzahl Arbeitseinheiten, welche geleistet wurden. So z. B. sinkt das Gewicht der Uhr, indem die Räder bewegt werden, die gespannte Feder erschlafft, indem sie den Pfeil fortschleudert, der Dampf verliert seine Spannung, indem er den Kolben treibt, die chemische Energie des Schießpulvers ist verbraucht, wenn es seine Wirkung getan hat, das Wasser verliert an Gefälle oder an Geschwindigkeit, indem es das Rad treibt, die abgeschossene Kugel ermattet, indem sie in einen Körper eindringt, das Schwungrad kommt zur Ruhe, indem es Arbeit leistet, wenn ihm nicht neue Energie zugeführt wird, ja selbst der Muskelapparat der Menschen und Tiere ermüdet und wird erschöpft, wenn ihm nicht durch die Nahrungsmittel und den eingeatmeten Sauerstoff die ausgegebene Energie ersetzt wird.

Gleichzeitig mit der Verminderung der Energie des einen Körpersystems wird folgerichtig die Arbeitsfähigkeit jenes anderen Körpersystems, auf welches die arbeitende Kraft einwirkt, um denselben Betrag erhöht. Man kann demnach geradezu sagen: Arbeit leisten heißt Energie übertragen. Die

[1]) Aus dem griechischen Worte *ἐνέργεια* Tatkraft; der Ausdruck wurde von Rankine und Thomson eingeführt. Gegen diese Definition ist, nicht mit Unrecht, der Einwand erhoben worden, daß *nicht jeder Energie enthaltende Körper* wirklich Arbeit leisten (übertragen) kann. Ein schwerer Körper, der nicht weiter sinken kann, weil er bereits die tiefste Lage hat, die er unter den gegebenen Umständen annehmen kann, ebenso ein warmer Körper, der keine Wärme abgeben kann, weil alle umgebenden Körper keine tiefere Temperatur haben, kann nicht Arbeit leisten (übertragen). Es wäre daher die Definition etwa folgendermaßen zu ergänzen: „Energie ist die Fähigkeit, unter gewissen Umständen Arbeit zu leisten."

Energie kann also durch eine Reihe von aufeinander folgenden Arbeitsleistungen von einem materiellen System auf ein zweites, drittes usw. übergehen, wobei sie die mannigfaltigsten Formen annehmen kann. Sie kann dabei natürlich auch geteilt, sozusagen zersplittert, und die Teile können unter Umständen wieder gesammelt werden.

Fassen wir nochmals das im vorigen Paragraphen benutzte Beispiel der senkrecht abgeschossenen Kugel ins Auge. Das Schießpulver enthält Energie infolge der Lage seiner chemischen Bestandteile.

Durch die chemische Umsetzung derselben bei der Entzündung geht ein Teil seiner Energie auf die entwickelten Gase und von diesen auf die Kugel über; dieselbe enthält dann Energie in Form von lebendiger Kraft. Indem die Kugel steigt, gibt sie die Energie der lebendigen Kraft wieder ab, und es entsteht dafür Energie, welche dem Körpersystem Erde—Kugel infolge ihrer getrennten Lage innewohnt. Auch diese wird bei Aufhebung dieser Lage wieder in die Form lebendiger Kraft zurückverwandelt, um dann beim Auffallen der Kugel noch kompliziertere Formen anzunehmen.

Wir heben also nochmals hervor, daß zu einer Arbeitsleistung immer zwei materielle Systeme gehören, wovon eines Energie abgibt, die das andere aufnimmt. Man sagt dann, von dem ersten System werde Arbeit geleistet an dem zweiten oder für das zweite.

Damit also die Quantität der Energie eines Systems sich ändere, ist stets notwendig, daß dasselbe nach außen arbeitend wirke oder von außen eine Einwirkung erfahre.

Vorgänge im Inneren eines Systems ohne äußere Einwirkung können den Energieinhalt desselben nicht ändern. Es ist dies ebenso unmöglich, wie es unmöglich ist, sich selbst dadurch aus dem Wasser zu ziehen, daß man mit den Händen am eigenen Körper emporzieht. Man muß nach einem Außengegenstande greifen und auf diesen Zugkraft ausüben, um den eigenen Körper zu heben. Ebenso kann man, auf einem Schlitten sitzend, auf horizontaler Eisfläche sich [1]) nicht von selbst fortbewegen, sondern man muß entweder von einem Außenstehenden gezogen werden oder sich gegen das Eis stemmen. Die Hebung des menschlichen Körpers im ersten Falle, die Erlangung einer Geschwindigkeit für Mensch und Schlitten im zweiten Falle wären mit einer Zunahme des Energieinhaltes verknüpft.

Die Unmöglichkeit der Änderung des Energieinhaltes eines Systems durch innere Kräfte geht schon aus der folgenden Überlegung hervor. Wenn ein System auf ein anderes arbeitend einwirkt, so gibt es an das andere Energie ab. Das erste verliert, das zweite gewinnt ebensoviel Energie. Denkt man sich nun aber beide Systeme zusammen als eines, so ändert sich sein Energieinhalt nicht, wenn auch die Verteilung derselben sich ändert.

Es ist dies ein Grundsatz, welcher gewöhnlich als das „Prinzip der Erhaltung der Energie“ [2]) bezeichnet wird, und welchem wegen seiner außer-

---

[1]) Genauer gesagt: den gemeinsamen Schwerpunkt von Körper und Schlitten.

[2]) Dieses Prinzip ist für beschränkte Gebiete von Naturerscheinungen schon von Newton und D. Bernouilli ausgesprochen worden. Die Möglichkeit seiner allgemeinen Gültigkeit hat zuerst der deutsche Arzt Jul. Rob. Mayer in Heilbronn 1842 in einer Abhandlung in Liebigs Annal. **42** dargelegt; eine epochemachende Darstellung wurde von H. Helmholtz in seiner Schrift: „Über die Erhaltung der Kraft“, Berlin 1847, geliefert.

ordentlich ausgedehnten Tragweite wohl kaum ein anderes physikalis Prinzip an Wichtigkeit gleichkommen dürfte.

Dasselbe läßt sich folgendermaßen formulieren:

„Die Gesamtenergie jedes materiellen Systems ist eine Gr welche durch Wirkungen zwischen* den Teilen des Systems w vermehrt noch vermindert, wohl aber in andere Formen um wandelt werden kann."

Daraus folgt, daß, wenn man alle im Universum vorhandenen materi Systeme in eines zusammengefaßt denkt, wobei also von einer äußeren wirkung nicht mehr die Rede sein kann, weil alle Kraftursachen bereits Inneren des Systems angehören, die Gesamtenergie eine konstante G bleiben muß. Diese Folgerung ist auch in der Tat von R. Clausius den Worten „die Energie des Weltalls ist konstant" ausgesprochen wo So überaus wahrscheinlich dieser Satz ist, falls man das Weltall als begr ansehen darf, so wollen wir doch nicht vergessen, daß das Prinzip der E tung der Energie nur ein Erfahrungssatz ist und daher zunächst nur i halb des Rahmens als bewiesen zu betrachten ist, in welchem wir u Erfahrungen sammeln konnten.

Bei einer Musterung der Energievorräte, die wir in Körpersyst finden, erkennen wir bald, daß die Energie in zwei Hauptformen kommt, auf welche wir schon im Eingange dieses Paragraphen hinged haben.

Die Arbeitsfähigkeit eines Systems folgt entweder aus der Lage s Teile, wie z. B. bei der gespannten Feder, dem komprimierten Gase, gehobenen Last, dem Schießpulver; oder sie folgt aus der Bewegung der lebendigen Kraft, wie z. B. bei der geschossenen Kugel, dem treibe Wasser oder Winde usw. Man unterscheidet demnach zwischen Ene der Lage und Energie der Bewegung. Mit Rücksicht auf die gesp Lage der ersteren Körpersysteme gebraucht man hierfür auch die Ausdr Spannkraft einerseits und lebendige Kraft andererseits.

Es ist aber zweckmäßiger, das Wort Kraft zu vermeiden; um me empfehlen sich die Ausdrücke potentielle Energie und kinetische Ene welche sich schon allgemein eingebürgert haben.

Unter potentieller Energie eines Körpersystems versteht man die Arbeitsfähigkeit, welche dasselbe infolge der Lage oder der Beschaffe seiner Teile besitzt.

Unter kinetischer Energie eines Körpersystems versteht man Arbeitsfähigkeit, welche demselben infolge der lebendigen Kraft, also in seiner Geschwindigkeit im ganzen und in seinen Teilen zukommt.

Während es verhältnismäßig leicht ist, die Zunahme oder Abnahm kinetischen Energie eines Körpersystems aus den Massen und deren schwindigkeitsänderungen zu berechnen, ist dies bei der potentiellen En bisher nicht immer möglich; doch kann sie dann meist durch Experiment mittelt werden. Der absolute Wert des Energieinhaltes eines Körpersys ist nie angebbar, auch sind wir nie imstande, einem Körper allen Ene inhalt zu entziehen.

Als Maßeinheit für die Energie kann die Arbeitseinheit, also Erg (oder das Joule) angewendet werden; ein anderes Maß werden w der Wärmelehre kennen lernen.

einer solchen Ursache nennen wir eine *Hypothese* und die Auffassung der Fallerscheinungen als Folge derselben eine *Erklärung* oder *Theorie des Falles*.

Mit der Aufstellung einer solchen Theorie, welche die beobachteten Erscheinungen nunmehr als *notwendige Folge* der Ursache darstellt, wird aus der ursprünglichen empirischen Gleichung, aus der erfahrungsgemäßen Regel jetzt ein begründetes *Gesetz*. Die Konstanten der empirischen Gleichung, welche bisher nichts anderes waren als aus der Erfahrung abgeleitete Zahlenwerte, treten nunmehr als *Größen mit physikalischer Bedeutung* auf. So z. B. erkennen wir in der obigen Konstante a die *Anfangsgeschwindigkeit*, in der Größe b die *halbe Beschleunigung*, welche wir dann später als das Maß der wirksamen Ursache, der Kraft, erklären.

Die physikalische Methode schlägt von da an einen umgekehrten Weg ein. Aus der gewonnenen Theorie werden Folgerungen gezogen und Beobachtungsresultate vorausberechnet. An die Stelle des *Induktionsschlusses* tritt der *Deduktionsschluß*; statt von den Resultaten der Einzelbeobachtungen auf das allgemeine Gesetz wird jetzt umgekehrt aus diesem auf jene geschlossen. Statt empirischer Entdeckungen auf dem Wege der Beobachtungen werden jetzt *theoretische Entdeckungen* auf dem Wege der *Rechnung* gemacht, welche zu Erweiterungen unserer Kenntnis führen. Indem wir z. B. der Anfangsgeschwindigkeit a einen positiven oder negativen Wert oder den Wert Null geben, erhalten wir die Gesetze für den senkrechten *Wurf* nach abwärts und nach aufwärts und erkennen in dem freien Fall nur einen Spezialfall des senkrechten Wurfes.

Diese theoretischen Entdeckungen veranlassen uns dann zu neuen Versuchen, die wir anstellen, um alle Folgerungen unserer Theorie zu prüfen und die letztere dadurch immer mehr zu befestigen. Mit dem Nachweise, daß wirklich keine dieser Folgerungen mit den beobachteten Tatsachen im Widerspruche steht, hat die physikalische Forschung der untersuchten Erscheinungsgruppe ihren vorläufigen Abschluß gefunden.

Wir sagen: ihren *vorläufigen* Abschluß, denn wir müssen im allgemeinen stets darauf gefaßt sein, daß wir später genötigt sein werden, die Theorie und das Gesetz zu ergänzen, zu modifizieren oder auch gänzlich zu verwerfen und zu erneuern.

Die häufigste Veranlassung hierzu gibt der Umstand, daß feinere und genauere Messungsmethoden uns für die Beobachtungen Werte ergeben, die von den aus der bisherigen Theorie berechneten um Mehr abweichen, als die wahrscheinlichen oder zulässigen Beobachtungsfehler betragen. So würde z. B. eine genauere Messung der Fallräume ergeben, daß dieselben nicht ganz unabhängig seien von der Beschaffenheit des fallenden Körpers, von der absoluten Höhe und von dem Orte, an welchem das Experiment angestellt wird. Durch weitere Untersuchungen werden wir darauf geführt, diese Abweichungen durch den Widerstand der Luft und die Änderung der Schwer-

§ 76. Die Maschinen. Begriff und Zweck der Maschinen. Wenn wir zu irgend einem speziellen Zwecke eine Arbeit aufwenden wollen, so genügt es nicht, daß uns von einer Energiequelle, z. B. einem Wasser- oder Dampfmotor oder durch Muskelkraft, das dazu nötige Quantum der Energie zur Verfügung gestellt werde, sondern es muß auch dafür gesorgt werden, daß diese Energie in einer dem Zwecke der Arbeit angemessenen Form zur Verwendung komme. Es ist dazu oft nötig, die verfügbare Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit oder umgekehrt zu vergrößern, ihre Angriffspunkte, ihre Richtung oder überhaupt die Bahn der Bewegung abzuändern. Wir bewerkstelligen dies mittels besonderer Apparate, welche Maschinen genannt werden.

Es ist schon oft versucht worden, eine einwurfsfreie Definition der Maschine zu formulieren[1]); vom physikalischen Standpunkte aus möchten wir etwa folgende Fassung in Vorschlag bringen:

Maschine im weitesten Sinne ist eine Vorrichtung, welche dazu dient, ein gegebenes Energiequantum zu übertragen und dasselbe hierbei in bezug auf Richtung und Bahn, Form und Zusammensetzung derart abzuändern, wie es der zu leistenden Arbeit entspricht.

Diese Definition betrifft die Maschine im weitesten Sinne; sie paßt daher beispielsweise auch auf Dampfmaschine, Eismaschine, Elektrisiermaschine, dynamo-elektrische Maschine, sowie auf die mechanischen Maschinen.

Wir beschränken uns hier auf eine engere Gruppe von Maschinen, bei welchen die übertragene Energie eine mechanische Arbeitsgröße ist, schließen also jene aus, bei welchen die Energie in einer der wesentlich abweichenden Formen, wie Wärme, Elektrizität, Affinität usw., übertragen wird.

Für diese engere Gruppe von Maschinen scheint uns die von Laboulaye gegebene Definition am besten zu entsprechen: Maschine heißt jedes Körpersystem, welches dazu bestimmt ist, die Arbeit der Kräfte zu übertragen und infolgedessen sowohl die Kräfte selbst in bezug auf ihre Intensität abzuändern, als die hervorgerufene Bewegung hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit und Richtung mit Rücksicht auf das zu erreichende Ziel umzugestalten.

Wir wollen ferner zunächst nur solche Maschinen ins Auge fassen, bei welchen nur an einem Angriffspunkte Energie aufgenommen und an einem Angriffspunkte wiederum abgegeben, dieselbe also nicht geteilt oder zersplittert wird. Insofern dies in Wirklichkeit nie ganz der Fall ist, da bei allen wirklich ausgeführten Maschinen stets Teile der aufgenommenen Energie durch Reibung oder andere Umstände zersplittert werden, müssen wir die hier betrachteten Maschinen als ideale auffassen. Wir werden dies auch insofern tun, als wir die bei den Maschinen vorkommenden starren Körper als vollkommen starr, hingegen die biegsamen Körper (Seile, Schnüre, Riemen) als vollkommen biegsam ansehen werden, was in Wirklichkeit auch nie der Fall sein kann. Unsere Resultate werden dadurch nicht unbrauchbar, da wir

---

[1]) Reuleaux hat in seiner Maschinenlehre eine große Zahl solcher Definitionen gesammelt und schließlich die folgende beibehalten: Eine Maschine ist eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, daß mittels ihrer mechanische Naturkräfte genötigt werden können, unter bestimmten Bewegungen zu wirken.

dann leicht von den vollkommenen Maschinen auf die wirklichen schließen können.

Einteilung der Maschinen. Die Maschinen, welche zur Übertragung mechanischer Energie dienen, haben nicht alle die gleiche Aufgabe zu leisten. Ihre einfachste Aufgabe besteht wohl darin, die Richtung der arbeitenden Kraft abzuändern, ohne daß an der Zusammensetzung des Produktes Kraft × Weg etwas geändert wird. Apparate, die dies leisten, könnten wir als Richtung ändernde Maschinen in eine erste Gruppe zusammenfassen.

In eine zweite Gruppe würden dann alle jene Maschinen einzureihen sein, welche bei der Übertragung der Energie die Zusammensetzung des Produktes Kraft × Weg in der Weise verändern, daß entweder die Kraft auf Kosten des Weges oder der Weg auf Kosten der Kraft vergrößert wird, wobei jedoch das Übersetzungsverhältnis während des Fortganges der Übertragung ein konstantes bleibt.

Unter Übersetzungsverhältnis versteht man das Verhältnis zwischen der Größe der Kraft nach der Übertragung zu jener vor der Übertragung. Die zweite Gruppe hätte also zu umfassen die Maschinen mit konstantem Übersetzungsverhältnis.

Eine dritte Gruppe von Maschinen ändert ebenfalls die Kraft auf Kosten des Weges, jedoch in der Weise, daß während des Fortganges der Übertragung das Übersetzungsverhältnis sich verändert. Eine solche Maschine ist daher imstande, eine konstante Kraft in eine veränderliche oder umgekehrt zu verwandeln, wobei natürlich die Wege, also auch die Geschwindigkeiten entsprechend verändert werden. Das wären also Maschinen mit veränderlicher Übersetzung.

Nach ihrer äußeren Form lassen sich die wichtigeren einfachen Maschinen nach drei hervorragenden Typen gruppieren. Diese Typen sind:

I. Die Seilmaschine (Rolle, Wellrad usw.).

II. Die Hebelmaschine.

III. Die Gleitmaschine (schiefe Ebene, Keil, Schraube usw.).

Es wird sich zeigen, daß nach jedem dieser Typen Maschinen konstruiert werden können, welche die oben in drei Stufen unterschiedenen Aufgaben zu leisten vermögen, nämlich entweder erstens nur die Richtung einer Kraft zu ändern, oder zweitens Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit (oder umgekehrt) im konstanten Verhältnis abzuändern, oder drittens zu bewirken, daß während der Arbeitsübertragung die Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit (oder umgekehrt) in beliebig veränderlicher Weise abgeändert werde.

Jener Punkt an der Maschine, an welchem die arbeitende Kraft angreift, soll kurz der „Angriffspunkt der Kraft" genannt werden; hingegen jener Punkt, wo die zu überwindende Kraft angreift, soll als „Angriffspunkt der Last" bezeichnet werden. Diese Bezeichnung, welche darauf beruht, daß man sich die überwundene Kraft als Anziehungskraft der Erde auf eine Masse vorstellt, darf jedoch nicht einseitig ausgelegt werden. Es versteht sich vielmehr, daß auch irgend eine andere Kraft überwunden werden kann, und daß überhaupt, soweit nicht die Reibung hinderlich ist, die beiden Angriffspunkte ihre Rolle vertauschen können.

§ 77. Die Seilmaschine als Rolle. Die Seilmaschine hat das Eigentümliche, daß bei ihr außer starren Körpern auch ein biegsamer in Anwendung kommt: das Seil (Schnur, Riemen).

Die einfachste Seilmaschine ist die Rolle.

Die Rolle ist eine runde, am Rande mit einer ringförmigen Rinne versehene Scheibe, welche um eine durch ihren Mittelpunkt gehende, auf ihrer Ebene rechtwinkelig stehende Achse drehbar ist; diese Achse wird gewöhnlich durch eine Schere getragen, deren Arme zu beiden Seiten der Rolle bis etwas über ihre Mitte reichen, wie man dies Fig. 232 sieht.

Man unterscheidet feste und bewegliche Rollen. Feste Rollen sind solche, deren Achse unbeweglich ist, wie die Achse der Rolle *A*, Fig. 232, so daß keine Verrückung derselben, sondern nur eine Drehung um dieselbe möglich ist, während bei den beweglichen Rollen, wie bei *B*, Fig. 232, auch eine Ortsveränderung der Achse möglich ist.

Wenn um einen Teil des Umfanges einer festen Rolle eine Schnur oder ein Seil gelegt ist und an beiden Enden desselben Kräfte wirken, so findet

Fig. 232.

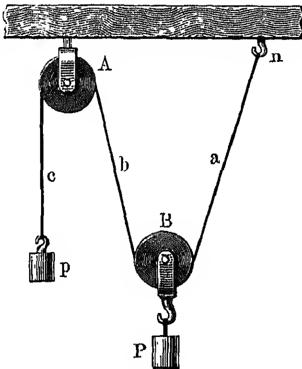
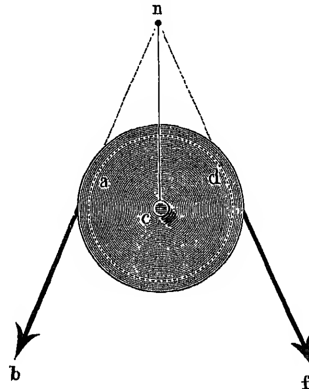


Fig. 233.



nur dann Gleichgewicht statt, wenn die Kraft, welche das Seil auf der einen Seite spannt, der auf der anderen Seite wirkenden Kraft gleich ist. Es läßt sich dies leicht von vornherein einsehen, wenn man bedenkt, daß die beiden Kräfte unter sonst ganz gleichen Umständen die Rolle nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben. Übrigens läßt sich das Gleichgewicht der Kräfte an der Rolle auch vom Parallelogramm der Kräfte ableiten, und von diesem Gesichtspunkte aus wollen wir die Rolle hier näher betrachten. Fig. 233 stellt eine um ihren festen Mittelpunkt c drehbare Rolle dar; das um dieselbe geschlungene Seil sei durch Kräfte gespannt, welche nach den Richtungen ab und df wirken. Denken wir uns die Linien df und ab bis zu ihrem Durchschnittspunkte n verlängert, so ist klar, daß, wenn n ein mit der Rolle fest verbundener Punkt wäre, man, ohne in der Wirkung etwas zu ändern, die Angriffspunkte der beiden Kräfte von a und d nach n verlegen könnte, und so hätte man dann zwei in einem Punkte n angreifende Kräfte, die nur dann im Gleichgewichte sein können, wenn ihrer Resultierenden das Gleichgewicht gehalten wird. Wenn die beiden in n angreifenden, nach den Richtungen nb und nf wirkenden Kräfte gleich sind, so wird ihre Resultierende den Winkel bnf halbieren, die Richtung dieser Resultierenden geht

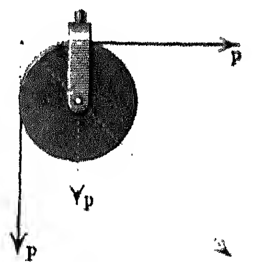
alsdann durch den festen Mittelpunkt c, und mithin findet Gleichgewicht
Wäre eine der beiden Kräfte größer als die andere, so würde die Resultier
nicht mehr durch diesen festen Punkt gehen, es könnte also auch kein Gl
gewicht mehr stattfinden.

Der Druck, den die Achse der Rolle auszuhalten hat, ist offenbar
Resultierenden der beiden Kräfte gleich, und wenn die Richtungen der be
Kräfte parallel sind, so ist der Druck auf die Achse gleich der Summe
beiden Kräfte (wozu unter Umständen noch das Gewicht der Rolle selbst
rechnen ist).

In dem Falle, der in Fig. 234 dargestellt ist, wo zwei gleiche K
von der Größe p, die eine an dem vertikalen, die andere an dem horizont
Schnurende wirken, ist der Druck auf die Achse unter 45° gerichtet und
Größe nach $= \frac{p}{\sin 45}$. Sucht man nun den Wert der vertikalen Kompon
dieses Druckes, so erhält man dafur $\frac{p \cdot \cos 45}{\sin 45} = p$. Die Kraft, mit wel
demnach unter diesen Umständen die Achse der Rolle vertikal nach abw
gedrückt wird, ist gleich groß wie die Kraft, welche am Schnurende z
Dies dient zur Ergänzung der Erklärung des Poggendorffschen V
im § 71.

Fig. 235 stellt den allgemeinen Fall vor. Die beiden gleichen Kr
CA und CB bilden mit der Horizontalen HH' die Winkel α und β
schließen selbst den Winkel γ ein. Die durch die Rollenachse gehende Re

Fig. 234.





tierende ist CR. Zieht man die Senkrechten auf die Kraftrichtungen
und OS', so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CAR und SOS'

$$CR : CA = SS' : SO$$

Bezeichnen wir die Kraft $CA = CB$ mit P, die Resultierende CR m
die Sehne SS' mit c, den Rollenhalbmesser OS mit r, so folgt

$$R : P = c : r \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$R = P\frac{c}{r} = 2P\cos\frac{\gamma}{2} = 2P\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \ldots \ldots$$

Die Beziehung (1) lautet in Worten: **Der Druck auf die Rollenac
verhält sich zur Spannung des Seiles wie die Sehne des vom
umspannten Bogens zum Radius der Rolle.**

Will man noch die Vertikalkomponente dieses Druckes suchen, so ergibt eine einfache Rechnung für dieselbe den Wert:

$$2 \,.\, P \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Solange die Kräfte an der Rolle im Gleichgewichte sind, leisten sie keine Arbeit. Eine Übertragung von Energie findet erst dann statt, wenn die eine Kraft (die Last) von der anderen „überwunden“ wird. Man pflegt zu sagen, daß dies dann eintrete, wenn diese andere Kraft um ein unendlich Kleines größer sei als die Last. Es ist dies aber keine ganz glückliche Ausdrucksweise, denn sie kann leicht mißverstanden werden und ist dann im Widerspruch mit dem Prinzip der Wechselwirkung (§ 44), welches Gleichheit der Kraft und Gegenkraft fordert. Auch würde daraus folgen, daß bei der Übertragung der Energie durch eine Maschine ein, wenn auch beliebig kleiner Teil der Energie vernichtet werde. Um in diesem Punkte volle Klarheit zu gewinnen, denken wir uns (Fig. 236) eine fixe Rolle ohne alle Reibung und ohne eigene Masse, deren Schnur beiderseits mit den gleichen Massen M und M' belastet ist. Die beiden Massen seien im vertikalen Abstande s befindlich, und es herrscht zunächst Gleichgewicht und Ruhe. Die höhere Masse M auf der rechten Seite hat einen Überschuß an potentieller Energie im Betrage $= Mg \,.\, s$. Sinkt dieselbe um die Höhe s, so wird dieser Überschuß auf die andere Masse M' links übertragen. Die sinkende Masse arbeitet für die steigende. Damit aber dies geschehe, müssen wir den Massen entweder eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung erteilen.

Fig. 236.



Um den ersten Weg einzuschlagen, geben wir der höheren Masse einen Stoß nach abwärts, d. h. wir lassen kurze Zeit eine Kraft einwirken, welche beiden Massen eine gewisse Endgeschwindigkeit v erteilt. Dazu ist ein Energiezuschuß $= \frac{2\, Mv^2}{2} = Mv^2$ erforderlich, den wir etwa durch eine losschnellende Feder erteilen könnten.

Sobald nun die Massen den Weg s zurückgelegt haben und die potentielle Energie Mgs von rechts nach links übertragen ist, haben beide Massen noch den Zuschuß kinetischer Energie in sich, den sie wieder abgeben könnten, indem sie selbst die Feder wieder spannen, durch deren Losschnellen ihre Geschwindigkeit erzeugt war. Wir haben dann nichts von der übertragenen potentiellen Energie verloren; aber wir mußten Energie zu leihen nehmen, um die Übertragung zustande zu bringen. Der Betrag derselben kann verschwindend klein sein, immer angenommen, daß wir keine Reibung im Spiele haben.

Denselben Erfolg der Übertragung der potentiellen Energie können wir aber auch durch eine Beschleunigung erreichen, d. h. durch eine konstante Kraft, die wir durch ein Übergewichtchen von der Masse m hervorbringen, das wir der Masse M beilegen. Hat die Übertragung stattgefunden, dann besitzen beide Massen noch den geliehenen Betrag mgs an potentieller

Energie, umgewandelt in kinetische Energie [illegible] $\frac{(M + m)v^2}{2}$, wovon der Bruchteil $\frac{Mv^2}{2}$ in der [illegible] $\frac{(M + m)v^2}{2}$ in der gesunkenen Masse aufgespeichert ist.

Diese Bruchteile können, wenn keine Reibung [illegible] beliebig klein sein, aber ohne ihre Zuhilfenahme [illegible] nicht.

Nach diesen Auseinandersetzungen, [illegible] Veränderung auf alle Maschinen übertragbar sind, [illegible] mißverstanden werden, wenn wir sagen:

Die fixe Rolle ist eine Maschine, welche [illegible] arbeitenden Kraft ändert, aber sonst an dem Produkte Kraft [illegible] Weg [illegible] Veränderung vornimmt.

Die geänderte Richtung liegt [illegible] Ebene; soll dies nicht mehr der Fall sein, [illegible] Rollen miteinander kombiniert werden.

Die bewegliche Rolle, deren [illegible] mit einer fixen) aus Fig. 232 (S. 247) zu ersehen [illegible] durch Umkehrung der Anordnung der fixen Rolle [illegible] Bezüglich des Verhältnisses zwischen der Kraft, [illegible] der Rolle angezogen wird, gelten genau dieselben [illegible] unter (1) und (2) mitgeteilt wurden.

Die Richtung dieser Resultierenden ist [illegible] frei hängenden beweglichen Rolle immer vertikal.

Bringt man also an der Schere einer beweglichen Rolle vom Radius r eine Kraft $= R$ an, und haben die Schnüre [illegible], daß sie die Rolle auf einem Bogen umspannen, dessen [illegible] die Schnurrichtungen den Winkel γ einschließen, so wird [illegible] Schnüre mit einer Kraft P gespannt, welche gegeben ist [illegible]

$$P = \frac{1}{2} R \; \frac{R}{[illegible]}$$

Sind die Schnüre parallel, also die [illegible] Durchmesser oder der Winkel $\gamma = 0$, so folgt

$$P = \frac{1}{2} R.$$

Jede der Schnüre wird also mit der halben Kraft gespannt. Befestigt man das eine Schnurende und hebt das andere um eine Strecke s in die Höhe, so überträgt man auf dieses Ende eine Arbeit [illegible] gleich große Arbeit wird von der Maschine an der Schere der beweglichen Rolle geleistet, denn es wird die doppelt so große Kraft R längs eines Weges, der halb so groß ist als s, überwunden. Die bewegliche Rolle gehört also zu jenen **Maschinen, welche die übertragene Energie in ihrer Zusammensetzung abändern**, indem sie die Kraft auf Kosten des Weges vergrößert oder umgekehrt.

Solange man nur mit der beweglichen Rolle mit parallelen Schnüren zu tun hat, bleibt das Übersetzungsverhältnis konstant. Bei der beweglichen Rolle mit **divergierenden Schnüren** ändert sich fortwährend der ein-

dann eine Maschine mit veränderlicher Übersetzung. Dies wäre z. B. bei der Anordnung in Fig. 232 der Fall. Ziehen wir an dem über die fixe Rolle A gehenden Schnurende mit konstanter Kraft P nach abwärts, so wird dadurch die Achse der beweglichen Rolle B nicht mit konstanter Kraft nach aufwärts gehoben, sondern mit der veränderlichen Kraft $R = P \,.\, 2 \cos \frac{\gamma}{2}$. Je weiter die Bewegung fortschreitet, desto größer wird der Winkel zwischen den Schnüren a und b, desto kleiner sein Cosinus, desto kleiner also auch die an der Schere der beweglichen Rolle ausgeübte Kraft. Da gleichen Wegstrecken des Angriffspunktes am Schnurende auch gleiche Quantitäten übertragener Energie entsprechen, so müssen die gleichzeitigen Wegstrecken am Angriffspunkte der Last (an der Schere) im reziproken Verhältnis zur Kraft sich verändern. Gleichen Wegen am Schnurende entsprechen daher fortwährend zunehmende Erhebungen der beweglichen Rolle.

§ 78. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Die soeben abgeleiteten Verhältnisse an der beweglichen Rolle geben uns die erste Gelegenheit, ein Prinzip zu erörtern, das sich als sehr fruchtbar und bequem in der Anwendung erwiesen hat, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten[1]). An einer Maschine mit konstantem Übersetzungsverhältnis, wie z. B. der beweglichen Rolle mit parallelen Schnüren, verhalten sich beliebige gleichzeitige Wege der Angriffspunkte verkehrt wie die Kräfte, also auch die Geschwindigkeiten verkehrt wie die Kräfte. Bei einer Maschine mit veränderlichem Übersetzungsverhältnis, wie bei der beweglichen Rolle mit divergenten Schnüren, können wir von einem konstanten Verhältnis der Geschwindigkeiten nicht sprechen. Wohl aber entspricht jeder bestimmten Lage der Maschinenteile ein momentanes Verhältnis der Geschwindigkeiten, welches wir finden, wenn wir die gleichzeitigen Wege der Angriffspunkte immer kleiner werden lassen und die Grenze aufsuchen, dem sich ihr Verhältnis nähert. Man nennt dieses Grenzverhältnis dann das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten. Dasselbe muß dann ebenfalls verkehrt proportional sein dem Kräfteverhältnis, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Praktisch könnten wir also z. B. folgendermaßen verfahren. Es sei bei der beweglichen Rolle, Fig. 232, zu ermitteln, welche Gewichte sich bei der gegebenen Lage der Rolle das Gleichgewicht halten würden. Bewegen wir p um 1,9 mm nach abwärts, so steigt P nur um 1 mm, folglich ist das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten 1,9 : 1, folglich das der Kräfte (Gewichte) wie 1 : 1,9.

So könnten wir bei jeder Maschine verfahren; sie könnte mit einem Tuche verdeckt sein, so daß wir nur die beiden Angriffspunkte sehen, wir würden doch ihr Kraftverhältnis aus den virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte entnehmen können. Ja wir könnten an einer Reihe miteinander verkuppelter Maschinen an jedem ihrer beweglichen Bestandteile aus seiner reziproken Geschwindigkeit sofort die Größe der Kraft entnehmen, mit welcher dieser Bestandteil bewegt wird.

Die Produkte aus den virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte mit den in ihrer Richtung wirksamen Kräften heißt man auch die virtuellen

[1]) Die ersten Andeutungen dieses Prinzips hat Aristoteles um 350 v. Chr. am ungleichartigen Hebel gegeben. Viel bestimmter und allgemeiner ausgesprochen und angewendet findet sich dasselbe bei Leonardo da Vinci um 1500 n. Chr.

Momente. Nimmt man ihr Zeichen positiv, wenn die Richtung der Kra mit der Richtung der virtuellen Geschwindigkeit übereinstimmt, im andere Falle dagegen negativ, so kann man die Gleichgewichtsbedingung jed Maschine ausdrücken durch den Satz:

An der Maschine herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe d virtuellen Momente gleich Null ist.

Man erkennt leicht, daß diese virtuellen Momente nichts anderes sin als die von der Maschine aufgenommenen und von ihr wieder abgegeben Arbeitsgrößen. Rechnet man die aufgenommene Arbeit positiv, die abgegebe negativ, so ist ihre algebraische Summe gleich Null.

§ 79. Die Seilmaschine als Flaschenzug und als Wellrad. Ei Kombination von fixen und beweglichen Rollen wird im allgemeinen Flaschenzug genannt.

Die gebräuchlichste Form derselben (der gemeine Flaschenzug) i in Fig. 237 schematisch dargestellt, bei welcher die Rollen ungleiche Grö haben und senkrecht übereinander stehen. Bei einer anderen Ausführu haben die Rollen alle gleiche Größe und sind in zwei Gruppen nebeneinand je um eine gemeinsame Achse drehbar. Das System der miteinander in e und demselben Gehäuse angebrachten Rollen heißt eine Flasche. D Flaschenzug besteht also aus zwei Flaschen und dem verbindenden Seil, dess Wickelungsart aus den Figuren zu ersehen ist.

Zieht man an dem freien Seilende, bis eine Verschiebung des dortig Angriffspunktes um eine Strecke s stattgefunden hat, so verteilt sich d Länge derselben in gleicher Weise auf alle übrigen Seilstränge. Sind der zwischen beiden Flaschen in der Zahl n vorhanden, so beträgt demnach d Verkürzung jedes Stranges $\frac{s}{n}$, und dieses ist auch die zugehörige Verschi bung der unteren Flasche, deren Gehäuse den Angriffspunkt der Last träg Somit ist das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten $= 1 : n$, mithin d Verhältnis der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $= n : 1$.

Potenzflaschenzug wird die in Fig. 238 abgebildete Komb nation einer fixen Rolle mit einer beliebigen Anzahl von beweglichen Roll genannt. Wird das freie Seilende um die Strecke s angezogen, so wi die erste (oberste) bewegliche Rolle um $\frac{s}{2}$ gehoben, die zweite um $\frac{s}{4}$, d dritte um $\frac{s}{8}$ usw.

Sind n bewegliche Rollen vorhanden, so wird die letzte Rolle um $\frac{s}{2^n}$ gehoben. Das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten zwischen de Angriffspunkten der Kraft und der Last ist demnach gleich $1 : \frac{1}{2^n}$, folglic herrscht Gleichgewicht, wenn Kraft zu Last in dem Verhältnis $1 : 2^n$ stehen[1] Dadurch erklärt sich auch der Name Potenzflaschenzug.

[1]) Dabei wird vom Gewicht der Rollen selbst abgesehen.

Der **Differentialflaschenzug** von **Weston**, Fig. 239, besteht aus zwei auf derselben Achse sitzenden miteinander drehbaren fixen Rollen von

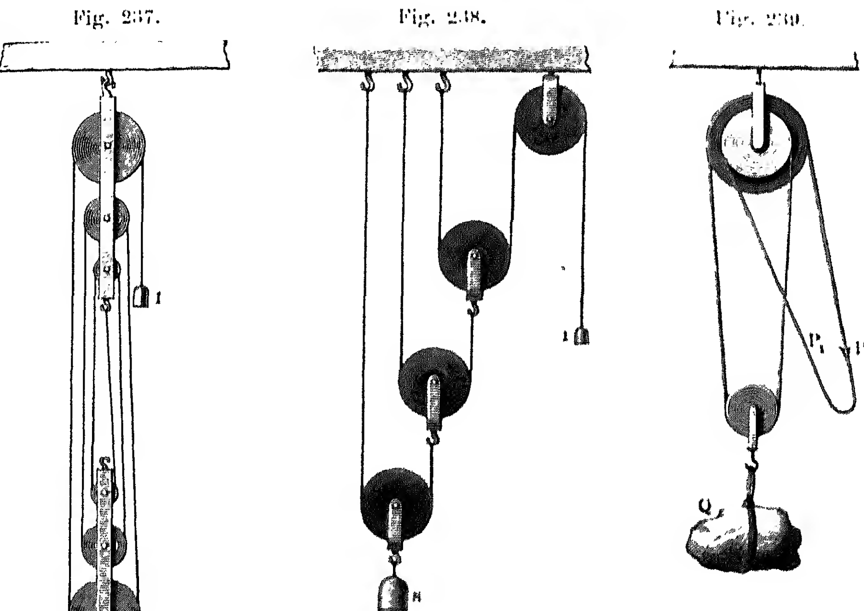


Fig. 237. Fig. 238. Fig. 239.

ungleich großen, aber wenig verschiedenen Radien R und r und einer beweglichen Rolle. Ein endloses, d. h. an den Enden vereinigtes Seil ist, wie die Figur zeigt, um diese Rollen herumgelegt. Der Angriffspunkt der Kraft befindet sich an der Stelle P des Seiles; die Last Q an der Schere der beweglichen Rolle. Zieht man bei P um eine Strecke s nach abwärts, so wird die ixe Doppelrolle um einen Bogen von der gleichen Länge s gedreht. Gleichzeitig ist die von der kleineren Rolle zurückgelegte Bogenlänge $= s\dfrac{r}{R}$, im dieselbe Länge wird das Seil von der kleineren Rolle abgewickelt. Die Gesamtlänge der zwischen der festen und der beweglichen Rolle befindlichen Seilstücke wird also um $s - s\dfrac{r}{R} = s\dfrac{R-r}{R}$ verkürzt; von dieser Verkürzung trifft es auf jeden Seilstrang die Hälfte, folglich beträgt die Hebung $\dfrac{R-r}{2R}$. Das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeit ist also $1 : \dfrac{R-r}{2R}$, olglich ist das Verhältnis der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $: \dfrac{2R}{R-r}$. Die Übersetzung ist offenbar desto größer, je weniger die beiden Radien voneinander differieren.

Damit der Strang P_1, welcher lose hängt, nicht zu einem Gleiten Anlaß ebe, ist das Seil durch eine Kette ersetzt, deren Glieder in warzenförmige Vorsprünge der Rollen eingreifen.

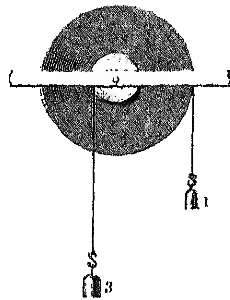
Bei sämtlichen Flaschenzügen haben wir es mit Maschinen zu tun, welche ie übertragene Arbeitsgröße in ihrer Zusammensetzung zugunsten der Kraft

auf Kosten des Weges (oder umgekehrt) verändern, wobei jedoch das Über-setzungsverhältnis während der Übertragung konstant bleibt.

Die nächst verwandte Maschine ist

das **Wellrad** (Haspel, Winde, Göpel). Dasselbe besteht im wesentliche aus zwei miteinander fest verbundenen Rollen verschiedenen Halbmessers und r, um deren jede ein Seil geschlungen wird, dessen eines Ende am Un-fange befestigt ist, dessen anderes Ende als Angriffspunkt dient, Fig. 24

Fig. 240.

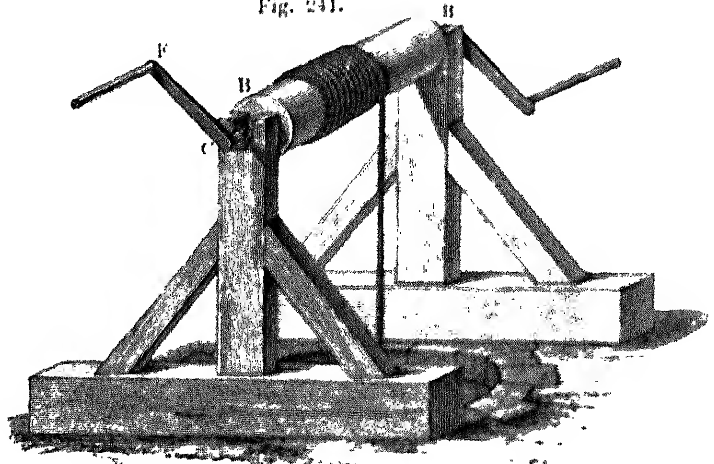


Die kleinere Rolle hat jedoch meistens die Form eine zylindrischen Welle, um welche das Seil in mehrere parallelen Windungen aufgewickelt wird. An Stel der größeren Rolle tritt häufig ein Speichenrad, a dessen Umfang direkt ohne Seil die Kraft angreif oder es sind von diesem selbst nur die Speichen allei noch vorhanden, deren Enden abwechselnd als Angriff-punkte fungieren, oder endlich es ist nur mehr ein Speiche übrig geblieben, welche mit einem der Well parallelen Fortsatze versehen ist, an welchem der An-griff der Kraft stattfindet. Dieser Bestandteil heiß dann eine **Kurbel**, Fig. 241; die ganze Maschin heißt Haspel oder Winde; wenn die Achse vertikal steht, auch Göpel.

Offenbar verhalten sich die virtuellen Geschwindigkeiten wie die zu-gehörigen Radien, daher die Kräfte beim Gleichgewicht sich verkehrt de Radien verhalten müssen.

Um also eine große Übersetzung zu erhalten, sollte man den Radius de Welle recht klein, die Kurbel recht lang machen. Allein dies hat sein

Fig. 241.



praktischen Grenzen, da die Welle sonst zu schwach würde und die Kurbel-länge den Dimensionen des Arbeiters anzupassen ist. Um bedeutendere Über-setzungen zu erzielen, verwendet man daher eine der folgenden Maschinen:

Das **Differentialwellrad**, Fig. 242, besitzt zwei Wellen von verschie-denen Halbmessern r_1 und r_2, deren eine die Fortsetzung der anderen auf gleicher Achse bildet. Das Seil ist, wie aus der Figur ersichtlich, auf beide

fallen zu lassen [1]).

---

[1]) ir haben mit obiger Darstellung diejenige Auffassung vertreten, welche der großen Mehrzahl der Physiker geteilt wird. Als Beleg führen wir llen aus dem Nachlasse H. v. Helmholtz' an „Über die Analyse des vorhandenen Wissens“:

Aufstellung eines Naturgesetzes enthält die Zuversicht, daß in allen entsprechenden Fällen die Erscheinungen sich dem Gesetze fügen werden. indiges Gesetz, welches die Bedingungen und die Größe des Erfolges vollld genau angibt, ist für unser Wissen der genügende Grund, sicher auf z zu schließen. Ebenso ist es dann anzusehen als Kraft, als der obnügende Grund des Eintritts. Die naturwissenschaftlichen Hypothesen iche, Gesetze von einer weiter ausgedehnten Bedeutung zu finden, als chtungen unmittelbar erlauben . . . Der Urquell alles Wissens ist die ng des bisher Erfahrenen in das künftig zu Erfahrende. Die Eren begreifen oder ihre Gesetze finden, heißt die Kräfte aufsuchen, welche chen der Erscheinungen sind.“ (L. Königsbergers Biographie mholtz', Bd. II, S. 158, 167).

dürfen aber nicht verschweigen, daß einige neuere Naturforscher andere vertreten.

B. sagt J. R. Mayer: „Die einzige Regel für die echte Naturforschung scheinungen kennen zu lernen, bevor wir nach Erklärungen suchen oder eren Ursachen fragen mögen. Ist einmal eine Tatsache nach allen ihren annt, so ist sie eben damit erklärt, und die Aufgabe der Wissenschaft igt.“ Nach unserer Auffassung gilt von diesem Ausspruche nur der

hhoff definiert als Aufgabe der Mechanik: „Die in der Natur vor sich Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben.“ ach bezeichnet die Annahme einer Ursache als Fetischismus und ver- Prinzip der Kausalität. Hiernach gibt es keine Erklärung, keine Urd keine Wirkung.

)stwald erklärt die Aufstellung von Hypothesen für schädlich und ent-

Annahme kausalen Zusammenhanges einerseits und die Leugnung der andererseits sind nun allerdings unüberbrückbare Gegensätze, ebenso die einer realen Welt gegenüber der Annahme, daß nur die Empfindungen tieren. Dagegen halten wir die Verwerfung der „Erklärung“ und die derselben durch „Beschreibung“ für eine bisher ungebräuchliche und kliche Anwendung des letzteren Wortes.

Wichtigkeit dieser Frage veranlaßt uns, dies in einem Beispiele näher erzusetzen. Die Bewegungen der Planeten können nicht vollständiger einfacher beschrieben werden als durch ein Verzeichnis ihrer Positionen el für jeden Tag, allenfalls ergänzt durch einen Atlas, in dem die scheinnen mit Datumsbezeichnung auf der Fixsternkarte eingezeichnet sind. nit begnügten sich die Astronomen nicht. Sie fühlten das Bedürfnis, die so verworrenen Planetenbahnen verständlich zu machen, indem sie als die geozentrischen Projektionen der wirklichen Bewegungen auf das ewölbe aufzufassen versuchten. Das Ptolemäische und das Koperhe System sind solche Versuche, von denen das letztere die größere Einind nach der Verbesserung durch Keppler auch die größere Genauigkeit hat. Hervorgerufen wurden diese Versuche insbesondere durch den astronomische Ereignisse vorausberechnen zu können. Das konnte die Beschreibung nie leisten, denn diese konnte immer nur die Tatsachen

ellen aufgewickelt, so zwar, daß es sich gleichzeitig von der einen Welle
- und auf die andere aufwickelt. Das dazwischen befindliche Seilstuck
igt eine bewegliche Rolle, deren
here als Angriffspunkt der Last
ent. Die Kraft greift am Ende
ier Kurbel vom Radius R an.

Fig. 242.

Beschreibt das Ende der Kurbel
nen Bogen von der Länge s, und
var in dem Sinne, daß das Seil auf
r größeren Welle vom Radius r_1
fgewickelt wird, so beträgt die
fgewickelte Länge des letzteren
$\frac{r_1}{R}$; gleichzeitig wickelt sich von
r kleineren Welle ein Stuck
$\frac{r_2}{R}$ ab. Das ganze die bewegliche
olle tragende Stuck des Seiles wird daher um den Betrag

$$s\frac{r_1}{R} - s\frac{r_2}{R} = \frac{s}{R}(r_1 - r_2)$$

rkürzt, davon trifft es auf jeden Strang die Hälfte, also beträgt die Hebung

$$\frac{s}{R} \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}.$$

Das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher gleich

$$1 : \frac{r_1 - r_2}{2R},$$

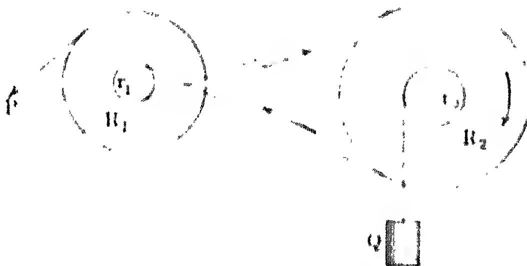
thin das Übersetzungsverhaltnis der Kräfte gleich

$$1 : \frac{2R}{r_1 - r_2}.$$

Dasselbe ist also desto größer, je kleiner die Differenz der Radien der
ellen ist. Die Maschine wirkt also analog dem Differentialflaschenzug von
oston, Fig. 239.

§ 80. Räderwerke. Schneckenrad. Eine Verbindung mehrerer
ellräder in der Art, daß die Welle des einen Wellrades je mit dem Rade

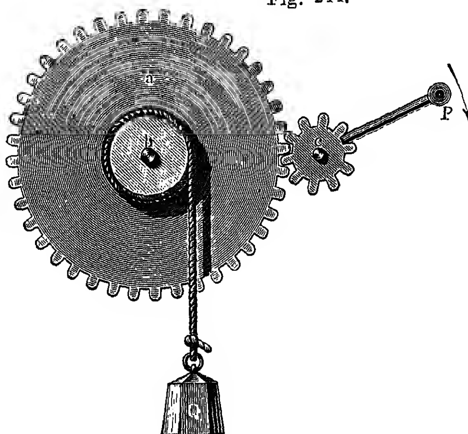
Fig. 243.



s folgenden, sei es durch einen uber beide gelegten Riemen, sei es durch
hnung des Umfanges, sei es endlich durch direkte Reibung der Oberflächen

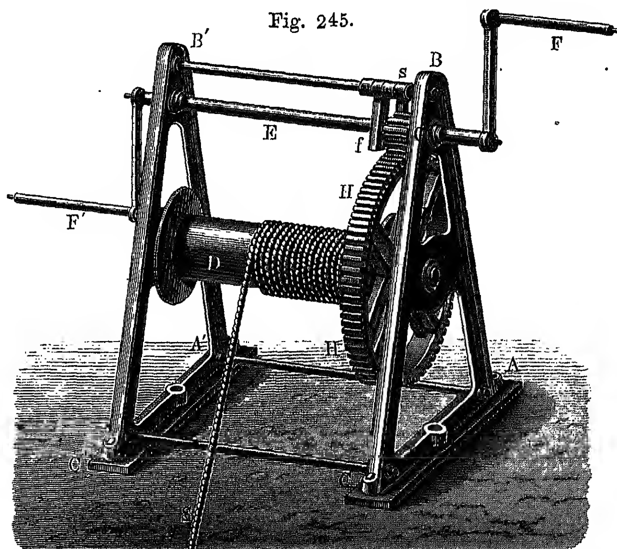
verbunden ist, heißt man ein Räderwerk. Die Kraft wirkt am ersten Rade, die Last hängt an der letzten Welle. Fig. 243 zeigt eine Verbindung zwischen den beiden Wellrädern durch einen Riemen, und zwar durch einen gekreuzten Riemen, bei dem das Gleiten weniger leicht erfolgt.

Fig. 244.



In der Fig. 244 (Fig. 245 gibt eine perspektivische Ansicht einer Maschine dieser Art) greift die Welle des ersten Wellrades, d. i. der Kurbel, an der die Kraft P wirkt, mit Zähnen in das gezahnte Rad des zweiten Wellrades ein, an deren Welle das Seil mit der Last Q befestigt ist. Man heißt die gezahnte Welle das Getriebe und das gezahnte Rad das Zahnrad.

Fig. 245.



Ist R_1 der Radius des ersten Rades und r_1 derjenige der betreffenden Welle, sodann R_2 der Radius des folgenden Rades und r_2 derjenige dieser Welle, so bestehen die Gleichungen:

$$P = p\,\frac{r_1}{R_1} \quad \text{und} \quad p = Q\,\frac{r_2}{R_2},$$

wenn p die Kraft an der Welle des ersten Wellrades bezeichnet, die sich auf das Rad des zweiten Wellrades fortpflanzt; man hat also:

$$P = Q \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und allgemein, wenn wir so n Räder hintereinander hätten, würde sein:

$$P = Q \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots\ldots r_n}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \ldots\ldots R_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bei gezahnten Rädern und Wellen verhalten sich aber die Radien r und R der Getriebe und der Räder wie die Zahl der Zähne auf deren Umfang, da ja die beiderseitigen Zähne zum Ineinandergreifen gleich groß sein müssen. Heißen wir z_1, z_2 usw. die Zahl der Zähne bei den Getrieben und Z_1, Z_2 usw. die Zahl der Zähne am Umfang der Räder, so wird demnach auch sein:

$$P = Q \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots\ldots z_n}{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \ldots\ldots Z_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

In gleichem Verhältnis wie die Kraft P gegenüber Q abnehmen kann, wird auch, wie leicht ersichtlich, der Quotient der Geschwindigkeit oder der von beiden zurückgelegten Wege größer werden, so daß man hat:

$$c_p = c_q \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \ldots\ldots Z_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots\ldots z_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Bezeichnen wir die Umlaufszeit des Wellrades ab in Fig. 244 mit T_2 und mit T_1 diejenige des anderen Wellrades c, d. h. der Kurbel P mit ihrem Getriebe, so werden die beiden Umlaufszeiten offenbar das Verhältnis eingehen:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{R_2} = \frac{z_1}{Z_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wenn r_1 den Radius und z_1 die Zahl der Zähne auf dem Getriebe (erstes Wellrad), R_2 den Radius und Z_2 die Zähnezahl auf dem Zahnrad (zweites Wellrad) darstellen.

Nach diesen Regeln bestimmt man z. B. die Zahl der Zähne bei dem Räderwerke einer Uhr. Da nämlich der Sekundenzeiger einen Umlauf in einer Minute, der Minutenzeiger in einer Stunde oder 60 Minuten und der Stundenzeiger in 12 Stunden oder 720 Minuten machen soll und alle drei Zeiger im selben Sinne sich drehen sollen, was also stets noch ein Zwischenrad zwischen ihren Rädern erheischt, so sind folgende Räder und Getriebe notwendig, deren Zähnezahlen z. B. sein können:

	Zahl der Zähne am Rade	Zahl der Zähne am Getriebe	Umlaufszeit in Minuten
Steig- oder Sekundenrad	—	10	1
Mittelrad	80	12	8
Minutenrad	90	12	60
Wechselrad	36	12	180
Stundenrad	48	—	720

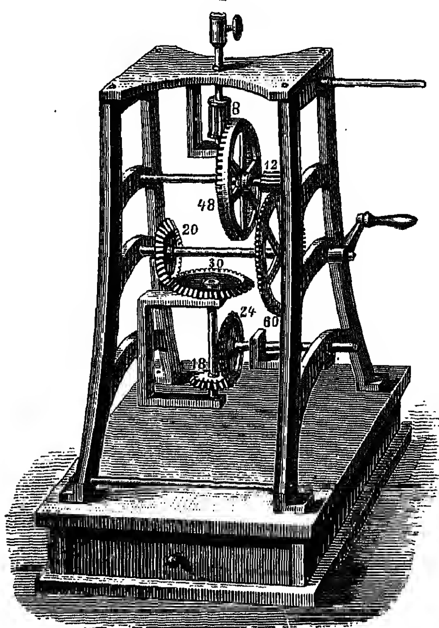
Meistenteils suchen wir also durch die aufgeführten Maschinen auf Kosten der Geschwindigkeit einen Kraftgewinn zu erzielen. Es gibt indessen auch Verwendungen derselben, wo wir auf Kosten der Kraft die Geschwindigkeit zu vermehren suchen.

Rotationsapparate. Um Scheiben und dergleichen zu gewissen, später näher zu erörternden Zwecken sehr rasch und gleichmäßig rotieren zu lassen, hat man Räderwerke konstruiert, bei welchen ein größeres Gewicht oder die

Elastizität einer starken gespannten Feder an dem letzten Rade als treibende Kraft wirkt, während auf die Achse des ersten Rades die rasch zu drehende Scheibe aufgesetzt wird. Da die Kraft bei diesem Rade infolge der Übersetzung eine sehr kleine ist, so genügt häufig schon die Reibung der Luft an der Scheibe, um eine gleichförmige Geschwindigkeit zu erzielen.

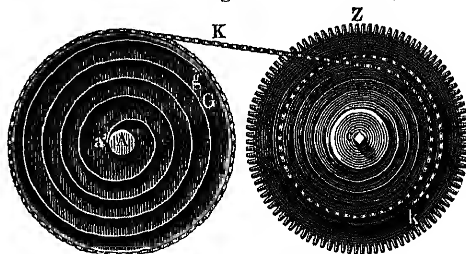
Fig. 246 zeigt einen solchen Rotationsapparat mit Räderwerk, der von der Hand mit einer Kurbel gedreht wird und wo die nach oben hervorragende letzte vertikale Achse — die durch Umlegen des Apparates auch horizontal zu stellen ist — 60 Umdrehungen auf eine Umdrehung der unten anzusetzenden Kurbel macht.

Fig. 246.



Die bisher betrachteten Formen des Wellrades stellen sämtlich Maschinen mit konstanter Übersetzung vor. Es kann aber auch das Wellrad in eine Maschine mit veränderlicher Übersetzung umgestaltet werden. Hierzu ist nötig, daß das Verhältnis der Radien, an denen Kraft und Last angreifen, veränderlich wird. Dies ist z. B. in Ausführung gebracht beim S c h n e c k e n r a d e. *Z* (Fig. 247) stellt ein gezahntes Wellrad vor, dessen Welle nicht zylindrisch, sondern nach Form eines Schneckenhauses ausgeführt ist. Die bei *k* befestigte Kette *K* wird daher beim Drehen des Rades nach rechts auf einer Welle mit immer kleiner werdendem Radius aufgewickelt. Das andere Ende der Kette ist am Umfange einer zylindrischen Trommel *G* befestigt und in parallelen Windungen auf derselben aufgewickelt. Die Trommel selbst ist um die feststehende Achse *A* drehbar. Eine in Form einer ebenen Spirale geformte, bandförmige Stahlfeder (Uhrfeder) ist einerseits an der Achse *A* bei *a*, andererseits am inneren Umfange der drehbaren Trommel bei *g* befestigt. Sowie man also das Zahnrad *Z* mit der Schneckenwelle nach rechts dreht, wird die Trommel ebenfalls nach rechts gedreht und die Spiralfeder aufgewickelt. Läßt man wieder los, so veranlaßt die Spiralfeder die Trommel zur Drehung nach links, wobei die Kette von der Welle ab- und auf die Trommel aufgewickelt wird. Die Kraft, mit welcher die Spiralfeder die Trommel dreht, ist nicht konstant; sie ist am Anfange am größten, am Ende

Fig. 247.



gleich Null. Wäre das Wellrad ein gewöhnliches, so würde der gezahnte Umfang desselben ebenfalls mit fortwährend abnehmender Kraft in Bewegung gesetzt. Dieser Abnahme wirkt aber hier der Umstand entgegen, daß bei der Drehung des Rades der wirksame Teil der Kette auf eine Welle von immer größerem Radius zu liegen kommt. Bei richtiger Konstruktion muß es daher möglich sein, zu erreichen, daß beide Änderungen sich gerade kompensieren. Man hat dann den Zweck der Anordnung erreicht, der darin liegt, mittels der veränderlichen Kraft der Spiralfeder eine konstante Kraft auf den Umfang des Zahnrades auszuüben.

Diese Anordnung kommt bei Taschenuhren vor. Es ist bei diesen noch die Einrichtung getroffen, daß das Zahnrad Z (auch Bodenrad genannt) und die Welle (das Schneckenrad) nicht fest miteinander verbunden sind. Beim Aufziehen der Uhr, wobei das Schneckenrad die Kette aufwickelt, bleibt das Bodenrad stehen, beim Ablaufen der Uhr dagegen nimmt das Schneckenrad das Bodenrad mit Hilfe einer sog. Sperrklinke mit. Die Zähne des Bodenrades setzen dann die übrigen Räder der Uhr in Bewegung.

§ 81. Die Hebelmaschine. Dieselbe besteht, wie die meisten einfachen Maschinen, aus zwei Teilen, der Hebelstange und der Unterlage[1]), um welche die erstere gedreht wird. Die Kräfte wirken dabei in der Regel in einer auf der Achse senkrecht stehenden Ebene; sollte dies nicht der Fall sein, so kann man sich dieselben durch ihre Projektionen auf eine solche Ebene ersetzt denken. Je nach der Lage der Angriffspunkte zur Achse haben wir mehrere Fälle zu unterscheiden.

Fig. 248.

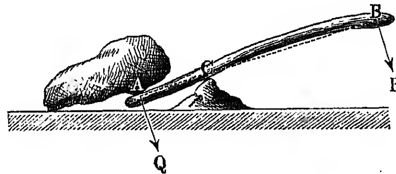


Fig. 249.

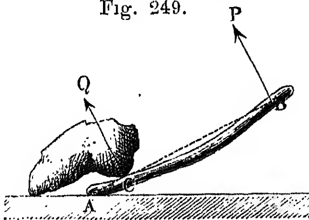
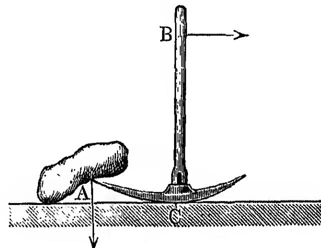


Fig. 250.



Liegen beide Angriffspunkte in einer durch die Achse gehenden Geraden, so hat man einen geraden Hebel, und zwar einen zweiarmigen, Fig. 248, wenn die beiden Angriffspunkte von der Achse aus nach entgegengesetzter Seite, einen einarmigen, Fig. 249, wenn sie auf derselben Seite liegen. Sind die beiden Angriffspunkte nicht mit der Achse in einer Geraden gelegen, so hat man einen Winkelhebel (Fig. 250).

Sind beide Angriffspunkte gleich weit von der Achse entfernt, so ist der Hebel gleicharmig, wie z. B. bei der gewöhnlichen Wage[2]).

[1]) Auch Hypomochlion genannt.

[2]) Die Wagen gehören nur hinsichtlich ihrer Konstruktion zu den Maschinen, ihrem Zwecke nach zu den Meßinstrumenten, da ihre Aufgabe nicht in der Übertragung von Energie, sondern in der Vergleichung von Druckkräften besteht.

Die Hebelgesetze sind im wesentlichen bereits durch das in den §§ 59 und 60 Vorgetragene erschöpft.

Beim geraden Hebel hat der feste Drehpunkt einen Druck auszuhalten, welcher der Summe der an beiden Seiten wirkenden Kräfte gleich ist; ein solcher Hebel kann aber auch im Gleichgewicht sein, wenn dieser mittlere Punkt nicht fest ist, sondern wenn in ihm eine Kraft wirkt, welche der Summe der beiden anderen gleich, der Richtung nach aber ihnen entgegengesetzt ist. Die Fig. 251 mag dies erläutern. Nehmen wir an, c sei der feste Drehpunkt eines Hebels mn, an dessen Enden die Kräfte P und P' angreifen und sich einander das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht wird nun nicht gestört, wenn der Punkt c aufhört fest zu sein, wenn in ihm aber eine Kraft N angebracht wird, welche der Summe von P und P' gleich ist, die aber nach oben wirkt, während die Kräfte P und P' nach unten ziehen.

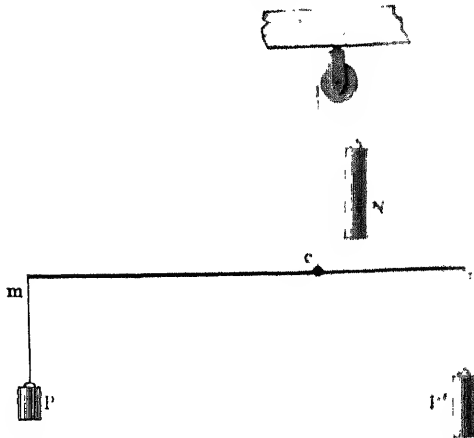
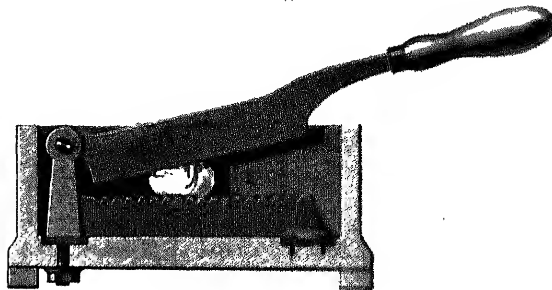
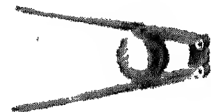


Fig. 251.

Ohne das Gleichgewicht zu stören, kann man jeden der drei Punkte m, c und n als fest betrachten; wenn nur einer der beiden äußeren Punkte, etwa n, fest ist, so haben wir einen einarmigen Hebel, d. h. einen solchen, bei welchem die Angriffspunkte der beiden sich das Gleichgewicht haltenden


Fig. 252.


Fig. 253.

Kräfte N und P auf derselben Seite des festen Drehpunktes n liegen. Die beiden Kräfte haben in diesem Falle entgegengesetzte Richtung, und der Druck auf den Unterstützungspunkt ist dem Unterschiede der beiden Kräfte P und N gleich. Der Hebelarm der Kraft P ist $l + l'$, wenn man mit l die Länge mc, mit l' die Länge nc bezeichnet, der Hebelarm der Kraft N ist aber l'. Wäre c der feste Drehpunkt gewesen, so hätte man als Bedingung des Gleichgewichts:

$$P' : P = l : l'$$

und daraus folgt:

$$P' + P : P = l + l' : l'$$

oder:

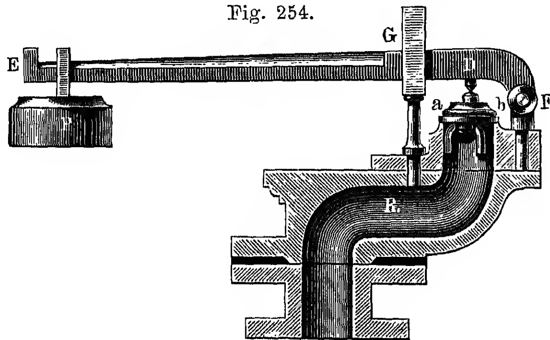
$$N : P = l + l' : l'.$$

Sollen sich also an dem einarmigen Hebel die entgegengesetzten Kräfte das Gleichgewicht halten, so müssen sie sich auch verkehrt verhalten wie die Hebelarme.

Die Citronenpresse, Fig. 252, und der Nußknacker, Fig. 253, sind zwei bekannte Formen der Anwendung des einarmigen Hebels, welche wohl keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

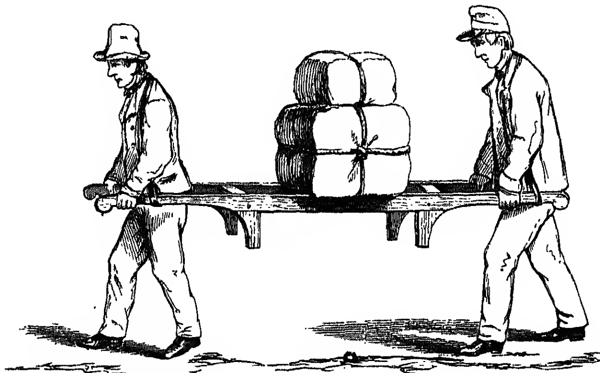
Bei dem Sicherheitsventil der Dampfkessel, Fig. 254, kommt der einarmige Hebel gleichfalls in Anwendung. Indem der Dampf aus dem Dampfkessel in das Rohr R tretend gegen die untere Fläche der Platte ab drückt, strebt er den um das Hypomochlion F drehbaren Hebel zu heben, während derselbe durch das Gewicht P niedergedrückt wird. Bei der Berechnung des Druckes, welcher auf dem Ventil ab lastet, darf das Gewicht des materiellen Hebels FE selbst nicht unberücksichtigt bleiben.

Fig. 254.



Auch die beiden Endpunkte m und n der Stange mn, Fig. 251, können fest sein, während in c eine Kraft N wirkt; alsdann aber hat der Punkt m einen Druck P, der Punkt n einen Druck P' auszuhalten. Wenn die auf einer Tragbahre liegende Last, Fig. 255, durch zwei Leute getragen werden soll, so verteilt sie sich auf die beiden Träger; im Falle sie gerade auf der Mitte der Bahre liegt, kommt auf jeden Träger die Hälfte der Last; wird sie aber dem einen näher gerückt, wie Fig. 255 andeutet, so hat dieser einen

Fig. 255.

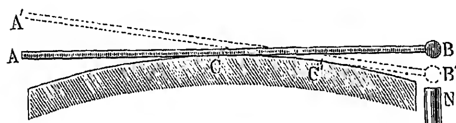


größeren Teil zu tragen. Gesetzt, die aufgelegte Last betrage 100 kg, die ganze Bahre sei 2 m lang und der Schwerpunkt der Last liege 80 cm von dem rückwärtigen, 120 cm von dem vorderen Ende, so haben die Schultern des nachfolgenden Trägers einen Druck von 60 kg, die des vorausgehenden einen Druck von 40 kg auszuhalten.

Zu den zusammengesetzten Hebeln gehören auch die Robervalsche und die Brückenwage, welche bereits in § 70 besprochen wurden.

Hebel mit veränderlicher Übersetzung. Die bisher betrachteten Beispiele von Hebeln, denen noch eine Anzahl anderer beigefügt werden könnte, waren sämtlich derartige, daß das Übersetzungsverhältnis während der Arbeitsleistung konstant blieb. Es gibt aber auch Hebelvorrichtungen mit veränderlicher Übersetzung. Man erhält solche z. B. einfach durch eine Anordnung, wie sie in Fig. 256 angedeutet ist. Die gerade Hebelstange AB ist auf einer Unterlage mit konvexem Querschnitt befindlich. Der Unterstützungspunkt ist in C ungefähr in der Mitte, also das Übersetzungsverhältnis bezüglich der an den Enden angreifenden Kräfte $= 1$. Sowie aber der Hebel bewegt wird, z. B. nach $A'B'$, so rückt der Unterstützungspunkt nach C', nahe an das eine Ende, und dadurch wird der Hebel ein ungleicharmiger. Stellen wir uns vor, in N befinde sich ein Magnetpol, welcher einen am Ende B befindlichen Anker (mit kreisförmigem Querschnitt) anzieht. Die Kraft, mit der dies geschieht, wächst in viel rascherem Verhältnis, als die Distanz abnimmt. Soll nun aber trotzdem am Ende A eine wenigstens annähernd konstante Kraft ausgeübt werden, so kann dies durch die in Rede stehende Vorrichtung erreicht werden, da die anziehende Kraft des Magneten bei der Übertragung auf das andere Hebelende um so mehr geschwächt wird, je mehr sie selbst durch Annäherung des Ankers an den Pol gewachsen ist. In der Tat wird von diesem Prinzip bei dem bekannten Kohlenlichtregulator von Foucault Anwendung gemacht. Auch der Winkelhebel, Fig. 251, ist ein solcher mit veränderlicher Übersetzung, da sein Unterstützungspunkt C während der Bewegung die Stelle wechselt.

Fig. 256.



§ 82. **Die Gleitmaschine.** Die hauptsächlichsten Formen der Gleitmaschine sind: die schiefe Ebene als Keil oder als Rampe, das Exzentrik, die Schraube. Keil und Rampe unterscheiden sich dadurch, daß der erstere bewegt wird, während die letztere in Ruhe bleibt. Exzentrik und Schraube entstehen durch Aufwickelung der schiefen Ebene um eine Achse. Wir wenden uns zuerst zu jenen Formen, die sich unter dem Namen Keil zusammenfassen lassen.

Die schiefe Ebene als Keil erscheint in ihrer einfachsten Form als ein prismatischer Körper mit zwei ebenen Gleitflächen, welche sich unter einem meist spitzen Winkel schneiden. In der Fig. 257 erscheint derselbe im Vertikalschnitt ABC senkrecht auf die von den Gleitflächen AB und AC gebildete Kante A. Eine konstante Kraft P, welche beispielsweise durch ein Gewicht, welches an das Ende der über die fixe Rolle gelegten Schnur gehängt ist, hervorgebracht wird, zieht die schiefe Ebene in der Richtung Ax. Hierdurch soll der Angriffspunkt einer vertikal nach abwärts wirkenden Kraft Q, welche wir uns im Schwerpunkt einer Masse m angebracht denken, in vertikaler Richtung nach aufwärts verschoben werden.

Durch eine in horizontaler Richtung angewendete Kraft soll also eine Arbeit in vertikaler Richtung geleistet werden.

Für die erstere Richtung dient die horizontale Gleitfläche und die Unterlage derselben als Führung, für die vertikale Richtung können wir uns eine Führung durch parallele Leisten, zwischen denen die Masse m auf und ab verschiebbar ist, gegeben denken. Wir stellen uns vor, daß die Bewegung ohne alle Reibung vor sich gehe. Um das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden, denken wir uns die schiefe Ebene um eine Strecke aA gegen X verschoben; hierdurch wird die Last m um die Höhe ab gehoben. Das gesuchte Verhältnis zwischen der Verschiebung des Angriffspunktes der arbeitenden Kraft und jener des Angriffspunktes der überwundenen Kraft ist also gleich dem Verhältnis zwischen der Basis der schiefen Ebene und der Höhe derselben Bezeichnen wir die Basis mit B, die Höhe mit H, so gilt demnach für das Kraftverhältnis die Beziehung:

Fig. 257.

$$P : Q = H : B$$

oder

$$\frac{P}{Q} = tang\, \alpha$$

wenn α der von den Gleitflächen eingeschlossene Winkel ist.

Soll demnach in diesem Falle die schiefe Ebene nur die Richtung und nicht auch die Größe der Kraft (und des Weges) verändern, so müßte $H = B$, also $\alpha = 45^0$ gemacht werden.

Für den Fall, daß die neue Kraftrichtung einen von 90^0 verschiedenen Winkel mit der Richtung der arbeitenden Kraft bildet, muß auch die schiefe Ebene einen anderen Winkel haben, wenn das Übersetzungsverhältnis gleich Eins sein soll. Es sei z. B. Dy, Fig. 258, die Richtung der zu überwinden-

Fig. 258.

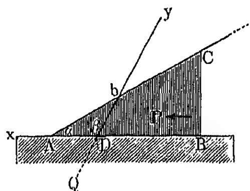
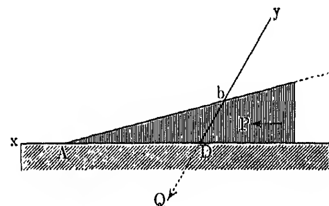


Fig. 259.



den Kraft, welche mit der Richtung der arbeitenden Kraft Dx den Winkel β einschließe. Tragen wir von D aus zwei beliebige gleiche Strecken DA und Db nach x und nach y hin auf und verbinden die Punkte A und b, so ist bAD der Winkel der gesuchten schiefen Ebene, denn einer Verschiebung derselben gegen x entspricht eine gleich große Verschiebung der Last gegen y. Der Winkel α dieser schiefen Ebene ist gleich $90 - \frac{\beta}{2}$. Jede andere schiefe Ebene ändert nicht bloß die Richtung, sondern auch die Zusammensetzung der übertragenen Arbeitsgröße, wobei das Übersetzungsverhältnis durch das Verhältnis der Dreiecksseiten $\frac{DA}{Db}$ gegeben ist. Soll also z. B. eine Kraft,

welche in der Richtung Dx (Fig. 259) gegeben ist, nach der Richtung Dy in dreifacher Stärke wirken, so tragen wir eine beliebige Strecke Db und eine Strecke $DA = 3\,Db$ auf; DAb ist dann der Winkel der gewünschten schiefen Ebene.

Die äußere Anordnung zur Führung der Kräfte kann eine sehr verschiedene sein.

So z. B. kann die Last m statt durch vertikale Leisten dadurch in vertikaler Richtung geführt sein, daß sie mittels einer horizontalen Schnur gehalten wird (Fig. 260), oder dadurch, daß sie auf einem zweiten prismatischen Stücke aufruht, dessen horizontale Bewegung gehindert ist (Fig. 261).

Fig. 260.

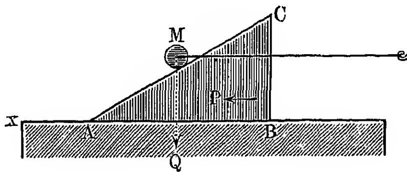
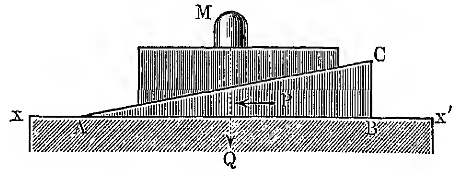


Fig. 261.



Denkt man sich die letztere Anordnung in bezug auf xx' symmetrisch verdoppelt, wie Fig. 262 in aufgerichteter Lage zeigt, so hat man den symmetrischen Keil, bei welchem die Richtung der arbeitenden Kraft den Kantenwinkel des Keiles halbiert. Wirkt dabei die zu überwindende Kraft Q senkrecht gegen die Mittellinie AB, so sind die zusammengehörigen Wege der Angriffspunkt der Kräfte P und Q im Verhältnis von

Fig. 262.

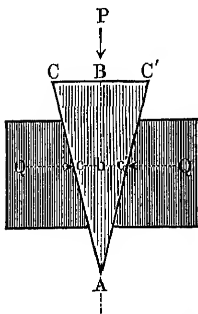
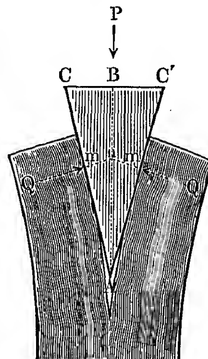


Fig. 263.



$$bA : cc' = BA : CC',$$

also die Kräfte selbst im Verhältnis

$$P : Q = CC' : BA$$

stehend. CC' wird der Rücken des Keiles, BA seine Länge, $CA = C'A$ seine Seite genannt. Es verhält sich also in diesem Falle Kraft zur Last wie der Rücken des Keiles zur Länge desselben.

Ist aber die Gegenkraft Q beiderseits senkrecht auf die Seite des Keiles gerichtet (Fig. 263), so sind offenbar die gleichzeitigen Wege der Angriffspunkte von P und Q in dem Verhältnis:

$$nA : 2mn = CA : CC'$$

also die Kräfte im Verhältnis:

$$P : Q = CC' : CA$$

stehend, d. h. es verhält sich Kraft zur Last wie der Rücken des Keiles zur Seite desselben.

Der in Fig. 264 abgebildete Apparat dient zum Nachweis des ersten dieser Sätze, so weit dies wegen der verhältnismäßig großen Reibung möglich ist.

teilungsprinzip umzusehen, welches wenigstens dem praktischen Bedürfnisse Rechnung trägt.

Man hat versucht, die Physik nach der Beschaffenheit des Substrates, an dem die Erscheinungen vor sich gehen, in die Physik der Ponderabilien (der wägbaren Materie) und die Physik der Imponderabilien (der nicht wägbaren Substrate) einzuteilen. Man rechnet zur ersteren die Lehre von der Bewegung und dem Gleichgewicht der Körper (Mechanik) und die Lehre vom Schalle (Akustik), zur letzteren die Wärmelehre, die Lehre vom Lichte und die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität. Allein diese Einteilung ist nicht stichhaltig [1]) und überdies nicht ausreichend, da die daraus hervorgehenden Gruppen doch wieder unterabgeteilt werden müssen.

---

der Vergangenheit feststellen. Der künftige Verlauf der scheinbaren Bewegungen konnte nur dann vorausgesagt werden, wenn das System der wirklichen Bewegungen bekannt war, durch deren Projektion die scheinbaren Bewegungen entstehen. Die Erschließung der wirklichen Bewegungen aus den scheinbaren nennt man aber nicht Beschreibung, sondern Erklärung der letzteren; denn durch sie wird es klar, wieso letztere zustande kommen.

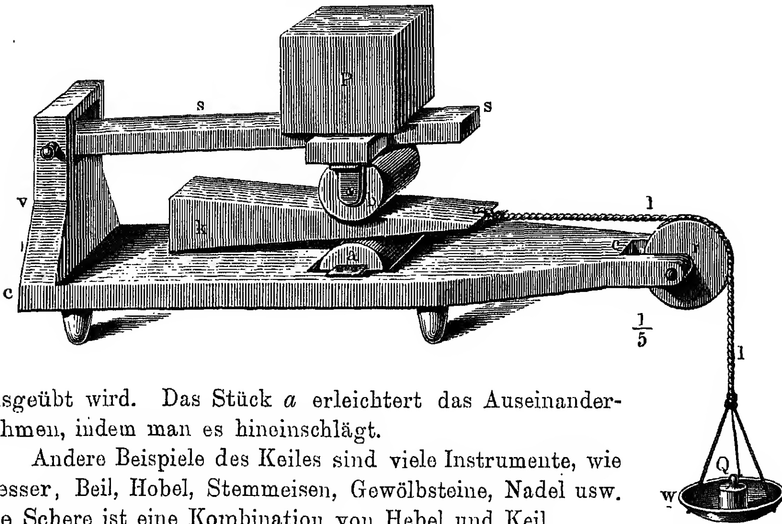
Aber selbst dann, wenn man so weit gehen wollte, die Aufstellung der wirklichen Bewegungen als eine vereinfachte Beschreibung der scheinbaren zu bezeichnen, wäre damit die Aufgabe der Astronomie noch nicht erfüllt. Newton hat trotz seines Ausspruches: „hypotheses non fingo" auf Grund der Hypothese, daß dieselbe Ursache (Kraft), welche den Stein fallen macht, auch die Bewegung des Mondes beherrsche, beide Erscheinungen einheitlich dynamisch erklärt; denn eine Beschreibung kann man seine Gravitationstheorie denn doch nicht nennen. Ebensowenig kann man z. B. Kirchhoffs Theorie der Klangfiguren eine einfache Beschreibung dieser Figuren nennen. Wenn dies trotzdem geschieht, so dürfen wir wohl fragen, ob es zweckmäßig ist, zwei so verschiedene Leistungen, die man bisher als „beschreiben" und „erklären" unterschieden hat, mit einem Male mit demselben Ausdruck „beschreiben" zu bezeichnen.

Ebenso unverständlich ist uns die Scheu vor den Hypothesen. Es handelt sich ja nicht um vage, unbegründete Hypothesen, welche allein Newton mit seinem Ausspruche gemeint haben kann. Wo stände heute die Astronomie ohne die Gravitationshypothese, wo die synthetische Chemie ohne die Daltonsche Hypothese der Atome? Unzweifelhaft wären sowohl der Neptun, sowie zahlreiche chemische Verbindungen unentdeckt geblieben. Das Kopernikanische Weltsystem ist auch nur eine Hypothese, und welchen Aufschwung hat sie der gesamten Naturwissenschaft gebracht! Warum sollen wir also so fruchtbare Hilfsvorstellungen nicht benutzen? Wir müßten es selbst dann tun, wenn wir bestimmt vermuteten, daß sie der Realität nicht entsprechen und seinerzeit besseren Hypothesen weichen werden. Solche theoretisch längst aufgegebene, aber aus Nützlichkeitsgründen noch beibehaltene Hypothesen finden sich in fast allen Teilen der Physik; nach ihrem gänzlichen Fallenlassen bleibt dann oft noch die denselben entstammende Nomenklatur erhalten. So z. B. sprechen wir heute noch vom Abfließen der Wärme, obwohl wir längst die Hypothese, daß die Wärme eine Flüssigkeit sei, aufgegeben haben.

[1]) Da wir z. B. die Erscheinungen der Wärme durch Bewegungen der Moleküle zu erklären versuchen und andererseits dem Äther eine Masse zuschreiben müssen.

Fig. 265 zeigt eine sog. Keilpresse im Durchschnitt; c, c ist der zu pressende Körper, b ist der Keil, durch dessen Hineinschlagen der Druck ausgeübt wird. Das Stück a erleichtert das Auseinandernehmen, indem man es hineinschlägt.

Fig. 264.



Andere Beispiele des Keiles sind viele Instrumente, wie Messer, Beil, Hobel, Stemmeisen, Gewölbsteine, Nadel usw. Die Schere ist eine Kombination von Hebel und Keil.

Die schiefe Ebene als Rampe. (Schiefe Ebene im engeren Sinne.) Es sei eine Masse m vom Niveau AA', Fig. 266, auf das um h höhere Niveau BB' zu heben.

Fig. 265.

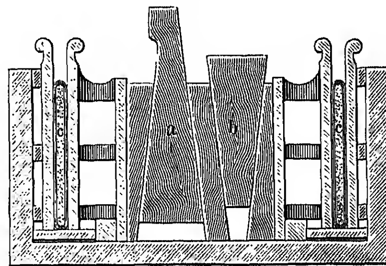
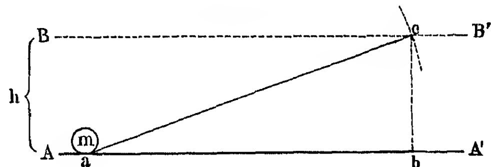


Fig. 266.



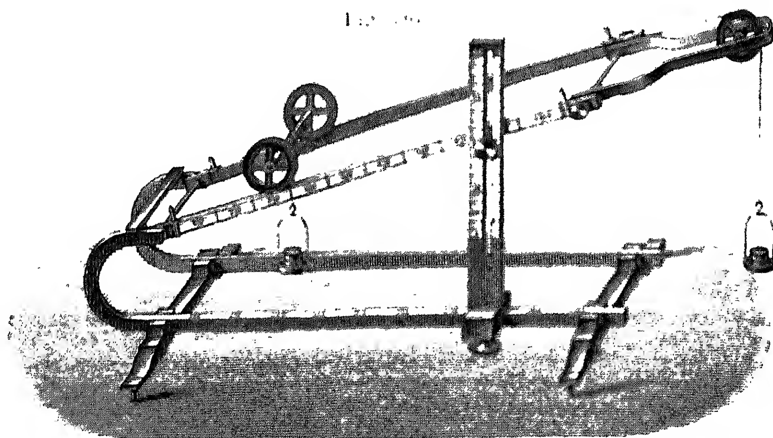
Ist g die Acceleration der Schwere, so ist eine Kraft $= mg$ erforderlich, um diese Hebung in vertikaler Richtung zu bewerkstelligen. Wenn nun aber eine solche Kraft nicht zur Verfügung steht, sondern nur eine kleinere Kraft $= \frac{mg}{n}$, so kann man die Hebung auf einer schiefen Ebene bewerkstelligen, deren schiefe Länge $l = nh$ ist. Nimmt man eine Länge $= nh$ in den Zirkel (in der Figur ist $n = 3$) und beschreibt man von a aus den Bogen, der BB' in c schneidet, so ist ac die gewünschte schiefe Ebene, denn wie bereits § 48 gezeigt wurde, ist die längs ac wirksame Komponente der Anziehungskraft der Erde auf die Masse m gleich:

$$\frac{mgh}{l} = \frac{mg}{n}.$$

Die schiefe Ebene vermindert also nicht, aber sie erleichtert die zu leistende Arbeit, indem sie die Zusammensetzung derselben ändert, nämlich die Kraft auf Kosten des Weges vermindert.

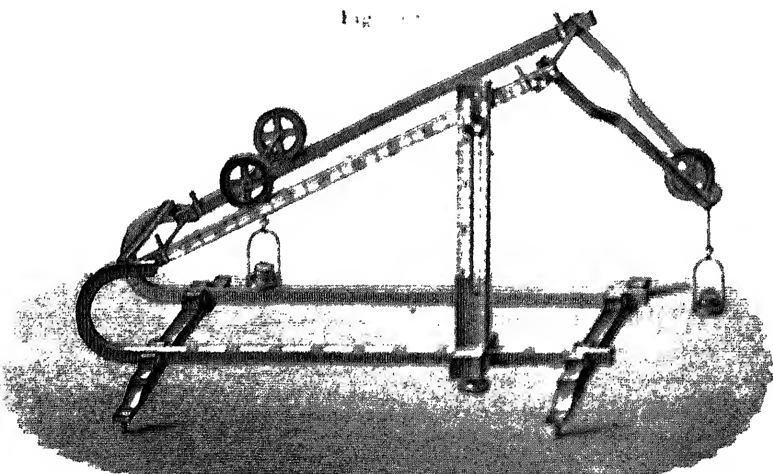
Außer der Hebung um die Höhe h erfolgt aber auch noch eine horizontale Verschiebung um die Strecke ab. Da jedoch Bewegung senkrecht

Fig. [illegible]



auf die Richtung einer Kraft keine Arbeitsleistung erfordert (immer vorausgesetzt, daß keine Reibung zu überwinden ist), so können wir diese horizontale Verschiebung vor oder nach dem Anstiege über die schiefe Ebene ohne weiteren Aufwand von Energie bewerkstelligen. Wir könnten auch die

Fig. [illegible]



schiefe Ebene in zwei Hälften umgekehrter Neigung zerlegen, wie es tatsächlich bei unseren Haustreppen häufig verwirklicht ist.

Die schiefe Ebene kommt manchesmal auch noch in der Weise zur Anwendung, daß die arbeitende Kraft nicht parallel der Länge, sondern parallel der Basis wirkt. Man hat dann den in Fig. 260 bereits dargestellten Fall, nur mit dem Unterschiede, daß dort die schiefe Ebene sich gegen die zu hebende Masse bewegt, während hier die schiefe Ebene ruht und die Masse

gegen sie bewegt wird. Wie dort, verhält sich daher auch hier die Kraft zur Last wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben.

Zur Demonstration der beiden Anwendungen der schiefen Ebenen eignet sich der in Fig. 267 und 268 dargestellte Apparat[1]), welcher wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

Das Übersetzungsverhältnis der schiefen Ebene ist ein konstantes, weil eben der Neigungswinkel ein konstanter ist. Ersetzt man die ebene Gleit-

Fig. 269.

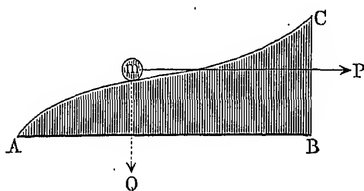
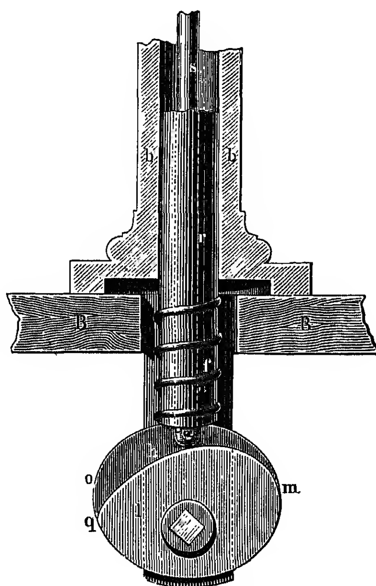


Fig. 270.



fläche derselben durch eine solche mit veränderlicher Neigung, so daß also ihre Projektion auf die Zeichnungsebene statt einer Geraden eine Kurve erscheinen läßt, so erhält man eine Gleitmaschine mit veränderlicher Übersetzung, Fig. 269.

Eine damit nahe verwandte Maschine erhält man, wenn man sich eine solche Kurve statt auf einer geradlinigen Basis auf der Mantelfläche eines Zylinders aufgewickelt denkt. Indem dann der Zylinder um seine Achse gedreht wird, schiebt sich die Gleitfläche mit wechselnder Höhe unter der zu hebenden Last vorbei. Eine solche Vorrichtung ist das Exzentrik[2]).

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir eine der Vorrichtungen beschreiben, welche an Wagen angebracht werden, um die Arretierung des Balkens und der Schalen zu bewerkstelligen. Wie wir in § 68 mitgeteilt haben, enthält die Wagsäule eine zylindrische Röhre und innerhalb derselben ein zylindrisches Stäbchen. Fig. 270 zeigt eine solche Vorrichtung im Querschnitt[3]). *B* ist der Boden, auf dem die hohle Wagsäule *b* steht, *r* ist die Röhre, durch deren Hebung die Schalen (oder Gehänge) frei gesetzt, durch deren Senkung sie arretiert werden. *s* ist der zylindrische Stab, durch dessen Hebung der Balken arretiert, durch dessen Senkung er frei

---

[1]) Derselbe ist nach Angabe des Professors Bertram vom Mechaniker E. Ernecke in Berlin ausgeführt. Eine sehr zweckmäßige Form, welche auch den Normaldruck auf die schiefe Ebene zu messen gestattet, ist von Professor Weinhold in seinen „Physikalischen Demonstrationen", S. 70 beschrieben und abgebildet.

[2]) Streng genommen sollte man darunter nur solche Vorrichtungen verstehen, deren Gleitfläche nach einem um die Drehachse exzentrisch gelegenen Kreis, bzw. Kreissegment geformt ist; doch gebraucht man diesen Namen auch bei anders geformten Gleitflächen.

[3]) Die Zeichnung bezieht sich auf eine Wage von Kraft in Wien.

gemacht wird. l und h sind zwei miteinander verbundene exzent Scheiben, welche sich mittels eines auf dem viereckigen Zapfen aufzust den Schlüssels drehen lassen. Auf dem Umfange der Scheibe h sit Röhre r auf und wird durch die Spiralfeder f an die erstere anged Auf dem Umfange der Scheibe l sitzt das am unteren Ende der St befindliche Rädchen i auf. Wenn der Wagebalken frei spielt, ist die D scheibe so gedreht, daß die Röhre r bei dem Punkte n, das Rädchen dem Punkte q aufsitzt. Dreht man in der Richtung des Pfeiles, so zunächst die Röhre unverrückt stehen, weil nm ein konzentrischer ist, während das Rädchen i von q bis m aufwärts gehoben, der I unterstützt, also arretiert wird. Dreht man noch weiter nach lin werden von da an Röhre und Stab gesenkt, so daß hierdurch die S (oder die Gehänge) auf ihre Unterstützungen herabgelassen werden. der Rückbewegung werden also zuerst Röhre und Stab gehoben, hie die Schalen (oder Gehänge) frei, dann beim Weiterzurückdrehen blei Röhre stehen, während der Stab sinkt und hierdurch den Balken fr

Eine ähnliche Anwendung eines spiralförmig geformten Exze findet man bei manchen Kopiermaschinen; auch bei der Nähmaschine sich verwandte Konstruktionen.

Wie man sieht, haben derlei Vorrichtungen eine prinzipielle Verw schaft mit dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Schneckenrade. Unterschied besteht in der Verbindungsweise, welche bei letzterem eine Kette (Seil), hier unmittelbar durch die Gleitfläche hergestellt ist.

Die schiefe Ebene als Schraube. Während die vorang beschriebene Maschine als eine schiefe Ebene aufgefaßt werden kann, mit ihrer Basis auf die Mantelfläche eines auf ihr senkrecht steh

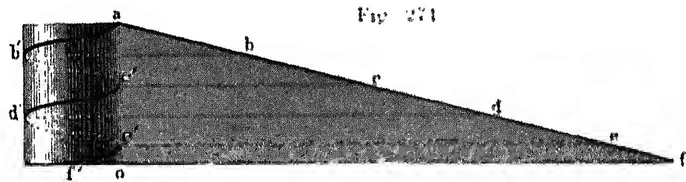


Fig. 271.

Zylinders aufgewickelt ist, erhalten wir die Schraube, indem wir eine Ebene auf einem zu ihr parallelen, auf ihrer Basis senkrecht steh Zylinder aufwickeln.

Es sei aof, Fig. 271, ein rechtwinklig dreieckiges Stück Papier, vertikale Kathete an einem Zylinder befestigt ist. Wird nun das um den Zylinder herumgewickelt, so bildet die Hypotenuse af au Zylinder eine Schraubenlinie, deren Lauf man in der Figur leic folgen kann.

Ist cc' gleich dem Umfange des Zylinders, so wird beim Umw c nach c', also vertikal unter a kommen. Der Punkt b kommt n d nach d' usw. Die auf die hintere Seite des Zylinders fallenden der Schraubenlinie sind punktiert. Die Höhe von a bis c', von b' bis ist die Höhe eines Schraubenganges.

Denken wir uns längs der Schraubenlinie um den Zylinder ein D dessen Ebene radiale Richtung behält, fortgeführt, welches die Höhe

Schraubenganges hat, so entsteht ein sog. scharfes Schraubengewinde, wie ein solches in Fig. 272 dargestellt ist; denkt man sich aber ein Viereck, dessen Höhe gewöhnlich halb so groß ist als die Höhe eines Schraubenganges,

Fig. 272.

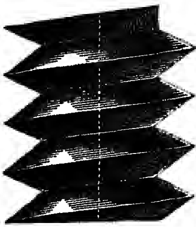


Fig. 273.

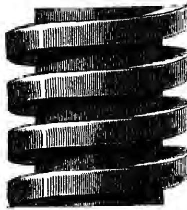
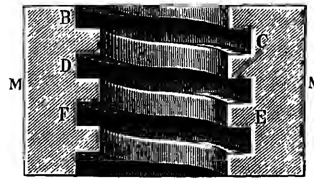


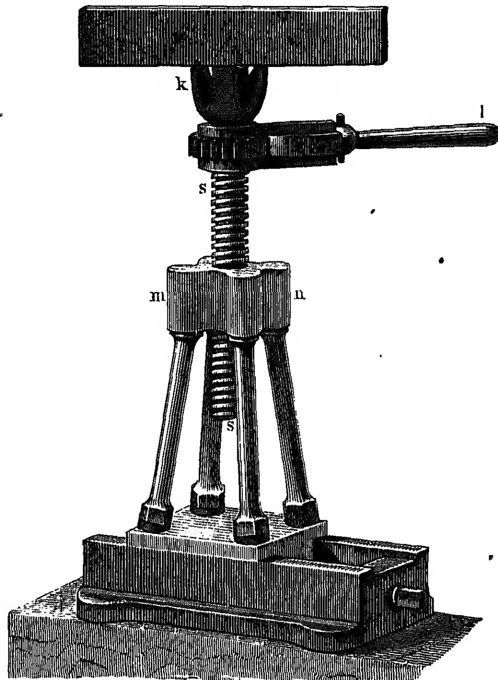
Fig. 274.



auf dieselbe Weise um den Zylinder geführt, so entsteht ein flaches Schraubengewinde; ein solches ist in Fig. 273 dargestellt.

Wir haben eben nur solche Schraubengewinde betrachtet, welche um einen soliden Zylinder herumgelegt sind; Schrauben, welche auf diese Weise gebildet sind, werden Schraubenspindeln genannt; werden aber die Gewinde auf dieselbe Weise im Innern eines hohlen Zylinders herumgeführt, so entsteht eine Schraubenmutter.

Fig. 275.



Eine Schraubenspindel ist für sich allein zur Hervorbringung mechanischer Effekte nicht zu gebrauchen; sie muß mit einer Schraubenmutter so verbunden sein, daß die Erhabenheiten der einen genau in die Vertiefungen der anderen passen. Fig. 274 stellt eine Schraubenmutter dar, welche zu der Schraubenspindel Fig. 273 paßt.

Die Schraubenwinde, Fig. 275, ist ganz besonders geeignet, um die Anwendung der Schraube zu erläutern. In der Mitte des durch vier eiserne Säulchen getragenen massiven Messingstückes *mn* ist die Schraubenmutter eingeschnitten, in welche die eiserne Schraubenspindel *ss* paßt. Sobald nun diese Schraubenspindel umgedreht wird, so wird sie bei jeder Umdrehung um die Höhe eines Schraubenganges auf oder nieder gehen, indem die Windungen der Schraubenspindel auf den Windungen der Schraubenmutter wie auf einer schiefen Ebene auf und nieder gleiten.

Wenn nun auf den Kopf *k*, mit welchem die Schraubenspindel oben endigt, irgend eine Last aufgelegt wird, so muß diese Last dadurch gehoben

werden, daß die Schraubenspindel in der entsprechenden Richtung umgedreht wird, und es ist klar, daß hier dieselben Prinzipien zur Anwendung kommen, als ob die Last auf einer schiefen Ebene hinaufgezogen werden sollte, welche ebenso stark gegen die Horizontale geneigt ist wie die Windungen der Schraube; es wird sich also für den Fall des Gleichgewichts die (am Umfange der Schraubenspindel angebrachte) Kraft zur Last verhalten wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange der Spindel, da man bei der geringen Steigung solcher Schrauben die Länge eines Schraubenganges ohne merklichen Fehler dem Schraubenumfange gleichsetzen kann.

Nehmen wir an, die Höhe eines Schraubenganges an der Winde, Fig. 275, sei ein Zehntel vom Umfange der Spindel ss, so könnte man (abgesehen von

Fig. 276.

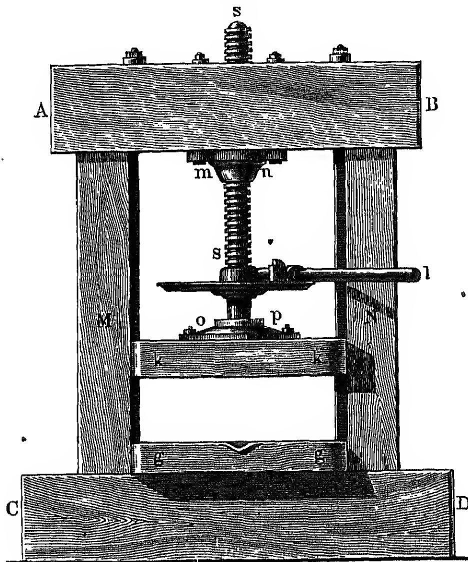


Fig. 277.

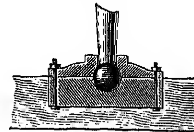
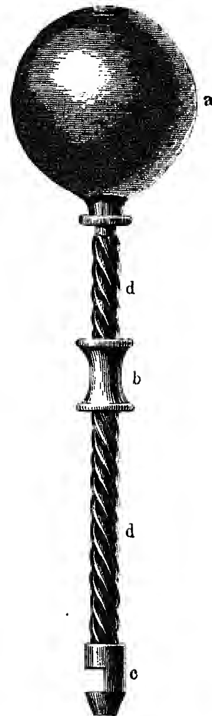


Fig. 278.



der Reibung) mit einer am Umfange dieser Spindel angebrachten Kraft von 1 kg eine auf der Schraube liegende Last von 10 kg heben. Um aber mit der Schraube einen größeren Effekt zu erreichen, wird die Kraft nicht direkt am Umfange der Spindel, sondern am Ende eines Hebelarmes l, Fig. 275, angebracht. Nehmen wir an, die Länge dieses Hebelarmes sei 10 mal so groß als der Radius der Spindel, so bestände also zwischen der am Ende des Hebels l angreifenden Kraft und der auf k liegenden Last das Verhältnis von 1 zu 100.

So gut wie man mit Hilfe einer Schraube eine Last zu heben imstande ist, kann man sie auch anwenden, um einen großen Druck auszuüben, und darauf gründet sich ihre Anwendung in der Schraubenpresse, Fig. 276. Die Schraubenspindel SS paßt in die metallene Schraubenmutter mn, welche in dem starken horizontalen Balken AB befestigt ist. AB ist mit CD durch

zwei starke vertikale Balken M und N verbunden. Die Drehung der Schraube wird mittels des Hebels l bewerkstelligt. — Der auf und nieder gehenden Bewegung der Schraube SS folgt die Preßplatte kk, ohne jedoch an der Drehung der Spindel teilzunehmen. Das untere Ende der Schraubenspindel steckt nämlich mittels eines Kugelgelenkes Fig. 277 in der auf der Preßplatte befestigten Metallplatte op, so daß sich also die Spindel ohne die Preßplatte drehen kann, welch letztere durch die Seitenpfosten M und N an einer Drehung gehindert wird. Der zu pressende Körper wird zwischen die Preßplatte kk und die Bodenplatte gg gelegt.

Wenn es gilt, mit Hilfe einer Schraubenwinde eine Last zu heben oder mit Hilfe einer Schraubenpresse einen starken Druck auszuüben, so kann man jedoch nie den nach den oben angedeuteten Prinzipien berechneten theoretischen Effekt erreichen, weil ein großer Teil der Kraft zur Überwindung der hier nicht unbedeutenden Reibungswiderstände erforderlich ist.

Auch zu anderen Zwecken als zur Hebung einer Last oder zur Ausübung eines großen Druckes wird die Schraube angewandt. Eine Schraube, welche in ihrer Längenrichtung nicht verschiebbar ist, wird eine bewegliche Schraubenmutter bei jeder Umdrehung um einen Schraubengang voranschieben; bei gleichförmiger Umdrehung der Schraube wird also auch die Mutter mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortgeschoben, und zwar um so langsamer, je feiner das Gewinde ist. Darauf beruht u. a. das gleichförmige Fortschieben des Supports an Drehbänken.

Da bei einigermaßen feinen Schraubengängen selbst einer ganzen Umdrehung des Schraubenkopfes nur ein sehr geringes Fortschieben entspricht, so benutzt man bei Meßinstrumenten eine feine Schraube zur genaueren Einstellung. Soll das Fortschieben mit besonderer Langsamkeit geschehen, so benutzt man die Differentialschraube (ein Zylinder mit zwei Schraubengewinden von wenig verschiedener Schraubenhöhe in entsprechenden Schraubenmuttern). Wir haben eine solche bei der Beschreibung des Kathetometers erwähnt. Ihre Wirksamkeit ist ganz analog der Differentialwelle.

Die Anwendung der Mikrometerschraube zum Messen und Teilen wurde in § 17, 19 und 23 besprochen.

Während bei der Seilmaschine und dem Hebel meist eine Umkehrung der Maschine in der Weise, daß man den Angriffspunkt der Kraft mit jenem der Last vertauscht, keiner Schwierigkeit begegnet, ist eine solche umgekehrte Anwendung bei der schiefen Ebene, insbesondere der Schraube wegen der großen Reibung in der Regel nicht möglich. Es ist dies nur dann ausführbar, wenn der Winkel der schiefen Ebene (die Neigung der Schraubenwindung) ziemlich groß oder die Reibung sehr gering ist.

Ein Beispiel für den ersteren Fall bildet der Drillbohrer, Fig. 278[1]), die Mutter b der steilen, mehrgängigen Schraube d wird auf- und abbewegt und bringt dadurch die Rotation des in c einzusetzenden Bohrers hervor.

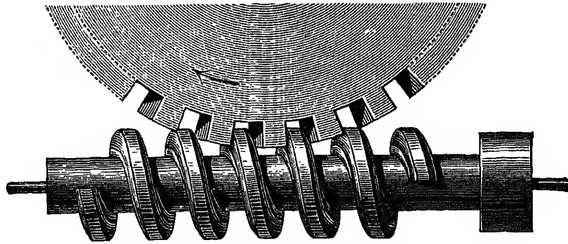
Ein Beispiel für die umgekehrte Anwendung des Keiles bei geringer Reibung wäre das Herausschnellen eines schlüpfrigen Apfelkernes zwischen den zusammengepreßten Fingern.

---

[1]) Entliehen aus Fricks Physik. Technik, sechste von O. Lehmann bearbeitete Auflage 1, 190.

Eine Kombination der Schraube mit dem Wellrade ist die sogenannte Schraube ohne Ende (Fig. 279), bei welcher die Schraubenmutter durch die Zähne des Rades gebildet wird. Ist die Schraube auch noch mit einer Kurbel (Hebel) versehen, so haben wir dann eine Kombination der drei Haupttypen Hebel, Schraube und Wellrad, welche häufig mit Vorteil angewandt wird. Ist L die Länge der Kurbel (des Hebels), l der Radius des

Fig. 279.



Schraubengewindes, u der Umfang, h die Höhe des letzteren, R der Radius des Wellrades, r der Radius der Welle, so ist das Übersetzungsverhältnis gegeben durch:

$$\frac{L}{l} \cdot \frac{u}{h} \cdot \frac{R}{r} = \frac{2 \pi L \cdot R}{h \cdot r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Der Kraftgewinn kann also sehr bedeutend werden.

§ 83. Die Kniepresse. Zum Schlusse wollen wir noch eine Maschine beschreiben, welche sich nicht ungezwungen in eine der drei Typen einreihen

Fig. 280.

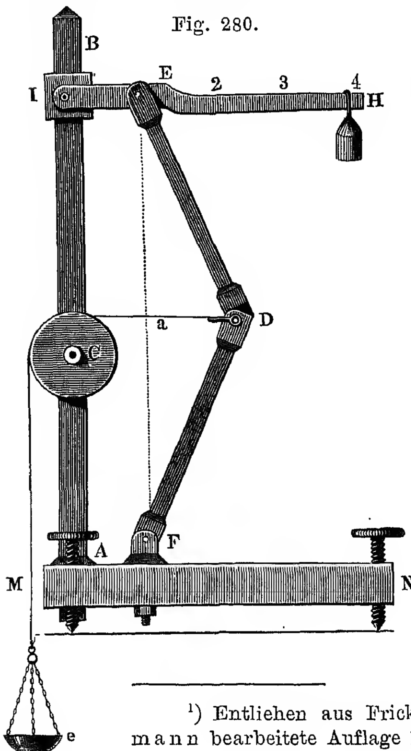


Fig. 281.

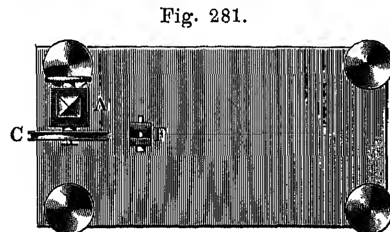
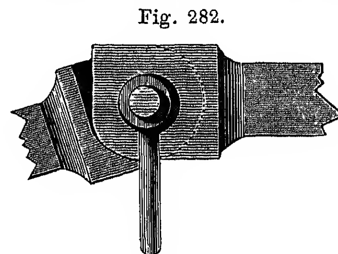


Fig. 282.



läßt. Es ist die Kniepresse, von welcher ein Modell in den Figuren 280 bis 282 [1]) abgebildet erscheint. An der auf dem Grundbrette MN befestigten prismatischen Säule AB

[1]) Entliehen aus Fricks Physik. Technik, sechste von O. Lehmann bearbeitete Auflage 1, 190.

(Fig. 280) lassen sich mittels Hülsen die fixe Rolle C und der Hebel IH in beliebiger Höhe fixieren. Sie seien wie in der Figur so gestellt, daß am Knie D der beiden Stangen ED und DF mittels der über die Rolle gehenden Schnur a und dem in der Wagschale e befindlichen Gewichte eine horizontale Kraft angebracht werden kann, während der Hebel IH auch nahe horizontal zu stehen kommt. Durch das Laufgewicht läßt sich dann der bei E entstehende vertikale Druck demonstrieren. Das Kniegelenk ist, wie Fig. 280 zeigt, so konstruiert, daß der Winkel EDF den Betrag von 180^0 nicht überschreiten kann.

Diese Maschine gehört zu jenen mit veränderlicher Übersetzung und hat eine gewisse theoretische Verwandtschaft mit der beweglichen Rolle, wenn man sich deren Seilstücke steif gemacht und statt auf Zug auf Schub eingerichtet denkt. Da einer ziemlich großen Verschiebung von D nur eine kleine Hebung von E entspricht, so muß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die auf E ausgeübte Kraft, insbesondere zuletzt, eine sehr bedeutende sein.

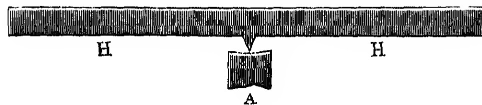
§ 84. Die konstruktiven Elemente der Maschinen. Die in den vorausgegangenen Paragraphen gegebene Darstellung der einfachen Maschinen ist durchaus keine erschöpfende und nur so weit durchgeführt, um das physikalische Prinzip der Maschinen klar zu stellen.

Wenn man die Maschinen nicht vom physikalischen, sondern vom technisch-konstruktiven Standpunkte aus untersucht, so gelangt man zur Einsicht, daß jede Maschine aus gewissen Elementen bestehe, welche stets paarweise vorkommen[1]).

Ein paar Beispiele werden dies sofort erkennen lassen.

Die Hebelmaschine besteht nicht bloß aus der Hebelstange HH (Fig. 283), sondern es gehört als wesentlicher Teil auch jener unterstützende Körper A

Fig. 283.



dazu, um den sich die Stange drehen kann. Beide zusammen bilden ein Elementenpaar.

Ebenso bildet die schiefe Ebene mit dem darauf gleitenden Körper, die Schraube mit der Schraubenmutter je ein Elementenpaar. Die fixe Rolle dagegen enthält schon zwei Elementenpaare, das erste Paar wird durch die feste Achse einerseits und durch den sie umschließenden Hohlzylinder andererseits gebildet. Das zweite Elementenpaar der Rolle besteht aus der Rinne am Umfange einerseits und dem Seile andererseits. Das zweite Element des ersten Paares (der Hohlzylinder) und das erste Element des zweiten Paares (die Rinne) sind miteinander durch die Scheibe der Rolle zu einem festen Stücke verbunden.

Eine derartige Verkettung von noch mehreren Elementenpaaren wird von Reuleaux eine kinematische Kette genannt.

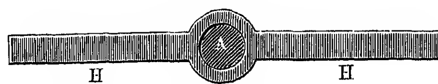
---

[1]) Reuleaux, Kinematik.

Die Elemente eines Elementenpaares haben sich gegenseitig als Führung zu dienen, indem sie sich vollständig oder unvollständig umhüllen. Hält man eines dieser Elemente fest, so wird dadurch das andere zugehörige Element veranlaßt, seine Bewegungen auf bestimmter vorgeschriebener Bahn auszuführen.

Diese Führung kann entweder eine solche sein, bei welcher das eine Element das andere zwingt, nur diese und keine andere Bewegung zu machen, wie z. B. die Schraubenmutter und die Schraubenspindel, ein Hebel von beistehend gezeichneter Konstruktion, dessen Achse rings umschlossen ist, Fig. 284; oder die Führung ist an sich keine vollständig zwingende, und es wird die Beihilfe einer Kraft erfordert, welche dafür sorgt, daß die nicht beabsichtigten Bewegungen nicht eintreten. So z. B. ist der in Fig. 283 ab-

Fig. 284.



gebildete Hebel nicht gezwungen, sich um die Schneide zu drehen, da er sich ja auch von der Unterlage weg bewegen könnte. Nur die Kraft, welche ihn gegen das Achsenlager andrückt, sorgt dafür, daß er nur die gewünschte Bewegung einhält.

Die Elementenpaare werden demnach in zwangsläufig verbundene oder selbständige und in kraftschlüssig verbundene oder unselbständige eingeteilt. Fig. 284 stellt ein ersteres, Fig. 283 ein letzteres dar.

Das kraftschlüssige Elementenpaar ist in gewisser Hinsicht weniger vollkommen als das zwangsläufige, und es geht das Betreben des Maschinenkonstrukteurs im allgemeinen dahin, kraftschlüssige Verbindungen zu vermeiden, und durch zwangsläufige zu ersetzen.

Daß dies aber nicht unbedingt in allen Fällen gilt, zeigt z. B. die Konstruktion der Wage, wo die kraftschlüssige Verbindung, Fig. 283, wegen ihrer geringeren Reibung der zwangsläufigen, Fig. 284, überlegen ist.

Es ist einleuchtend, daß man auf dem technisch-konstruktivischen Standpunkte, indem man von den Elementenpaaren ausgeht, zu einer ganz anderen Klassifikation der Maschinen gelangt, als jene ist, zu der wir oben vom physikalischen Standpunkte aus gelangt sind. So rechnet z. B. Reuleaux die fixe Rolle nicht zu den einfachen Maschinen, da sie bereits zwei Elementenpaare enthält. Bezüglich dieses Gegenstandes müssen wir auf das oben zitierte Buch von Reuleaux verweisen.

§ 85. Die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile. Unter einem Perpetuum mobile versteht man eine Maschine, welche sich nicht allein selbst im Gange zu erhalten, sondern auch noch einen Überschuß von Arbeitskraft nach außen abzugeben vermag. Daß eine solche Maschine unmöglich ist, dürfte nach den Erörterungen in den §§ 75 und 78 unschwer einzusehen sein. Würde man vom abzugebenden Überschuß absehen und gäbe es weder Reibung noch Luftwiderstand, dann wäre jedes Schwungrad und jedes Pendel ein Perpetuum mobile. Bei jeder Maschine, die wirklich existiert, ist es nicht zu vermeiden, daß ein Teil der übertragenen Energie zur Überwindung von Reibung und Widerstand verbraucht wird. Die an dem ersten Angriffspunkte

Wärme zuordnen, was unzweckmäßig wäre, da die letzteren mit den Lichterscheinungen viel näher zusammenhängen. Noch weniger lassen sich die magnetischen und elektrischen Erscheinungen in dieser Weise unterbringen, da sie alle Sinne beschäftigen.

Somit ist auch dieses Einteilungsprinzip hinfällig. Trotzdem ist die althergebrachte Einteilung in Mechanik, Akustik, Optik, Wärmelehre, Magnetismus und Elektrizität immer noch aus praktischen Gründen die beste. Was die Reihenfolge betrifft, so wäre zwar theoretisch die Optik besser zwischen die Wärmelehre und die Lehre von Magnetismus und Elektrizität zu stellen. Da aber Akustik und Optik durch die Wellenlehre zusammenhängen, so wollen wir die alte Anordnung beibehalten. Die strahlende Wärme wurde, in Abänderung des bisherigen Gebrauchs, der Optik und der größere Teil der molekularphysikalischen Erscheinungen der Wärmelehre angegliedert.

§ 7. **Physikalische Grundbegriffe.** Einen Begriff definieren heißt denselben auf einfachere bekannte Begriffe zurückführen. Jede Definition setzt also das Vorhandensein von einfacheren Begriffen voraus, deren Bekanntschaft selbst wieder durch weitere Definition ermittelt werden muß. Daraus ergibt sich, daß das immer weiter fortgesetzte Definieren oder Zurückführen auf noch einfachere Begriffe kein Ende finden könnte, wenn man nicht endlich bei gewissen Grundbegriffen stehen bleiben würde; sei es, weil man keine weitere Zerlegung in noch einfachere Begriffe aufzufinden vermag, oder daß man diese weitere Verfolgung aus anderen Gründen aufzugeben für zweckmäßig findet.

Auf solche Grundbegriffe werden wir auch in der Physik geführt. Es sind zunächst folgende: Raum, Zeit, Bewegung und Materie.

Raum. Wir können uns die Körper nicht anders als in einem Raume vorstellen, welcher drei Dimensionen (Erstreckungen) nach Länge, Breite und Höhe hat. Ob diesem Raume wirkliche Realität zukomme, oder ob er nur eine beschränkte Erkennungsweise unseres Geistes ist, ob der Raum auch mit mehr als drei Dimensionen oder von einer ganz abweichenden Beschaffenheit gedacht werden könne, das sind lauter spekulative Fragen, welche mit der Physik nichts zu tun haben.

Durch Abstraktion gelangen wir zur Vorstellung von Raumgebilden nur zweier oder nur einer Dimension. Die Körper selbst haben drei Dimensionen, die Grenzen der Körper, nämlich die Flächen, haben deren zwei, die Grenze der Fläche, die Linie, hat nur eine Dimension, die Grenze der Linie, der Punkt, hat keine Dimension.

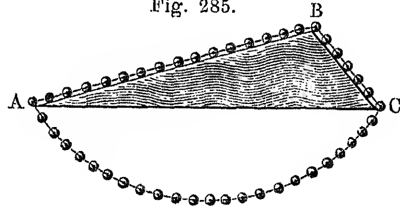
Die Lage eines Punktes im Raume kann vollständig bestimmt werden, wenn wenigstens drei andere, nicht in einer geraden Linie liegende Punkte bereits gegeben sind, deren Abstände von dem zu bestimmenden Punkte dann dessen Lage definieren. Meistens bestimmt man die Lage eines Punktes

aufgewendete Arbeit wird also bereits mit einem Verluste auf den zweiten Angriffspunkt übertragen; versucht man sie daher von diesem aus durch eine zweite Maschine wieder auf den ersten Angriffspunkt zurückzubringen, so ist bei diesem Kreisprozesse zweimal ein Verlust entstanden, der sich bei jeder neuen Hin- und Herübertragung wiederholt und deshalb nach einiger Zeit beide Maschinen zum Stillstande bringen muß. Da das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nur eine andere Formulierung des Satzes von der Konstanz der übertragenen mechanischen Energie ist, so erklärt sich, daß Leonardo da Vinci (1452—1519), der zuerst die allgemeine Gültigkeit jenes Prinzips sowie die Reibungsverluste kannte, auch zuerst die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile ausgesprochen hat.

Stevin (1548—1620), der Hauptbegründer der Statik, hat über diesen Punkt nicht nur vollständig richtig gedacht, sondern sogar die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile als ein selbstverständliches Axiom zugrunde gelegt, um aus demselben die Gesetze des Gleichgewichtes auf der schiefen Ebene abzuleiten.

Er denkt sich ein dreiseitiges Prisma ABC, Fig. 285, über welches eine leicht bewegliche Kette ohne Ende[1]), wie die Figur zeigt, gelegt ist. Wäre diese Kette nicht im Gleichgewichte, so müßte sie in Bewegung geraten; da sie dadurch immer in derselben Anordnung bleiben würde, so müßte die Ursache zur Bewegung immer fortdauern.

Fig. 285.



Da es aber undenkbar sei, daß die Kette sich fort und fort in derselben Richtung in Bewegung erhalte, so müßte sie im Gleichgewichte sein. Da nun der untere frei hängende Teil, der aus zwei symmetrischen Hälften besteht, für sich im Gleichgewichte sein muß, so muß es auch der obere aufliegende Teil für sich sein. Dieser Teil besteht aus den zwei Stücken AB und BC, deren Massen sich verhalten wie die Längen der schiefen Ebenen, auf denen sie ruhen. Sollen diese Stücke trotz ihrer ungleichen Massen dennoch gegeneinander im Gleichgewichte stehen, so müssen sich die Zugkräfte gleicher Massen längs der schiefen Ebenen umgekehrt verhalten wie die Längen der letzteren. Dies muß auch dann noch gelten, wenn die schiefe Ebene BC allmählich immer steiler und endlich senkrecht gerichtet wird. Es verhält sich dann die Zugkraft einer Masse längs einer schiefen Ebene zur Zugkraft der frei hängenden Masse wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge. Stevin gelangte so zu denselben Sätzen, die wir in § 48 mitgeteilt haben.

Nicht immer liegen die Verhältnisse so einfach und unmittelbar erkennbar vor Augen; aber auch bei komplizierten Maschinen bedarf es nur der konsequenten Anwendung der an den einfachen Maschinen erkannten Prinzipien, um einzusehen, daß ein Perpetuum mobile unmöglich sei.

§ 86. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment. Im § 61 haben wir das Gleichgewicht der Kräfte bei einem Körper,

[1]) Stevin dachte sich eine Reihe in gleichen Abständen befindlicher Kugeln.

der sich um eine Achse drehen läßt, untersucht. Wir haben jetzt noch zu ermitteln, welchen Einfluß die Masse und ihre Verteilung auf die Wirkung der drehenden Kräfte ausübt.

Wie bei der geradlinigen Bewegung, so wird auch bei der drehenden Bewegung durch eine sogenannte Momentankraft eine konstante Geschwindigkeit, durch eine konstante Kraft eine Beschleunigung hervorgebracht.

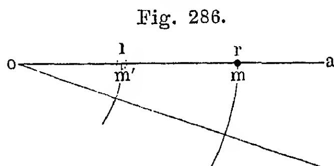
Die Geschwindigkeit der Drehung oder die Winkelgeschwindigkeit wird durch den Winkel φ gemessen, um welchen sich der Körper in der Zeiteinheit dreht. Man pflegt denselben nicht durch Grade, sondern durch die Länge des Bogens am Radius 1 auszudrücken, wobei der Radius selbst als Längeneinheit dient (d. h. man wählt den Winkel von $57^0\,14'\,45''$ zur Einheit).

Ein Punkt, welcher um r von der Achse absteht, legt demnach in der Zeiteinheit einen Weg $= r\varphi$ zurück (periphere Geschwindigkeit). Man kann demnach auch sagen, die Winkelgeschwindigkeit ist gleich der peripheren Geschwindigkeit für den Radius 1.

Die Winkelbeschleunigung ϑ ist die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit φ in der Zeiteinheit. Ein im Abstande r von der Achse befindlicher Punkt hat dann die periphere Beschleunigung $= r\vartheta$.

Es sei oa (Fig. 286) eine gewichtslose starre Menge, welche sich um die Achse o drehen läßt. Im Abstande r von der Achse werde eine Masse m angebracht, welche, durch eine konstante Kraft p stets in der Richtung der Tangente angetrieben, im Kreise bewegt wird. Es entsteht hierdurch eine Drehung mit der Winkelbeschleunigung ϑ.

Fig. 286.



Es soll nun berechnet werden, welche andere Masse m' (anstatt der Masse m), im Abstande 1 von der Achse angebracht, durch dieselbe im Abstande r wirksame Kraft p die gleiche Winkelbeschleunigung ϑ erfahren würde. Im ersten Falle legt die Masse m in der Zeit t den Weg

$$s = \frac{r\vartheta}{2}\,t^2 = \frac{p}{2\,m}\,t^2 \text{ }^{1)}$$

zurück, woraus folgt:

$$m = \frac{p}{2\,s}\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Im zweiten Falle legt die Masse m' in derselben Zeit t den Weg

$$s' = \frac{\vartheta}{2}\,t^2 = \frac{p'}{2\,m'}\,t^2$$

zurück, wobei p' die der Kraft p in r äquivalente im Abstande 1 angreifende Kraft ist. Daraus folgt:

$$m' = \frac{p'}{2\,s'}\,t^2.$$

Nun ist aber offenbar $s' = \frac{s}{r}$, $p' = p\,r$, folglich

$$m' = \frac{p\,r^2}{2\,s}\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

---

[1]) Beschleunigung $r\vartheta = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{p}{m}$; siehe § 41.

Aus (1) und (2) folgt dann

$$m' = m r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Das Produkt $m r^2$ aus der Masse mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse heißt das Trägheitsmoment dieser Masse in bezug auf diese Drehachse.

Besteht ein Körper aus einer Anzahl von Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$, welche um die Abstände $r, r_2 \ldots r_n$ von der Drehachse entfernt sind, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf diese Achse gegeben durch:

$$K = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \Sigma\, m r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bezeichnen wir mit $p_1, p_2 \ldots p_n$ die einzelnen Kräfte, welche auf diese Massen in der tangentialen Richtung einwirken, und mit $\dot{\vartheta}$ wieder die gemeinsame Winkelbeschleunigung, welche sie hervorrufen, so gilt

$$p_1 = m_1 r_1 \dot{\vartheta}, \quad p_2 = m_2 r_2 \dot{\vartheta} \ldots, \quad p_n = m_n r_n \dot{\vartheta}.$$

Alle diese Kräfte sind ersetzbar durch eine im Abstande 1 wirkende Kraft:

$$P = \dot{\vartheta}\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2) = \dot{\vartheta}\, \Sigma m r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

welche das resultierende Drehungsmoment vorstellt. Daraus folgt:

$$\dot{\vartheta} = \frac{P}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

d. h. die Winkelbeschleunigung ist gleich dem Drehungsmoment, dividiert durch das Trägheitsmoment.

Wären die angreifenden Kräfte Momentankräfte gewesen, so wäre an die Stelle $\dot{\vartheta}$ in dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit φ getreten.

Das Trägheitsmoment eines Körpers gilt, so wie das Drehungsmoment, immer nur in bezug auf eine bestimmte Achse (oder, wie wir sehen werden, für eine bestimmte Reihe paralleler Achsen). Verschiebt man die Achse, so wird das Trägheitsmoment im allgemeinen ein anderes.

Fig. 287.

In dieser Beziehung läßt sich nun ein wichtiger und oft verwendbarer Satz ableiten, welcher lautet:

Ist K das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse, so ist das Trägheitsmoment für eine dazu im Abstande a parallel liegende Achse gegeben durch:

$$K' = K + a^2 M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Beweis: Es sei in Fig. 287 M ein Durchschnitt des Körpers durch seinen Schwerpunkt O. Die Drehungsachse, für welche das Trägheitsmoment gleich K ist, gehe senkrecht auf diesen Durchschnitt durch den Schwerpunkt, die neue Drehungsachse sei um den Abstand $O\,O' = a$ in der Richtung gegen x verschoben. Beachten wir irgend einen materiellen Punkt m, dessen Masse $= m$, dessen Koordinaten mit Bezug auf ein durch O gelegtes rechtwinkeliges Koordinatensystem $x = o\,x$, $y = m\,x$ seien. Die Entfernung Om

sei $= r$, $O'm = r'$. Das Trägheitsmoment dieses Punktes in bezug auf die durch O gehende Achse ist:

$$k = m r^2.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die durch O' gehende Achse ist dann:

$$k' = m r'^2 = m[(x - a)^2 + y^2]$$
$$= m(x^2 + y^2) - 2max + ma^2,$$

da $x^2 + y^2 = r^2$, so ist das Trägheitsmoment in bezug auf die eine Achse durch O' für den Punkt m:

$$k = mr^2 - 2max + ma^2;$$

analog findet man für einen zweiten Punkt m_1

$$k_1 = m_1 r_1^2 - 2m_1 a x_1 + m_1 a^2,$$

ebenso für einen dritten Punkt m_2

$$k_2 = m_2 r_2^2 - 2m_2 a x_2 + m_2 a^2 \text{ usf.}$$

Denkt man sich so die Trägheitsmomente aller materiellen Punkte des Körpers von der Masse $M = m + m_1 + m_2 + \cdots$ gebildet und summiert, so erhält man das Trägheitsmoment für die ganze Masse M:

$$K' = K - 2a\Sigma mx + Ma^2.$$

Der Ausdruck Σmx, d. h. die Summe aller Produkte aus den einzelnen Massenteilchen mit ihren Abständen vom Schwerpunkte O, ist aber, seiner Definition gemäß, = Null. Folglich erhält man, wie zu beweisen war:

$$K' = K + a^2 M.$$

Daraus folgt, daß für alle Achsen, welche unter sich parallel im gleichen Abstande vom Schwerpunkte liegen, das Trägheitsmoment gleich groß ist.

§ 87. Berechnung des Trägheitsmomentes. Um das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine gewisse Drehachse, durch Rechnung zu bestimmen, muß man sich denselben in lauter kleine Teilchen zerlegt denken und für jedes Teilchen das Trägheitsmoment berechnen, indem man die Masse desselben mit dem Quadrat seiner Entfernung von der Drehachse multipliziert; die Summe aller einzelnen so berechneten Trägheitsmomente ist das Trägheitsmoment des Körpers. Eine derartige Berechnung läßt sich ohne große Schwierigkeiten ausführen, wenn es sich um homogene Körper von einfachen Formen handelt.

Es sei z. B. das Trägheitsmoment eines Stabes AB, Fig. 288, zu berechnen, dessen Länge sehr groß ist im Vergleich zu seinem Querschnitt, und dessen

Fig. 288.



Umdrehungsachse an dem einen Ende desselben bei A liegt. Denken wir uns den Stab durch Querschnitte in eine große Zahl dünner Blättchen zerlegt, deren jedes die Dicke δ hat, so ist die Masse eines solchen Blättchens:

$$\frac{M}{L}\delta,$$

wenn M die Masse und L die Länge des ganzen Stabes bedeuten. — Bezeichnen wir ferner mit a, b, c, d usw. den Abstand des ersten, zweiten, dritten, vierten usw. Blättchens, so ist offenbar das Trägheitsmoment des ganzen Stabes:

$$K = \frac{M}{L}\left\{ a^2\delta + b^2\delta + c^2\delta + d^2\delta + \cdots \right\}$$

Nun aber ist $b = a + \delta$, $c = b + \delta$, $d = c + \delta$ usw., es ist also auch:

$$b^3 = a^3 + 3\,a^2\delta + 3\,a\delta^2 + \delta^3$$
$$c^3 = b^3 + 3\,b^2\delta + 3\,b\delta^2 + \delta^3$$
$$d^3 = c^3 + 3\,c^2\delta + 3\,c\,\delta^3 + \delta^3 \quad \text{usw.}$$

Wir können δ beliebig klein annehmen; nehmen wir es so klein an, daß diejenigen Glieder, welche den Faktor δ^2 bzw. δ^3 enthalten, als verschwindend klein gegenüber den dritten Potenzen von a, b, c, d usw. angesehen werden dürfen, so ergibt sich:

$$a^2\delta = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$b^2\delta = \frac{c^3 - b^3}{3}$$

$$c^2\delta = \frac{d^3 - c^3}{3} \quad \text{usw.}$$

Es ist also:

$$K = \frac{M}{L}\left\{\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{c^3 - b^3}{3} + \frac{d^3 - c^3}{3} + \cdots \frac{y^3 - x^3}{3} + \frac{z^3 - y^3}{3}\right\}$$

wenn mit x, y und z der Abstand der letzten Blättchen bezeichnet wird. Die ganze unter der Klammer stehende Summe reduziert sich aber auf $\frac{z^3 - a^3}{3}$. Da aber $z = L$ ist und a wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden kann, so ergibt sich:

$$K = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d. h. in Worten: *Das Trägheitsmoment eines Stabes, dessen einer Endpunkt die Umdrehungsachse bildet, ist dasselbe, als ob der ganze Stab gewichtslos und an seinem anderen Ende eine Masse vereinigt wäre, welche ein Drittel von der Masse des gegebenen Stabes beträgt.*

Danach läßt sich nun leicht auch das Trägheitsmoment eines um seinen Mittelpunkt C, Fig. 289, rotierenden oder oszillierenden Stabes AB ableiten;

Fig. 289.



denn wenn m und l die Masse und die Länge von jeder der Hälften AC und BC bezeichnen, so ist das Trägheitsmoment von jeder dieser Hälften $\frac{ml^2}{3}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen Stabes $^2/_3\,ml^2$. Bezeichnet man

aber mit L die Gesamtlänge, mit M die Gesamtmasse des Stabes, so ist m

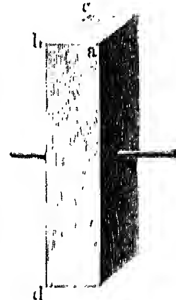
und $l = \frac{L}{2}$, und wenn man diese Werte für l und m substituiert, so

sich für das gesuchte Trägheitsmoment der Wert:

$$K = \frac{M \cdot L^2}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das Trägheitsmoment eines prismatischen rektangulären Stabes, Fig welcher um eine durch seinen Schwerpunkt gelegte, mit der Kante a allele Achse rotiert oder oszilliert, ist:

Fig. 290.



$$K = \frac{L^2 + B^2}{12} \cdot M \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wenn L und B die Länge der Kanten bd und b zeichnen, welche nicht mit der Umdrehungsachse paralle

Die Formel 3) geht in Gleichung 2) über, wenn B klein ist im Vergleich zu L.

Aus Betrachtungen, welche den oben durchgeführte lich sind, ergibt sich, daß das Trägheitsmoment homogenen kreisförmigen Scheibe, welche um Mittelpunkt rotiert,

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

ist, wenn M die Masse und R den Halbmesser der Scheibe bezeichnet.

Dieselbe Formel gilt für das Trägheitsmoment eines Kreissektors, das eines homogenen Zylinders in bezug auf seine Längsachse.

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders vom inneren Radius dem äußeren Radius R, bezogen auf seine Achse, ist

$$K = \frac{M}{2}(r^2 + R^2) \quad . \quad . \quad .$$

bezogen auf eine zur Achse senkrechte Mittellinie (wenn L die Hoh Zylinders):

$$K = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{r^2 + R^2}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Endlich das Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius r

$$K = \frac{2}{5} M r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das Trägheitsmoment eines abgestumpften Kegels, dessen ober untere Grenzfläche die Radien r und R haben in bezug auf die geomet Achse des Kegels ist

$$K = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Hieraus folgt, indem man $r = 0$ setzt, das Trägheitsmoment vollen Kegels:

$$K = \frac{3}{10} M R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

für einen vollen Kegel von der Höhe H und einem Radius der Grund

$= R$, dessen Drehungsachse durch die Spitze senkrecht auf die geometrische Achse hindurchgeht:

$$K = {}^3/_5\ M\left(\frac{R^2}{4} + H^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Aus dem Satze 7) § 86 folgt dann für das Trägheitsmoment eines homogenen Vollkegels in bezug auf eine zur Basis parallele Drehachse, die durch seinen Schwerpunkt, der $^3/_4\,H$ von der Spitze entfernt liegt:

$$K = {}^3/_5\ M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{16}\right) \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

§ 88. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes rotierender Körper. Bei Körpern von komplizierter Gestalt ist die Berechnung des Trägheitsmomentes ohne Integralrechnung nicht ausführbar, und wenn dieselben mehr oder weniger unregelmäßig gestaltet sind, ganz unmöglich; in solchen Fällen aber kann man das gesuchte Trägheitsmoment auf experimentellem Wege bestimmen. Zu diesem Zwecke braucht man nur den fraglichen Körper durch eine beschleunigende Kraft von bekannter Größe in Rotation zu versetzen und die Geschwindigkeit zu beobachten, welche er in einer gegebenen Zeit erlangt.

Ein erläuterndes Beispiel bildet die Ausmittelung des Trägheitsmomentes des Rades einer Atwoodschen Fallmaschine. Wir haben schon am Schlusse des § 44 auf diese Aufgabe hingewiesen.

Angenommen, die beiden Fadenenden seien je mit der Masse M belastet und ein Übergewichtchen von der Masse m bewirke, daß die Fallbeschleunigung γ betrage.

Die treibende Kraft beträgt dann mg, wenn g die Acceleration beim freien Falle bedeutet. Das gesamte Trägheitsmoment inklusive der angehängten Massen $2\,M + m$ beträgt dann $2\,M + m + K$, wenn K das Trägheitsmoment des Rades allein bedeutet. Es ist daher:

$$\gamma = \frac{m\,g}{2 \cdot M + m + K},$$

woraus

$$K = m\,\frac{g}{\gamma} - (2\,M + m).$$

Wären z. B. die Massen $M = 100$, $m = 4$ g, die beobachtete Acceleration gleich 9,8 cm, so ergäbe sich

$$2\,M + m + K = 400$$
$$K = 400 - 204 = 196 \text{ g}.$$

Kurz hat einen Apparat, Fig. 291 und 292, angegeben, um das Gesetz des Trägheitsmomentes experimentell zu bestätigen. Eine hölzerne Rolle hat drei Rinnen $a\,a$ und $b\,b$, deren jede 90 mm, und $c\,c$, welche 45 mm Halbmesser hat. In der Rinne a ist eine Schnur befestigt, welche ein Übergewicht von 50 g trägt, während eine über b geschlungene Schnur zwei Gewichte von je $^1/_2$ kg oder eine über c geschlungene Schnur zwei Gewichte von je 2 kg trägt. Die Rolle läuft zwischen Stahlspitzen, deren gußeiserne Träger mittels einer eisernen Platte auf dem Gipfel einer hölzernen Säule (etwa der Säule einer Atwoodschen Fallmaschine) aufgeschraubt sind.

Das Übergewicht p von 50 g durchläuft den Fallraum von 185 cm in sechs Halbsekunden, wenn über die Rinne b eine Schnur geschlungen ist,

Fig. 291.

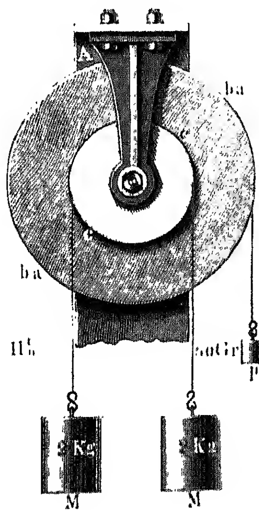
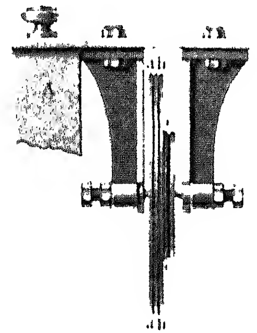


Fig. 292.



welche auf jeder Seite ½ kg trägt, während das Übergewicht p den gleichen Weg in sieben Halbsekunden zurücklegt, wenn über die Rinne c eine Schnur geschlungen ist, welche auf jeder Seite ein Gewicht von 2 kg trägt. — Daß im letzteren Falle die Fallzeit um eine Halbsekunde länger ist, rührt daher, daß im letzteren Falle die Reibung an den Spitzen größer und die Masse des hölzernen Rades nicht verschwindend klein gegen die übrigen Massen ist.

§ 89. Rollen über die schiefe Ebene. Die im § 48 abgeleiteten Gesetze des Falles über die schiefe Ebene gelten bezüglich der absoluten Werte der erreichten Geschwindigkeiten und der Beschleunigung nur unter der Annahme, daß der fallende Körper keine Rotationsbewegung annehme, also nur (ohne Reibung) gleite. Wir wollen jetzt annehmen, daß der Körper ohne zu gleiten auf der schiefen Ebene rolle.

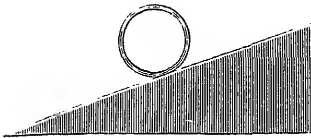
Ist der rollende Körper ein Hohlzylinder (Fig. 293) von geringer Wandstärke, so können wir annehmen, daß seine ganze Masse sich im Abstande r, gleich dem Radius des Zylinders, von der Achse befinde. Diese Masse erhält dann beim Rollen gleichzeitig eine fortschreitende Geschwindigkeit längs der schiefen Ebene und eine Rotationsgeschwindigkeit um die Achse. Wir wollen die nach Zurücklegung einer Strecke der schiefen Ebene erlangte Endgeschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung mit v, jene der rotierenden Bewegung mit u bezeichnen. Die Fallhöhe sei h. Die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Masse m des Körpers auf die Höhe h zu heben, ist gegeben durch $m g h$. Die lebendigen Kräfte nach dem Hinabrollen sind

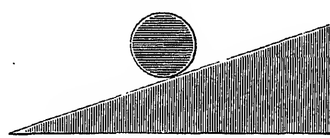
$$\frac{m v^2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{m u^2}{2}.$$

Es muß nun die Gleichung gelten:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m u^2}{2} = m g h.$$

Offenbar ist aber $u = v$; man braucht sich nur vorzustellen, daß der rollende Körper stehen bleibe und statt dessen die schiefe Ebene unter ihm


Fig. 293.

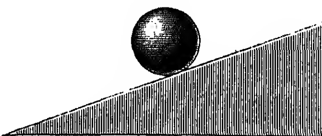

Fig. 294.

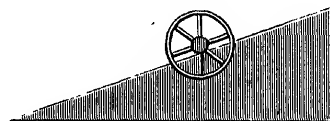
aufwärts bewegt werde. Hierdurch wird seine rotierende Bewegung ohne die fortschreitende erhalten. Jeder Punkt der Mantelfläche beschreibt dann einen gleich langen Bogen wie die Länge der darunter hinweggehenden Strecke der schiefen Ebene. Es muß also $u = v$ sein, und man erhält:

$$v^2 = g\,h$$
$$v = \sqrt{g\,h}.$$

Da nun beim Falle ohne Rotieren $v = \sqrt{2\,g\,h}$ gefunden wird, so folgt, daß der rollende Hohlzylinder sich mit nur halb so großer Beschleunigung über die schiefe Ebene bewege als ein ohne Reibung gleitender Körper[1]). Der absolute Wert der Beschleunigung ist also $\frac{g \sin \alpha}{2}$, wenn α der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist.

Nehmen wir jetzt statt des Hohlzylinders einen Vollzylinder (Fig. 294) von gleichem Radius r. Aus § 87 wissen wir, daß das Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf seine Achse $= \frac{m\,r^2}{2}$ ist. Das heißt mit anderen Worten, ein Vollzylinder vom Radius r verhält sich einer beschleunigenden Kraft, die ihn zu drehen sucht, gegenüber ebenso, als wäre seine halbe Masse


Fig. 295.


Fig. 296.

im Abstande r angebracht; er verhält sich also ebenso wie der früher betrachtete Hohlzylinder, wenn derselbe die Masse $\frac{m}{2}$ besitzen würde. Die Gleichung für die lebendigen Kräfte lautet demnach:

$$\frac{m\,v^2}{2} + \frac{m\,v^2}{4} = m\,g\,h,$$

woraus:

$${}^3/_4\,v^2 = g\,h$$
$$v = \sqrt{{}^4/_3\,g\,h}.$$

Die Beschleunigung des über die schiefe Ebene rollenden Vollzylinders verhält sich demnach zu jener beim Falle ohne Rollen wie ${}^4/_3\,g : 2\,g$, sie ist also nur ${}^2/_3$ so groß wie diese. Ihr absoluter Wert ist also ${}^2/_3\,g \sin \alpha$.

---

[1]) Mit Rücksicht auf Gleichung (6) S. 105 $\varphi = \frac{v^2}{2\,s}$ und $s = \frac{h}{\sin \alpha}$.

Für eine homogene Vollkugel (Fig. 295) vom Radius r ist das T
heitsmoment in bezug auf einen Durchmesser als Achse gegeben durch:

$$\frac{2}{5} m r^2.$$

Für die Kugel gilt demnach:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{\frac{2}{5} m v^2}{2} = m g h$$

$$\frac{7}{10} v^2 = g h$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g h}.$$

Die Beschleunigung, welche eine über die schiefe Ebene rollende K
erhält, ist demnach zu jener Beschleunigung, welche ein ohne Reibung gl
der Körper erhält, im Verhältnis $\frac{10}{7} : 2$ stehend, also nur gleich $\frac{5}{7}$ vo
letzteren. Der absolute Wert der Beschleunigung ist also $\frac{5}{7} g \sin \alpha$.

Setzen wir demnach die Beschleunigung des ohne Reibung gleite
Körpers gleich 1, so ergibt sich folgende Reihe:

Beschleunigung eines gleitenden Körpers	. . . .	$= 1$
„ einer rollenden Kugel	. . . .	$= \frac{5}{7}$
„ eines rollenden Vollzylinders	. . . . .	$= \frac{2}{3}$
„ „ „ Hohlzylinders	. . . . . .	$= \frac{1}{2}$.

Wollten wir die Beschleunigung noch weiter verringern, so müßten
den Versuch so einrichten, daß die Geschwindigkeit der Rotationsbewe
der Masse größer wird.

Wenn wir z. B. ein schweres Rad, Fig. 296, vom Radius R und
Masse m durch Speichen ohne Masse an die Welle vom Radius r, die
uns ebenfalls ohne Masse vorstellen, befestigt denken und die Welle übe
schiefe Ebene rollen lassen, so daß das Rad sich frei umdrehen kann
erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m\left(v \frac{R}{r}\right)^2}{2} = m g h,$$

woraus:

$$v = \sqrt{2 g h \cdot \frac{r^2}{R^2 + r^2}}$$

folgt. Man sieht sofort, daß durch Vergrößerung von R gegenüber r die
schleunigung beliebig weit verkleinert werden kann.

Wollte man in entgegengesetzter Weise einen Körper konstruieren
möglichst schnell über eine schiefe Ebene rollt, so müßte man ihm
großen Umfang geben, aber möglichst alle Masse in der Achse konzentri
Ein Korkzylinder, durch dessen Achse ein dünner Bleizylinder gesteckt
würde sich dieser Bedingung nähern.

Ein gleitender Körper, dessen Geschwindigkeit durch die Reibung
vermindert würde, wäre durch einen auf möglichst leichte Friktionsr
gesetzten Körper zu ersetzen.

rechtwinklig schneidenden Ebenen (Koordinatensystem des Cartesius).

Man muß sich gegenwärtig halten, daß jede solche Ortsbestimmung nur eine relative ist, nämlich nur Bezug hat auf die Nachbarpunkte oder die gewählten Koordinatenachsen. Eine absolute Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume ist unmöglich, weil sich kein Teil des Raumes von einem anderen Teile irgendwie unterscheidet und überhaupt der Raumbegriff erst durch Anwesenheit von Bezugspunkten möglich wird.

Zeit. Der zweite uns unentbehrliche Grundbegriff ist die Zeit; sie ist ebenso schwer definierbar als der Raum. Wir können nicht anders als uns vorstellen, daß die Veränderungen der Körper und alle in uns durch sie hervorgerufenen Sinneswahrnehmungen durch ein dazwischenliegendes, nach nur einer Dimension sich erstreckendes Etwas voneinander getrennt seien, was wir eben die Zeit nennen. Sie erstreckt sich in der einen Richtung von Vergangenheit zur Zukunft.

Wie es keine absolute Raumbestimmung gibt, so gibt es auch keine absolute Zeitbestimmung, denn so wie die Orte im Raume nur durch die daselbst anwesenden Körper, auf die wir uns beziehen, angebbar sind, so sind Zeitpunkte nur angebbar in bezug auf Ereignisse, welche die Zeiträume begrenzen.

Auf die Vergleichung von Zeiträumen werden wir an späterer Stelle zurückkommen.

Bewegung. Wenn ein Punkt innerhalb einer Zeitdauer seine Lage im Raume kontinuierlich ändert, so sagt man, er sei in Bewegung. Ändert er seine Lage nicht, so sagt man, er sei in Ruhe.

Man hat zu unterscheiden zwischen absoluter Bewegung (absoluter Ruhe) und relativer Bewegung (relativer Ruhe). Eine einfache Überlegung lehrt uns, daß wir nur die relative Bewegung oder Ruhe eines Punktes zu erkennen imstande sind. Gäbe es nur einen Punkt im sonst absolut leeren Raume, so könnte man eine Bewegung desselben weder erkennen, noch hätte es überhaupt einen Sinn, von einer solchen zu sprechen. Ebensowenig könnte man behaupten, daß er in Ruhe sei, weil der Begriff Ruhe fehlt, wo es keinen Gegensatz zu demselben geben kann.

Das Gesagte gilt auch von der fortschreitenden Bewegung eines Systems von Punkten oder eines Körpers. So oft wir daher in der Physik von fortschreitender Bewegung sprechen, meinen wir immer nur relative Bewegung in bezug auf andere Körper. Wenn eine große Eisscholle mit einer gewissen Geschwindigkeit einen Strom abwärts getragen wird und ein Mensch auf dieser Scholle mit derselben Geschwindigkeit stromaufwärts geht, so bleibt er über demselben Punkte des Strombettes. Er ist in relativer Bewegung in bezug auf die Eisscholle und zugleich in relativer Ruhe in bezug auf das Strombett oder die Ufer.

Dieses Beispiel läßt zugleich einsehen, daß die relativ fortschreitende Bewegung stets gegenseitig ist. Man kann ebensogut sagen: „der Mensch geht über die Scholle" als: „die Scholle bewegt sich unter dem Menschen hindurch". Sie bewegen sich eben beide gegeneinander. In absoluter Ruhe sind weder Scholle noch Mensch, denn sie nehmen beide an der Rotation der Erde um ihre Achse und ihrer Bewegung um die Sonne teil.

Es ist sehr leicht, sich durch ein Experiment von der Richtigkeit dieser Resultate über die Reihenfolge der Geschwindigkeiten zu überzeugen. Man braucht nur über eine schiefe Ebene gleichzeitig eine Kugel, einen Zylinder und einen Reif rollen zu lassen. Die erste geht voraus, der letzte bleibt zurück.

§ 90. Der Schwingungspunkt des physischen Pendels, reduzierte Pendellänge. Die im § 56 entwickelte Formel für die Schwingungsdauer eines Pendels gilt nur für ein einfaches (mathematisches) Pendel. Sie gilt nicht mehr für ein zusammengesetztes (physisches) Pendel, wie sich leicht einsehen läßt, wenn man bedenkt, daß die dem Aufhängepunkte näheren Massen für sich allein eine kürzere Schwingungsdauer haben würden und daher auf die Schwingungen der weiter entfernten beschleunigend einwirken müssen. Umgekehrt wirken die weiter vom Aufhängepunkt entfernten Massen verzögernd auf die näher liegenden. Es muß demnach an jedem zusammengesetzten Pendel möglich sein, einen Punkt zu finden, welcher durch die übrige Masse des Pendels weder beschleunigt noch verzögert wird, d. h. welcher gerade so schnell schwingt, wie wenn er, allein vorhanden, ein einfaches Pendel bilden würde, dessen Länge gleich dem Abstande dieses Punktes vom Aufhängepunkte wäre.

Diesen Punkt nennt man den Schwingungsmittelpunkt oder kürzer Schwingungspunkt (Centrum oscillationis). Er fällt durchaus nicht, wie man auf den ersten Blick meinen möchte, mit dem Schwerpunkt zusammen.

Den Abstand dieses Schwingungspunktes vom Aufhängepunkt heißt man die reduzierte Pendellänge. Es ist dies die Länge eines einfachen (mathematischen) Pendels von gleicher Schwingungsdauer mit dem physischen Pendel.

Diese reduzierte Pendellänge soll nun berechnet werden.

Nach Formel 6, § 86, ist die Winkelbeschleunigung, welche ein um eine Achse drehbarer Körper, also auch ein physisches Pendel erfährt, gleich

$$\vartheta = \frac{P}{K},$$

worin P das Drehungsmoment, K das Trägheitsmoment $= \Sigma m r^2$ bedeuten.

Bei einem mathematischen Pendel von der Länge l und der Masse m ist das Drehungsmoment für den Ausschlagwinkel α gleich $m g l . \sin \alpha$, das Trägheitsmoment $= m l^2$, somit

$$\vartheta = \frac{m g l . \sin \alpha}{m l^2} = \frac{g . \sin \alpha}{l}.$$

Für die Schwingungsdauer t bei kleinen Amplituden ist nach § 56 (1):

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\vartheta}} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Bei einem physischen Pendel, bestehend aus den Massen $m_1, m_2, \ldots . m_n$ in den Abständen $r_1, r_2, \ldots . m_n$, ist das Drehungsmoment für den Ausschlagswinkel $\alpha = g \Sigma m r \sin \alpha$, das Trägheitsmoment $= \Sigma m r^2$, folglich die Winkelbeschleunigung

$$\vartheta_1 = g \cdot \frac{\Sigma m r . \sin \alpha}{\Sigma m r^2},$$

folglich $\frac{\sin\alpha}{\vartheta_1} = \frac{\Sigma m r}{g \Sigma m r}$, mithin in Analogie mit Formel 1) die Schwingungsdauer für kleine Amplituden

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m r}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, daß $t_1 = t$, wenn

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Dies ist also der Ausdruck für die reduzierte Pendellänge.

Der Zähler $\Sigma m r^2$ ist das Trägheitsmoment des physischen Pendels K, der Nenner $\Sigma m r$, die Summe der Produkte der Massen mit ihren Abständen vom Drehpunkte, kann ersetzt werden durch ML, wenn M die Gesamtmasse und L den Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkte bedeuten.

Wir können also auch schreiben:

$$l = \frac{K}{ML} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Multiplizieren wir noch Zähler und Nenner mit g, so kommt:

$$l = g \frac{K}{g M L} = g \frac{K}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

worin D das Drehungsmoment bezeichnet. Mit Worten:

Reduzierte Pendellänge = Acceleration der Schwere $\times \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Drehungsmoment}}$[1]).

Diese Formel haben Borda, Arago und Biot, sowie später Bessel benutzt, um für physische Pendel geometrisch einfacher Gestalt die Länge des korrespondierenden, d. h. gleich schnell schwingenden, einfachen Pendels zu berechnen.

§ 91. Konjugierte Drehachsen. Im § 86, Gleichung (7), haben wir einen Lehrsatz mitgeteilt, welcher lautet:

$$K^1 = K + a^2 M. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und besagt, daß, wenn K das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M in bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse ist, für eine um a davon entfernte parallele Achse das Trägheitsmoment durch den Ausdruck für K^1 berechnet werden kann.

Daraus ergibt sich dann die reduzierte Pendellänge für die neue Achse nach Formel (3), § 90:

$$l = \frac{K + a^2 M}{a M} = \frac{K}{a M} + a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

denn die im Schwerpunkt vereinigt gedachte Masse M wirkt dann im Abstande a von der neuen Achse.

Da nun für ein und denselben Körper K und M unveränderliche Größen sind, so bleibt l gleich groß, solange a gleich groß bleibt. Daraus folgt:

---

[1]) Im Gravitationsmaß ist das Drehungsmoment $= m r$, daher fällt der Faktor g fort.

Für alle Achsen, welche unter sich parallel in demselben Abstande vom Schwerpunkte liegen, hat derselbe Körper als Pendel dieselbe reduzierte Pendellänge und dieselbe Schwingungsdauer.

Stellt also die Fig. 297 wiederum den Vertikalschnitt durch den Schwerpunkt O eines Körpers vor, so wird derselbe gleich schnell schwingen,

Fig. 297.

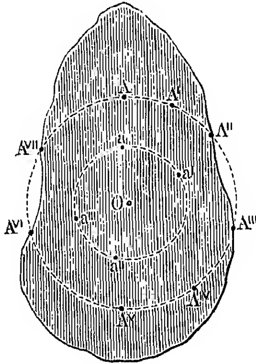
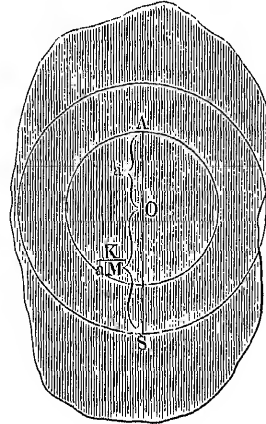


Fig. 298.



ob man ihn um eine Achse durch a oder a' oder a'' oder a''' schwingen läßt, sobald diese Punkte auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte in O liegen. Für die auf einem anderen konzentrischen Kreise liegenden Punkte A, A', A'' usf. ist die Schwingungsdauer im allgemeinen eine andere, aber unter sich gleiche.

Nun beachten wir noch die Lage des Schwingungspunktes. Aus (2) folgt, daß l, d. i. die Distanz des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte, um $\frac{K}{a\,M}$ größer ist als a, welches den Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte bedeutet. Die Lage der drei Punkte, die wir mit A, O und S bezeichnen wollen, ist also, wie Fig. 298 zeigt, eine solche, daß (während der Ruhelage) zu oberst der Aufhängepunkt A, dann um a tiefer der Schwerpunkt O, dann um $\frac{K}{a\,M}$ tiefer der Schwingungspunkt S liegt.

Denken wir uns jetzt den Körper im Schwingungspunkte S selbst aufgehängt, so ändert sich a in $\frac{K}{a\,M}$, die reduzierte Pendellänge wird dann, indem wir in 2) statt a den Wert $\frac{K}{a\,M}$ substituieren:

$$l' = \frac{K}{\frac{K}{a\,M}\cdot M} + \frac{K}{a\,M} = a + \frac{K}{a\,M} = l.$$

Wir finden auf diese Weise den wichtigen Satz, daß **ein Pendel dieselbe Schwingungsdauer beibehält, wenn es statt im ursprünglichen Drehpunkte im Schwingungspunkte aufgehängt wird.** Die Punkte A und S können also einfach miteinander vertauscht werden. Es

gilt folglich auch für den Punkt S, was wir oben für A nachgewiesen, daß jeder andere Punkt, der denselben Abstand vom Schwerpunkte O hat wie S, als Aufhängepunkt gewählt werden kann, ohne daß dadurch die Schwingungsdauer verändert wird.

Ziehen wir daher durch A sowohl wie durch S in Fig. 298 vom Mittelpunkte O aus konzentrische Kreise, so kann die Drehachse des Pendels durch jeden Punkt der Peripherie dieser beiden Kreise gelegt werden, ohne daß sich die Schwingungsdauer ändert. Wir wollen daher solche Kreise konjugierte Achsenkreise nennen. Ihre Radien sind a und $\frac{K}{a\,M}$.

Der Abstand der Drehachse vom Schwerpunkte hat also für eine bestimmte Schwingungsdauer im allgemeinen zwei Werte. Dies muß auch aus der Gleichung (2) hervorgehen, wenn man dieselbe nach a auflöst. Man erhält zunächst:

$$a^2 - a\,l + \frac{K}{M} = 0$$

und daraus

$$a = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{K}{M}},$$

a hat also zwei Werte mit Ausnahme des Falles, daß:

$$\frac{l^2}{4} = \frac{K}{M}$$

oder:

$$l = 2\sqrt{\frac{K}{M}},$$

in welchem Falle dann der einzige Wert von a:

$$a_1 = \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

erhalten wird. Die konjugierten Kreise legen sich in diesem Falle in einen einzigen mit dem Radius $a_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ zusammen.

Dieser Wert a_1 ist, nebenbei bemerkt, zugleich derjenige Wert von a in Gleichung (2), für welchen die reduzierte Pendellänge, also auch die Schwingungsdauer am kleinsten ausfällt.

Der Radius a_1 ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Radien je zweier konjugierter Kreise, wie man sofort findet, indem man aus dem Produkt von a mit $\frac{K}{a\,M}$ die Quadratwurzel auszieht.

Diesen Zusammenhang kann man zur Lösung folgender Aufgaben benutzen.

Erste Aufgabe. An einem Körper (Fig. 299), der im Punkte A stabil aufgehängt ist, sei die Lage des Schwerpunktes O und des Schwingungspunktes S ermittelt worden, man suche jenen Kreis, dessen Peripherie alle jene Punkte enthält, welche, als Aufhängepunkte angewendet, den Körper am schnellsten schwingen lassen.

Die beiden konjugierten Radien sind $O\,A$ und $O\,S$. Beschreiben wir über $A\,S$ als Durchmesser einen Halbkreis und errichten wir in O die Senk-

rechte $O\,b$, so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen $O\,A$ und $O\,S$, also gleich dem Radius $O\,a_1$ des gesuchten Kreises, welcher gestrichelt ausgezogen ist.

Zweite Aufgabe. Für irgend einen von $O\,a_1$ verschiedenen Abstand, z. B. $O\,a$, sei der zugehörige (konjugierte) Abstand der Achse vom Schwerpunkt, dem eine gleiche Schwingungsdauer zukommt, durch Konstruktion zu finden.

Man zieht die Gerade $a\,b$ und trägt an dieselbe in b einen rechten Winkel auf; der Durchschnitt des zweiten Schenkels mit der Vertikallinie s gibt dann den gesuchten Abstand $O\,s$.

Legt man einen Winkelhaken mit dem Scheitel des rechten Winkels an den Punkt b und dreht denselben in der Zeichnungsebene um b, so schneiden

Fig. 299.

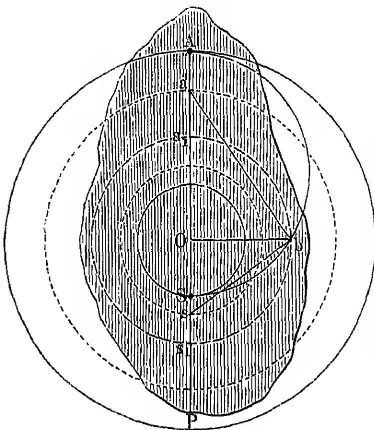
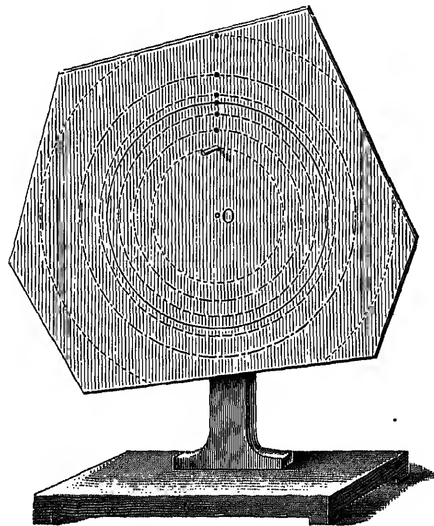


Fig. 300.



die beiden Katheten auf der Vertikallinie $A\,C$ in zwei Punkten durch, von denen der obere als Aufhängepunkt und der untere als zugehöriger Schwingungspunkt anzusehen ist. Man erhält auf diese einfache Weise sofort eine beliebige Anzahl konjugierter Kreise.

Um das Vorgetragene zu demonstrieren, bedient man sich eines einfachen Apparates nach Fig. 300, der wohl ohne weitere Erklärung verständlich ist. Auf dem als Pendel schwingenden Brettchen, welches an verschiedenen Punkten an die horizontale Achse gehängt werden kann, sind um den Schwerpunkt eine Anzahl konzentrischer Kreise gezogen, welche der eben beschriebenen Konstruktion entsprechen. Die konjugierten Kreise sind nach übereinstimmender Manier ausgezogen; der ganz ausgezogene Kreis entspricht dem Minimum der Schwingungsdauer. Die sämtlichen Kreise sind an verschiedenen Stellen mit Löchern versehen, um die Achse durchstecken zu können. Würde man die Drehachse dem Schwerpunkt noch weiter nähern, so fiele der Schwingungspunkt ringsum über den Rand des Brettchens hinaus; zugleich würde sich die Schwingungsdauer noch mehr verlängern. Hat man den Schwerpunkt selbst erreicht, so ist die Schwingungsdauer unendlich groß geworden, d. h. die Scheibe schwingt gar nicht mehr; sie würde, einmal an-

getrieben, wenn keine Reibung wäre, mit konstanter Geschwindigkeit fo[rt] rotieren; zur Ruhe gebracht, würde sie in jeder Lage im indifferenten Gleic[h]gewichte stehen bleiben.

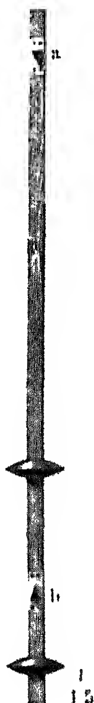
Die oben behandelten Aufgaben setzen voraus, daß die Lage des Schwi[n]gungspunktes (und des Schwerpunktes) bereits bekannt sei. Man kann ab[er] auch umgekehrt mittels der abgeleiteten Sätze den Schwingungspunkt un[d] die reduzierte Pendellänge experimentell ausmitteln. Diese Aufgabe soll i[m] folgenden Paragraphen behandelt werden.

§ 92. Das Reversionspendel. Um die Länge des Sekundenpende[ls] mit möglichster Genauigkeit zu finden, brachte zuerst Bohnenberger[1] da[s]

Fig. 301.



Fig. 302.



Reversionspendel in Vorschlag, welches spät[er] auch Kater[2] in England in Anwendung bracht[e] ohne Bohnenbergers Vorschlag zu kennen.

Das Reversionspendel ist ein Pendel, welch[es] mit zwei einander zugewendeten Schneiden verseh[en] ist, wie man aus Fig. 301 und Fig. 302 seh[en] kann, und welches so justiert ist, daß die Schwingung[s]dauer unverändert dieselbe bleibt, mag man nun d[as] Pendel um die Schneide a oder um die Schneide [b] oszillieren lassen.

Es wird dies bei dem Katerschen Reversion[s]pendel, Fig. 301, dadurch erreicht, daß man d[ie] Laufgewichte v und w in entsprechender Weise ve[r]schiebt, bei dem Reversionspendel, Fig. 302, geschieh[t] es durch Verschiebung der einen oder auch der beide[n] Linsen.

Hat man es nun dahin gebracht, daß die Schwi[n]gungsdauer des Pendels für die eine Schneide gena[u] so groß ist wie für die andere, so ist die Ent[fernung] der beiden Schneiden gleich de[r] Länge eines einfachen Pendels von gleiche[r] Schwingungsdauer.

Die Richtigkeit dieser Behauptung wurde i[m] vorausgegangenen Paragraphen erwiesen.

§ 93. Experimentelle Bestimmung des Trägheits[-] momentes schwingender Körper. Nach Formel (2) in § 9[.] ist die Schwingungsdauer eines physischen Pendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m l}} = \pi \sqrt{\frac{K}{D}} \quad \ldots \ldots (1$$

worin K das Trägheitsmoment, D das Drehungsmoment bedeute[n]. Bringt man nun an diesem schwingenden Körper noch ein[e] Masse vom Trägheitsmoment Q an, ohne an dem Drehungs[-] moment D etwas zu ändern, so ist die dadurch verlängert[e]

[1] Bohnenberger, Lehrbuch der Astronomie, 1811.
[2] Kater, Phil. Transact., 1818.

Schwingungsdauer gegeben durch

$$t' = \pi \sqrt{\frac{K + Q}{D}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

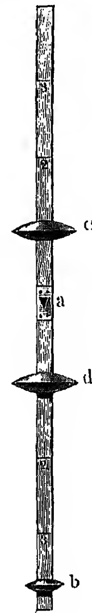
Aus (1) und (2) kann man dann leicht sowohl K als auch D berechnen. Man findet:

$$K = Q \frac{t^2}{t'^2 - t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$D = Q \frac{\pi^2}{t'^2 - t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Beispiel: Ein Pendel von der in Fig. 303 dargestellten Einrichtung, dessen Gesamtlänge 110 cm betrug, machte ohne die Linsen c und d 68 Schwingungen in der Minute, woraus sich die Schwingungsdauer pro Sekunde $t = 0{,}882$ berechnet.

Fig. 303.



Nachdem sowohl 20 cm über als auch 20 cm unter der Schneide eine Linse von 220 g angebracht worden war, während die Linse b unverändert an ihrer Stelle blieb, machte das Pendel 48 Schwingungen pro Minute, es ist also $t' = 1{,}25''$. Das Trägheitsmoment Q der beiden Linsen c und d zusammen ist $= 400 . 2 . 220 = 176000$, das Drehungsmoment derselben gleich Null.

Man erhält demnach durch Substitution dieser Werte in (3)

$$K = 176000 \frac{(0{,}882)^2}{(1{,}25)^2 - (0{,}882)^2} = 174508.$$

Die im Abstande 1 cm erforderliche beschleunigende Kraft ist:

$$D = Q \cdot \frac{\pi^2}{t'^2 - t^2} = \frac{176000 . (3{,}14159)^2}{(1{,}25)^2 - (0{,}882)^2} = 2213991 \text{ Dynen},$$

entsprechend dem Zuge einer Masse von:

$$M = \frac{2213991}{980{,}9} = 2257 \text{ g},$$

d. h. das Pendel, Fig. 303, schwingt ohne die Linsen c und d gerade ebenso, als ob an einer gewichtslosen Stange 1 cm weit von der Schneide eine Masse von 174508 g angebracht wäre, auf welche eine beschleunigende Kraft von 2213991 Dynen (hervorgebracht durch den Zug von 2257 g) wirkt. Würde man die Masse im Abstande von 1 dm vom Drehpunkte anbringen, so müßte sie 1745,08 g betragen und durch eine Kraft von 221399,1 Dynen (hervorgebracht durch den Zug von 225,7 g) in Bewegung gesetzt werden.

Dieselbe Methode zur Bestimmung des Trägheitsmomentes läßt sich aber auch noch in Anwendung bringen, wenn ein Körper nicht unter dem Einfluß der Schwerkraft, sondern unter dem Einfluß irgend einer anderen beschleunigenden, aber der Schwerkraft ähnlich wirkenden Kraft oszilliert, welche man jederzeit auch auf das Maß der Schwerkraft zurückführen kann. Ein Beispiel mag dies erläutern.

27 cm langer Magnetstab brauchte 10 Sekunden zu einer Schwingung. Um ein Trägheitsmoment zu bestimmen, wurde ein 130 g schwerer Messingring von 6,6 cm mittlerem Radius in der Weise aufgelegt, wie Fig. 304 zeigt, und nun betrug die Schwingungsdauer 13 Sekunden. Ist der Ring schmal, so kann annäherungsweise angenommen werden, daß seine ganze Masse sich im Abstande des mittleren Radius befindet[1], sein Trägheitsmoment ist dann gegeben durch:

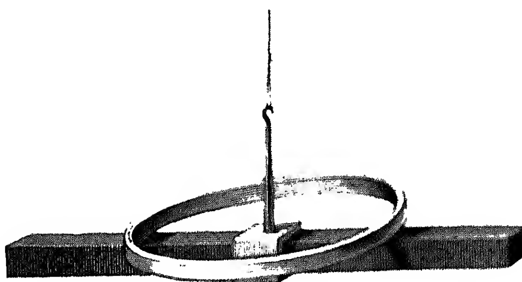


Fig. 304.

$$Q = 6{,}6^2 \cdot 130 = 5662{,}8.$$

Man findet ferner:

$$K = 5662{,}8 \cdot \frac{10^2}{13^2 - 10^2} = 8207,$$

$$D = 5662{,}8 \cdot \frac{(3{,}14159)^2}{13^2 - 10^2} = 80{,}502,$$

$$M = \frac{80{,}502}{980{,}9} = 0{,}082.$$

Das Trägheitsmoment des Magnetstabes, auf eine durch seine Mitte gehende Drehungsachse bezogen, ist also gleich dem einer Masse von 8207 g im Abstande von 1 cm von der Achse, und die beschleunigende Kraft des Erdmagnetismus wirkt auf den Magnetstab gerade so stark wie eine Kraft von 80,502 Dynen, die im Abstande 1 cm angreift. Diese Kraft wäre gleich dem Zuge einer Masse von 0,082 g.

§ 94. Anwendung des Pendels zur Bestimmung der Beschleunigung der Schwere. I. Bestimmung der Schwingungsdauer.

Aus der Formel über die Schwingungsdauer des Pendels $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

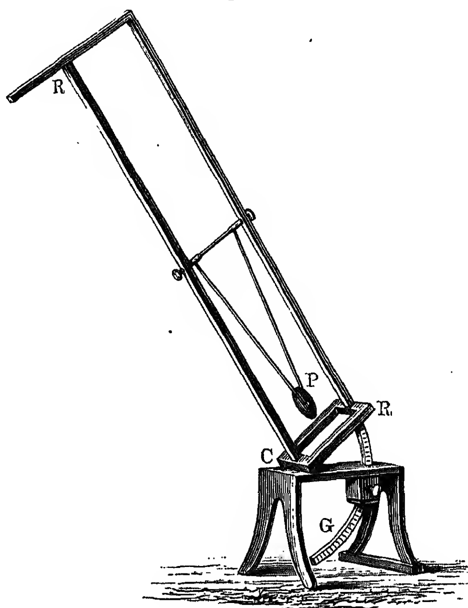
Die Größe g kann daher experimentell ermittelt werden, wenn man die Länge l des einfachen (oder die reduzierte Länge des physischen) Pendels und seine Schwingungsdauer t bestimmt und in die Formel (1) einsetzt.

Um zunächst in einem Vorlesungsexperiment den Einfluß der Änderung der beschleunigenden Kraft zu demonstrieren, hat E. Mach den in Fig. 305 abgebildeten Apparat konstruiert. Der Rahmen RR ist um ein Scharnier bei C drehbar, kann geneigt und umgelegt werden, hierdurch wird das an steifen Stäben aufgehängte Pendel P genötigt, in schief stehenden Schwingungs-

[1] Die genauere Formel ist nach § 87 (5) $Q = \frac{m}{2}(r^2 + R^2)$.

ebenen zu schwingen. Der Gradbogen *G* dient zur Messung und Festklemmung der geneigten Lage. Bei derselben kommt von der ganzen Schwerkraft von vornherein nur eine Komponente von der Größe $g \cos \beta$ zur Wirkung, wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, um welchen die Schwingungsebene aus ihrer ursprünglich senkrechten Lage gedreht wurde. Die Schwingungsdauer des geneigten Pendels verhält sich dann zu jener des senkrechten wie 1 zu $\sqrt{\cos \beta}$.

Fig. 305.



Eine ganz befriedigende Genauigkeit kann bei diesem Versuche wegen der Reibung begreiflicherweise nicht erreicht werden.

Die Beschleunigung der Schwere *g* ist an verschiedenen Orten der Erdoberfläche verschieden. Da die genaue Bestimmung dieser Größe ein hervorragendes Interesse gewährt und in neuerer Zeit sehr vervollkommnet wurde, so wollen wir die dabei angewendeten Methoden etwas eingehender behandeln, als bisher in den Lehrbüchern geschehen ist. Die ganze Bestimmung zerfällt in eine Reihe einzelner Messungen, deren wichtigste zunächst betrifft:

I. Die genaue Messung der Schwingungsdauer des Pendels. Wir haben schon im allgemeinen in § 31 erörtert, wie man mit der Uhr den Eintritt eines Zeitereignisses und speziell auch den wiederholten Durchgang eines schwingenden Körpers durch seine Gleichgewichtslage und damit seine Schwingungsdauer beobachtet. Es wurde dabei bemerkt, daß man durch direkte Beobachtung nach den Sekundenschlägen einer Pendeluhr oder eines Chronometers wohl eine Sicherheit der einzelnen Zeitbeobachtung bis auf 0,1 Sekunde erreichen kann.

An dem Pendel, dessen Schwingungsdauer nach einer Uhr zu bestimmen ist, soll sich eine Marke etwa in Form eines feinen vertikalen Striches befinden, bei einem Fadenpendel kann der Faden selbst hierzu benutzt werden. Auf diesen stellt man dann zweckmäßig, um nicht wegen störender Temperatureinflüsse des Beobachters auf das Pendel nahe an dasselbe herankommen zu müssen, ein Fernrohr ein, in dessen Gesichtsfeld außer dem Fadenkreuz noch eine horizontale Skala angebracht ist, deren Nullpunkt mit dem Vertikalfaden des ersten zusammenfallen soll und mit dem das Bild des Pendelstriches in der Ruhelage desselben zur Koinzidenz gebracht wird. An dieser Skala beobachtet man dann die Amplituden der Schwingungen, wenn sie nicht zu groß sind, sonst auch wohl an einer unmittelbar beim Pendel angebrachten Skala, was voraussetzt, daß man den Wert der Skalen-

teile in Graden oder Minuten kenne; außerdem kann die Skala in der früher angedeuteten Weise als Hilfsmittel zur Schätzung der Zehntel-Sekunden dienen.

Nachdem das Pendel in Schwingung versetzt ist, wird zuerst die Dauer von etwa 10 Doppelschwingungen durch Beobachtung des Durchganges des Pendels durch seine Gleichgewichtslage zu Anfang unter Notierung der Uhrzeit und sodann wieder nach Verfluß von 10 Durchgängen von derselben Seite her, also eben nach 10 Doppelschwingungen, gemessen. Ist die Schwingungsdauer t und die Differenz der Uhrzeiten des ersten und letzten Durchganges D, so ist also der erste angenäherte Wert von t:

$$t_1 = \frac{D}{20}.$$

Nunmehr beobachtet man einfach in größeren Zeitintervallen, z. B. alle zwei oder alle fünf Minuten die Uhrzeiten am Chronometer, wo das Pendel immer von derselben Seite her die Gleichgewichtslage passiert.

Es seien diese Uhrzeiten U_1, U_2, U_3 usw., so ist offenbar:

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= n_1 \,.\, t_1, \\ U_3 - U_2 &= n_2 \,.\, t_1, \\ U_4 - U_3 &= n_3 \,.\, t_1, \\ \text{usw.} \quad & \quad \text{usw.}, \end{aligned}$$

wenn $n_1, n_2, n_3, \ldots$ die unbekannten Zahlen der Schwingungen in den betreffenden Zeitintervallen darstellen, von denen wir nur wissen, daß es gerade Zahlen sein müssen, weil wir ja nur Doppelschwingungen beobachtet haben. Setzen wir daher für t den gefundenen angenäherten Wert von t_1 ein, so können wir mit voller Sicherheit die Werte von n_1, n_2 usw. finden, da die Unsicherheit von t_1 nicht so groß sein wird, um Zweifel zu gestatten, ob man bei den Quotienten:

$$n_1 = \frac{U_2 - U_1}{t_1}, \quad n_2 = \frac{U_3 - U_2}{t_1}, \text{ usw.}$$

die eine oder andere nächst gelegene gerade Zahl als richtigen Wert für die n wählen soll. Mittels der so gefundenen Werte von n_1, n_2 usw. berechnen sich dann aus den Beobachtungsintervallen eine Reihe genauerer Werte der Schwingungsdauer, nämlich:

$$t_1 = \frac{U_2 - U_1}{n_1}, \quad t_2 = \frac{U_3 - U_2}{n_2}, \quad t_3 = \frac{U_4 - U_3}{n_3} \text{ usw.} \quad . \quad (2)$$

welche sich nur durch die Beobachtungsfehler voneinander unterscheiden werden, wenn wir bloß bei kleinen Amplituden gemessen haben. Alsdann kann einfach t:

$$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

d. h. das Mittel aus allen Werten für z Intervalle als richtige Schwingungsdauer betrachtet werden, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Zahlen n_1, n_2, n_3 usw. nahe gleich groß seien. Nach der § 24 angegebenen Weise läßt sich dann aus den Abweichungen der einzelnen t_1, t_2, t_3, usw. vom Mittelwert t die Sicherheit des letzteren berechnen. Hat man eine größere Zahl von Schwingungen beobachtet, so kann auf diese Weise auch ohne An-

dem zweiten die Ruhe oder auch beiden Körpern zugleich eine entfernende oder annähernde Bewegung zuschreiben könnten. Sehr häufig ist eine große Anzahl von Körpern oder Körperteilen unter sich in relativer Ruhe, daneben eine weit geringere Zahl von Körpern gegen die ersteren in relativer Bewegung. In diesem Falle betrachten wir die Majorität als ruhend, die Minorität als in Bewegung begriffen. Wir betrachten also z. B. die Erdoberfläche ruhend gegenüber dem Schiffe, das sich bewegt, aber gleichzeitig den Schiffsboden ruhend gegenüber einer Tonne, welche darauf gerollt wird, und die Oberfläche der Tonne ruhend gegenüber einer Spinne, die darüber kriecht. Das alles ist aber nur konventionell.

Vergleichung von Raum- und Zeitgrößen. Die Gleichheit zweier Raumdistanzen oder Längen wird bekanntlich dadurch konstatiert, daß man einen Körper (Maßstab) von gleicher Länge wie die erste Raumdistanz an die zweite zu vergleichende anlegt. Diese einfache Methode setzt nur voraus, daß der Raum die Eigenschaft habe, daß ein und derselbe Körper seine Dimensionen nicht ändert, wenn sein Ort im Raume geändert wird.

Schwieriger ist es, die Gleichheit zweier Zeiträume zu konstatieren. Daß die Umdrehungszeit der Erde (der Sterntag), welche wir als Zeitmaß benutzen, konstant sei, ist eben erst zu erweisen[1]). Auf diese, sowie auf unsere Uhren, die wir nach dem Sterntage richten, dürfen wir uns bei einer prinzipiellen Behandlung der Frage nicht stützen.

Manche Physiker haben versucht, die Zeitvergleichung auf die später zu betrachtende gleichförmige Bewegung zu stützen, indem sie definierten: Gleiche Zeiträume sind jene, welche ein gleichförmig bewegter Körper braucht, um gleiche Wege zurückzulegen. Allein die gleichförmige Bewegung wird dann selbst wieder definiert als jene, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden. Dieser *circulus vitiosus* kann vermieden werden, wenn man verfährt, wie es zuerst D'Alembert angedeutet und dann Poisson näher ausgeführt hat[2]).

Man denkt sich, daß völlig identische Körper nacheinander unter ganz genau gleichen Umständen nach irgend einem Gesetze eine Bewegung ausführen. Mag dieselbe welcher Art immer sein, sie muß gleiche Zeiträume benötigen, falls wirklich alle Bedingungen beide Male gleich sind.

Wenn wir also z. B. ein und dasselbe Pendel zu zwei verschiedenen Malen ganz gleich weit aus der Ruhelage entfernen und eine Schwingung ausführen lassen, so wird die Zeitdauer dieser Schwingung beide Male gleich groß sein. Diese Methode, welche jener der Anlegung eines Maßstabes bei Längenvergleichungen analog ist, setzt also nur voraus, daß der Verlauf physikalischer Vorgänge von der absoluten Zeit, in der die Vorgänge stattfinden, unabhängig sei, eine Bedingung ebenfalls analog derjenigen, welche

---

[1]) Siehe § 29.

[2]) Siehe Streintz, „Die physik. Grundlagen der Mechanik", S. 86. D'Alemberts Traité de Dynamique. II. Édit. 1758, p. 13.

wendung eines Chronographen für das Mittel eine Sicherheit von $\pm 0{,}00002 \,.\, t$ erreicht werden. Die Benutzung des Chronographen erlaubt, sich auf eine geringere Zahl von Schwingungen zu beschränken.

Strebt man aber eine solche größere Genauigkeit in der Bestimmung von t an, so darf dann allerdings nach § 56, die Anfangsamplitude höchstens 1^0 betragen. Bei so kleiner Anfangsamplitude ist es dann aber wegen der unvermeidlichen allmählichen Abnahme derselben in der Regel nicht möglich, eine genügend große Zahl der Schwingungen zu beobachten. Es fragt sich also, wie sich diese Beobachtungsverhältnisse bei größeren Amplituden gestalten. Gemäß den Gleichungen (6) und (7) in § 56 ist die Schwingungsdauer t_1 bei einer Amplitude a_1:

$$t_1 = t\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2 \cdot \frac{a_1}{2} + \left(\frac{1\,.\,2}{3\,.\,4}\right)^2 sin^4 \cdot \frac{a_1}{2} + \cdots\right]$$

oder, da selbst für $a_1 = 10^0$ das Glied mit $sin^4 \frac{a_1}{2}$ kleiner als 0,000 002 wird, für alle Fälle genügend:

$$t_1 = t\left(1 + \frac{1}{4}\, sin^2 \cdot \frac{a_1}{2}\right),$$

wo t die Schwingungsdauer für unendlich kleine Amplituden darstellt. Die folgende Schwingungsdauer bei der Amplitude a_2 wird sein:

$$t_2 = t\left(1 + \frac{1}{4}\, sin^2 \frac{a_2}{2}\right)$$

usw. bis allgemein:

$$t_n = t\left(1 + \frac{1}{4}\, sin^2 \frac{a_n}{2}\right).$$

Summieren wir diese n Schwingungsdauern und setzen die ganze Zeit gleich dem oben angenommenen ersten größeren Zeitintervall $U_2 - U_1$, so wird also sein:

$$U_2 - U_1 = t\left(n + \frac{1}{4} \sum sin^2 \frac{a_n}{2}\right),$$

oder, wenn wir für den sin die Bogen einführen, was wegen der Kleinheit der a gestattet ist:

$$U_2 - U_1 = t\left[n + \sum \left(\frac{a_n}{4}\right)^2\right].$$

Nun nehmen erfahrungsgemäß innerhalb mäßiger Zeitintervalle die Amplituden a_1, a_2, ... bis a_n nach einer geometrischen Reihe ab, so daß, wenn c der Quotient derselben ist, sein wird:

$$a_2 = c \,.\, a_1,\ a_3 = c^2 \,.\, a_1, \ldots, a_n = c^{n-1} \,.\, a_1,$$

wo

$$c = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[n]{\frac{a_n + 1}{a_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Es wird daher jetzt auch sein:

$$U_2 - U_1 = t\left[n + \left(\frac{a_1}{4}\right)^2 \sum c^{2n-2}\right].$$

Nun ist:

$$\sum (2n-2 \ldots 1 [illegible]$$

Somit erhalten wir:

$$U_2 - U_1 \ldots t \left\{ n \ldots \left(\ldots \right) [illegible] \right\}$$

oder auch:

$$n t \ldots (U_2 - U_1) \ldots t \left(\ldots \right) [illegible]$$

und wenn wir für c den Wert aus Gleichung [illegible]

$$n t = (U_2 - U_1) - t \cdot \frac{1}{16} [illegible]$$

Die Amplituden: a_1 und a_n [illegible] werden [illegible] so daß, wenn wir:

$$a_1 \ldots a + \Delta \text{ und } a_n \ldots a - \Delta$$

setzen, das Δ eine kleine Größe sein wird, während

$$a = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

das Mittel aus der Anfangs- und Endamplitude [illegible] ein-gesetzt, gibt nach Multiplikation mit $\left(1 [illegible] \frac{\Delta}{a}\right)$:

$$n t = (U_2 - U_1) - t \cdot \frac{a^2}{16} \cdot \frac{[illegible] \frac{\Delta}{a} \left(1 [illegible] \frac{\Delta}{a}\right)}{\left(1 [illegible] \frac{\Delta}{a}\right) [illegible] \left(1 [illegible] \frac{\Delta}{a}\right)}$$

und mit Vernachlässigung der höheren Glieder mit $\frac{\Delta}{a}$ als den quadratischen:

$$n t = (U_2 - U_1) \ldots t \frac{a^2}{16} n \left\{ 1 + \frac{2}{n} \cdot \frac{\Delta}{a} + \left[\left(\frac{2}{n} \right)^2 \ldots 1 \right] \left(\frac{\Delta}{a} \right)^2 \right\}$$

oder auch, wenn wir für n die Zahl der [illegible] Schwingungen im ersten Intervall n_1 setzen:

$$t = \frac{U_2 - U_1}{n_1} - t \frac{a^2}{16} \left\{ 1 + \frac{2}{n_1} \cdot \frac{\Delta}{a} + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{n_1} \right)^2 \ldots 1 \right] \left(\frac{\Delta}{a} \right)^2 \right\}.$$

Angenommen, es sei $n_1 = 100$, $\Delta = [illegible]^0$ und $a = 5^0$, so wird

$$\frac{2}{n_1} \cdot \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{500}$$

Bei vorstehender Annahme ist aber

$$\frac{a^2}{16} = \frac{25^0}{16} \cdot \sin^2 1^0 = 0{,}000[illegible]$$

Es wird also $\frac{1}{500}$ dieser Zahl eine sehr kleine, ganz zu vernachlässigende Größe sein und um so mehr auch das mit den Quadraten von $\frac{2}{n}$ und $\frac{\Delta}{a}$ be-

haftete Glied in der Klammer. Wir werden somit stets mit ganz ausreichender Sicherheit einfach setzen können:

$$t = \frac{U_2 - U_1}{n_1} - t \cdot \frac{a^2}{16},$$

oder wenn wir für $U_2 - U_1$ aus Gleichung 2) den ohne Rücksicht auf die Amplitudenabnahme berechneten Wert t_1 einsetzen, so wird die reduzierte Schwingungsdauer $t^1_{,}$ auch sein:

$$t'_1 = t_1 \left(1 - \frac{a^2_{,}}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

wo der Faktor von t_1 die Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Amplituden darstellt und $a_{,}$ (nicht a_1) jetzt das Mittel aus den zu Anfang und am Schluß des Zeitintervalls $U_2 - U_1$ beobachteten Amplituden repräsentiert.

Entsprechende Reduktionen werden an allen ferneren Werten: t_2, t_3, t_4 usw., die aus den weiteren Beobachtungsintervallen $U_3 - U_2$, $U_4 - U_3$ usw. abgeleitet worden sind, anzubringen sein, indem man jeweilen auch für diese Intervalle Anfangs- und Endamplituden abliest. Man wird also analog mit (5) haben:

$$t'_2 = t_2 \left(1 - \frac{a^2_{,,}}{16}\right),$$

$$t'_3 = t_3 \left(1 - \frac{a^2_{,,,}}{16}\right),$$

usw. Das schließliche Mittel t wird wieder, wenn wir z Intervalle benutzt haben, nach Gleichung 3) sein:

$$t = \frac{t'_1 + t'_2 + t'_3 + \cdots}{z} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots}{z} - \frac{t}{16 \,.\, z} (a^2_{,} + a^2_{,,} + a^2_{,,,} + \cdots).$$

Wir können also auch an dem in Gleichung 3) ohne Rücksicht auf die Amplitudenkorrektionen berechneten Mittelwert: $t = \frac{1}{z}(t_1 + t_2 + t_3 + -)$ eine Gesamtreduktion C anbringen, die gegeben ist durch:

$$C = -\frac{t}{16 \,.\, z} (a^2_{,} + a^2_{,,} + a^2_{,,,} + \cdots + a^2_z).$$

Auch diese Amplituden $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ usw. werden ganz wie die obigen a_1, a_2, a_3 usw. nach einer geometrischen Reihe abnehmen und somit die Summe ihrer Quadrate wie oben zu behandeln sein, so daß wir erhalten:

$$C = -\frac{t}{16 \,.\, z} \frac{a^2_{,} - a^2_{z+1}}{1 - \left(\frac{a_{z+1}}{a_{,}}\right)^{\frac{2}{z}}},$$

und wenn wir wie dort:

$$a_{,} = a + \varDelta' \text{ und } a_{z+1} = a - \varDelta'$$

setzen, wo $\varDelta'$ auch eine kleine Größe ist, so werden wir mit Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung finden:

$$C = -\frac{t}{16} \cdot a^2,$$

wo also ist:

$$a = \frac{a_1 + a_{z+1}}{2},$$

und a_1 das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude des ersten Ze intervalls und a_{z+1} das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude d letzten Zeitintervalls darstellen; da aber die letzte Amplitude a_{n+1} des erst Zeitintervalls um nahe dieselbe Größe kleiner denn die erste a_1 sein wird, die erste Amplitude des letzten Zeitintervalls a_z größer ist denn die letz Amplitude desselben a_{z+n+1}, so werden wir unbedenklich für a auch d Mittel aus der allerersten und allerletzten Amplitude setzen können.

Aus dieser Betrachtung rechtfertigt sich also der Usus, aus dem Mitte wert t von einer Reihe beobachteter Schwingungsdauern, der ohne Rücksic auf die Größe der Amplituden, wie für isochrone Schwingungen, nach Gl chung 3) berechnet ist, die wahre Schwingungsdauer t_0 durch Redukti von t auf unendlich kleine Amplituden nach der Formel

$$t_0 = t\left(1 - \frac{a^2}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4$$

abzuleiten, wo a einfach das Mittel der allerersten und der allerletzt Amplitude bzw. der zu Anfang und am Schluß der Beobachtungsreihe a gelesenen Amplituden darstellt.

Wir haben die Bestimmung der Schwingungsdauer des Pendels hier ausführlich behandelt, weil solche Messungen bei anderen oszillierend Körpern in der Physik sehr viel vorkommen und es daher wichtig ist, si ein für allemal darüber eingehend zu orientieren.

Es gibt noch eine andere Methode zur genauen Ermittelung d Schwingungsdauer, die aber nur unter besonderen Umständen anwendbar i es ist die **Methode der Koinzidenz**, wie sie zuerst Borda und spät auch Bessel zur Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels a gewendet haben. Die Anordnung des Apparates zur Ausführung dieses Ve fahrens, wie sie von Borda und nachher auch von Arago und Biot benut wurde, zeigt Fig. 306 (entlehnt aus Wüllner, Experimentalphysik, 5. Auf I, 143). Das aus einem dünnen Platindraht und einer Platinkugel b stehende einfache Pendel BG ist, wie man sieht, vor einer astronomisch Pendeluhr CD aufgehängt und mittels des eisernen Trägers EF wie die unmittelbar an einer soliden Mauer befestigt. Uhr und Pendel sind zu Schutz vor Luftströmungen von einem Glasgehäuse umgeben. Man konn so leicht den Vorübergang des Pendelfadens vor dem Strich D auf d weißen Platte des Uhrpendels beobachten. Hätten das einfache Pendel u das Uhrpendel genau gleiche Schwingungsdauer und würde die Bewegun des ersteren so reguliert, daß es zugleich mit dem letzteren durch sei Gleichgewichtslage geht, also der Pendelfaden auf jenen Strich sich pr jiziert, so würde dieser Zustand unverändert sich erhalten. Hat aber d eine Pendel eine größere oder kleinere Schwingungsdauer als das andere, i z. B. die des einfachen Pendels um $^1/_{10}$ der Schwingungsdauer des Uh pendels, also $0{,}1^s$, größer, so wird es hinter dem anderen zurückbleiben, u zwar bei jeder Schwingung um $0{,}1^s$. Gingen sie also zu Anfang oder b der nullten Schwingung zusammen durch die Gleichgewichtslage, d. **koinzidierten** sie da zum ersten Male, so kommt nach der erste

Schwingung der Pendelfaden um $0{,}1^s$ später an und wird von Schwingung zu Schwingung immer mehr hinter dem Durchgang des Striches D am Uhrpendel zurückbleiben, und erst, wenn bei der 10. Schwingung des Uhrpendels die Differenz gegen das Fadenpendel $10 . 0{,}1^s$ oder 1^s geworden ist, gehen beide zugleich durch; dies ist dann die zweite Koinzidenz. Um diese scharf erkennen zu können, ist in einiger Entfernung in der Richtung DD' ein Fernrohr aufgestellt, welches den Pendelfaden und den Strich D am Uhrpendel zugleich zu sehen erlaubt. Während der Zeit vom ersten gemeinsamen Durchgang der ersten Koinzidenz bis zu dieser zweiten Koinzidenz hat also nach dem Vernier-Prinzip das Uhrpendel 10, das Fadenpendel aber nur 9 Schwingungen gemacht, oder allgemein wird für die Zeit von der ersten zur zweiten Koinzidenz gelten:

$$(n - 1)\, t_p = n\, t_u = U_2 - U_1,$$

wenn n die Zahl der Schwingungen des Uhrpendels von der ersten zur zweiten Koinzidenz, t_u dessen Schwingungsdauer und t_p diejenige des Fadenpendels darstellen und wir andererseits mit U_2 die Uhrzeit bei der zweiten Koinzidenz und mit U_1 diejenige beim Beginn der Beobachtung oder der ersten Koinzidenz bezeichnen.

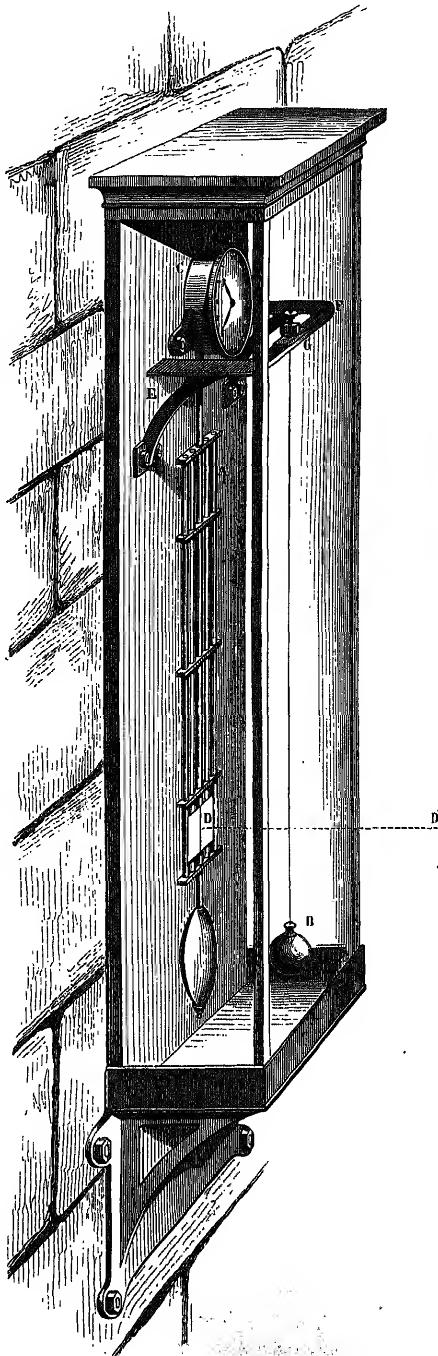
Für die dritte Koinzidenz zur Uhrzeit U_3 wird die Gleichung gelten:

$$2\,(n - 1)\, t_p = 2\, n\, t_u = U_3 - U_1,$$

und zur Zeit U_m der $m$ten Koinzidenz wird man haben:

$$(m - 1) . (n - 1) . t_p = (m - 1) . n . t_u = U_m - U_1.$$

Fig. 306.



Hieraus folgt aber:

$$t_p = \frac{(m-1)\,n}{(m-1)\,(n-1)} \cdot t_u = \frac{U_m - U_1}{(m-1)\,(n-1)}.$$

Würde also beispielsweise erst nach je 51 Schwingungen eine Koinzide erfolgen und 101 Koinzidenzen beobachtet werden, so würde der Fehler der Uhrzeitbeobachtung $U_m - U_1$ zur Ableitung der Schwingungsdauer auf den 5000 Teil reduziert werden oder, wenn wir jenen Fehler auf $0{,}1^s$ a schlagen, eine Genauigkeit von $\pm 0{,}000\,02^s$ in der Bestimmung von t_p erzi werden.

Selbstverständlich ist es nicht nötig, alle m-Koinzidenzen zu beobachte da aus dem Zeitintervall $U_2 - U_1$ von der ersten zur zweiten Koinzidenz d Zahl m bis zur Uhrzeit U_m mit genügender Sicherheit zu berechnen ist.

Bessel hat bei seinen bezüglichen Versuchen[1]) die beiden Pendel ungefähr 3 m Distanz ganz unabhängig voneinander aufgestellt, um d gegenseitigen Einfluß der Schwingungen aufeinander zu vermeiden. Dur eine zwischen beide gesetzte Linse von passender Brennweite wurde da ein Bild der Marke am einen Pendel auf die Marke am anderen Pendel er worfen, so daß beide Marken — von besonderer Einrichtung — zuglei scharf mit dem Fernrohr beobachtet werden konnten.

§ 95. Fortsetzung. II. Bestimmung der reduzierten Pendelläng

Wenn nach dem oben angegebenen Verfahren die richtige Länge des ko respondierenden einfachen Pendels für das zusammengesetzte erhalten werd soll, so ist noch die Reduktion desselben auf den leeren Raum nöti Dieselbe zerfällt in zwei Teile, nämlich eine aërostatische und eine aër dynamische.

Die aërostatische Reduktion, welche schon von Newton angegeb wurde und daher auch die Newtonsche Reduktion genannt wird, beruht a dem Auftrieb, welche nach den später zu erörternden Gesetzen das Pend durch die Masse M' der von ihm verdrängten Luft erfährt. Diese vertikal v unten nach oben gerichtete Kraft wirkt aber, wie später in der Lehre vo Auftrieb gezeigt wird, nicht so als ob sie im Schwerpunkt der Masse, sonde im Schwerpunkt der Figur des Pendels angreifen würde, der um L' von d Drehungsachse des Pendels abstehen möge; infolgedessen ist in der Gl chung (4), § 90, für die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels a Stelle von ML zu setzen $ML - M'L'$, so daß man hat:

$$l = \frac{K}{ML\left(1 - \frac{M'L'}{ML}\right)},$$

oder da die Masse M' der Luft, die gleiches Volumen wie das Pendel h gegenüber der Masse M des letzteren immer sehr klein ist, wird mit g nügender Annäherung auch sein:

$$l = \frac{K}{ML}\left(1 + \frac{M'L'}{ML}\right) = l'\left(1 + \frac{M'L'}{ML}\right) \cdot \quad . \quad . \quad . \quad ($$

---

[1]) F. W. Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekunde pendels. Abhandlung der Akademie zu Berlin für 1826.

wo l' den unkorrigierten Wert für l darstellt. Die in bezug hierauf korrigierte Schwingungsdauer wird dann sein

$$t = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}\left(1 - \frac{M' L'}{M L}\right)}$$

oder auch, wenn wir mit t' die unkorrigierte Schwingungsdauer bezeichnen:

$$t = t'\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{M' L'}{M L}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Das Glied in der Klammer stellt also den von der aerostatischen Reduktion herstammenden Korrektionsfaktor für die Schwingungsdauer des Pendels dar.

Die aerodynamische Reduktion ist zuerst von Bessel angegeben und bei seinen erwähnten Untersuchungen berücksichtigt worden. Sie wird dadurch bedingt, daß eine gewisse, dem Pendel durch Adhäsion anhängende Luftschicht an den Schwingungen desselben teilnimmt. Durch diese mitschwingende Luftmasse M'' wird offenbar das Trägheitsmoment des Pendels vergrößert, etwa um $c \cdot M''$, wo c einen unbekannten, empirisch zu ermittelnden Faktor darstellt. Infolge hiervon wird die Länge des reduzierten einfachen Pendels werden

$$l = \frac{K + c \cdot M''}{M L} = l''\left(1 + \frac{c \cdot M''}{K}\right),$$

wenn l'' den unkorrigierten Wert der Pendellänge darstellt.

Führen wir wieder diesen Wert an Stelle von l in den Ausdruck für die Schwingungsdauer ein, so wird dieselbe

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l''}{g}\left(1 + \frac{c\, M''}{K}\right)},$$

oder es ist die in bezug auf die hydrodynamische Reduktion korrigierte Schwingungsdauer t gegenüber der unkorrigierten t''

$$t = t''\left(1 + \frac{c \cdot M''}{2\,K}\right).$$

Reduktion der Pendellänge wegen des Einflusses der Schneiden. Laplace hatte bereits darauf hingewiesen, daß bei der Anwendung von Schneiden als Drehungsachsen für die Pendel die wahre Drehungsachse nicht in der scharfen Kante der Schneiden bzw. an deren Unterlage, sondern um eine gewisse Größe darunter zu suchen sei, weil die Kante der Schneiden nicht eine mathematische Linie, sondern einen Zylinder von kleinem Radius darstelle. Da nun in der Tat bei den Versuchen von Borda, Biot und Arago eine Schneide als Drehungsachse für das Fadenpendel benutzt wurde, so würden dieser Bemerkung zufolge ihre Messungen der Pendellänge von der Schneide bzw. ihrer ebenen Unterlage an zu große Werte für jene ergeben haben.

Biot bestritt die praktische Erheblichkeit dieses Einwandes, indessen hat Bessel, der diese Frage theoretisch und experimentell von neuem untersuchte, die Richtigkeit der Laplaceschen Bemerkung nachgewiesen. Es wird dadurch in der Tat eine kleine negative Korrektion an der unter Anwendung von Schneiden gefundenen Pendellänge und damit auch an der Schwingungsdauer bedingt, deren Größe indessen im gegebenen Falle nicht

sicher zu ermitteln ist, da man den Krümmungsradius der Schneidekan nicht wohl messen kann.

In derselben oben erwähnten Abhandlung hat aber Bessel am Schlu auch darauf hingewiesen, daß bei einem Reversionspendel sowohl die aëros tische als aërodynamische Reduktion wie auch der Einfluß der Schneid durch die abwechselnden Schwingungen auf den beiden Schneiden aus d Resultat herausfalle, wenn man dem Pendel eine von ihm vorgeschlage symmetrische Form bezüglich beider Schneiden gebe und die Schneiden v tauschbar mache.

Ein nach diesen Angaben Bessels konstruiertes Reversionspendel, d E. Plantamour als erstes dieser Art für die Schweizerische geodätisc Kommission von den Gebrüdern Repsold in Hamburg anfertigen ließ, h derselbe 1865, 1866 und 1867 zur Bestimmung der Schwere zunächst Genf und auf Rigi-Kulm, später 1871 nochmals in Genf benutzt und in d unten zitierten Abhandlung darüber beschrieben und abgebildet [1]).

In neuerer Zeit wurde noch eine weitere Fehlerquelle beim Pendel, man schon früher vermutete, näher, besonders durch Cellérier und Pier untersucht, welche auf der elastischen Mitschwingung der Träger des Pend beruht. Plantamour fand aus seinen bezüglichen Experimenten, daß f das obige Pendel die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels infol dieses Mitschwingens des Gestelles eine Korrektion von $+0{,}1724$ mm bedür Es würde hier zu weit führen, auf die Mittel zur Bestimmung dieser Fehl quelle, wie überhaupt auf die Praxis des Reversionspendels näher einz treten; wir verweisen bezüglich dessen auf die unten zitierte Schrift v F. R. Helmert [2]).

Da es wichtig ist, an möglichst vielen Punkten der Erdoberfläche Schwerkraft bzw. Beschleunigung der Schwere g messen zu können u das Reversionspendel für absolute Bestimmungen von g zwar sehr geeign ist, für den Gebrauch auf Reisen aber zu unbequem wäre, so hat Obe von Sterneck zu letzterem Zweck einen für relative Messungen sehr geei neten kompendiösen und leicht transportabeln Apparat mit invariablem Hal sekundenpendel konstruieren lassen, der bereits in vielen Ländern und a Reisen zu Pendelmessungen verwendet worden ist [3]).

§ 96. Werte der Schwerebeschleunigung g. Aus den Beobachtung an der Breite und Höhe über Meer nach verschiedenen Punkten der Erdobe

[1]) E. Plantamour, Expériences faites à Genève avec la pendule à réversi et Nouvelles expériences avec la pendule à réversion et determination de pesante à Genève et au Righi-Kulm. Mém. de la Société de phys. et d'histoire nature à Genève. T. XVIII, 1866 et T. XXI, 1872.

[2]) F. R. Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Veröffe lichung des Königl. preuß. geodätischen Instituts und des Centralbureaus der inte nationalen Erdmessung. Potsdam 1898 (Teubner in Leipzig).

[3]) R. v. Sterneck, Der neue Pendelapparat. Mitteilungen des militä geographischen Instituts in Wien, Bd. VII, 1887 und Zeitschrift für Instrumente kunde 1888, S. 157, siehe auch: Helmert, Bestimmung der Polhöhe und d Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bis zur Schneekop Veröffentlichung des Königl. preuß. geodätischen Instituts, Berlin 1896, S. 184 u. und J. B. Messerschmitt, Relative Schwerebestimmungen in der Schweiz im A trage des Schweizerischen geodätischen Kommission, Zürich 1897 (bei Fäsi u. Bee

äche ergab sich bald, daß g vom Äquator nach den Polen hin wachse und ei der Erhebung über Meer abnehme. Das letztere ist unmittelbar verständlich, da mit der Entfernung von der Erdoberfläche die Anziehung der Erde umgekehrt proportional mit der Entfernung vom Erdzentrum abnimmt, o daß wir, wenn g_0 die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche nd g_h diejenige in der Höhe h über der Erdoberfläche darstellt, haben verden:

$$g_0 = g_h \left(\frac{h + R}{R}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

vo R den Halbmesser der Erde darstellt. Da $\frac{h}{R}$ jedenfalls eine kleine Größe st, also die höheren Potenzen davon zu vernachlässigen sind, so kann man nit ganz genügender Annäherung auch setzen:

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{2\,h}{R}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

Wenn aber die Erhebung h nicht in der freien Luft über der im Meeresniveau liegenden Erdoberfläche stattfindet, sondern einem Orte auf der über lie Meeresfläche um h erhobenen Erdoberfläche zukommt, so hat man nach Poisson noch Rücksicht auf die Anziehung der Gebirgsschichten vom Meeresniveau bis zum betreffenden Orte zu nehmen. Demzufolge soll, wenn man nach A. von Humboldt die Dichte der oberen Erdschichten gleich $\frac{1}{2}$ der nittleren Dichte der Erde ansetzt, sein:

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{5}{4}\,\frac{h}{R}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Zunahme der Schwere vom Äquator gegen die Pole hin wird durch len Umstand bedingt, daß die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid (Rotationsellipsoid) darstellt, dessen Hauptdimensionen nach Clarke (1880) sind:

Halber Äquatordurchmesser	Halbe Polachse der Erde
$a = 6\,378\,250$ m	$b = 6\,356\,500$ m.

Daraus folgt für die sog. Abplattung der Erde:

$$\frac{a - b}{a} = \frac{21\,750}{6\,378\,250} = \frac{1}{293{,}5}.$$

Nach Helmert soll die Abplattung gegenwärtig genauer durch: 1 : 298,3 largestellt sein.

Dazu kommt, daß infolge der Drehung der Erde um ihre Achse, wie wir veiterhin sehen werden, eine der Schwere entgegenwirkende sog. Fliehkraft ntsteht, welche am Äquator am größten ist und an den Polen Null wird.

Laplace hat eine Formel zur Berechnung dieser Gesamtzunahme der Schwere vom Äquator zu den Polen hin angegeben, wonach die Schwere in ler Breite φ gegeben ist durch:

$$g_\varphi = g_0\,(1 + m \,.\, \sin^2 \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

venn g_0 hier die Schwere am Äquator, und

$$m = \frac{5}{2}\,u - \frac{1}{2}\,.\,\varepsilon^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

eine konstante Größe darstellt, welche aus dem Verhältnis u der Schwerkraft und Fliehkraft am Äquator und der Exzentrizität der Meridianellipse ε, wie angegeben, berechnet werden kann. Andere Forscher, wie Schmidt, Hansteen, Bovenius, Listing, haben es vorgezogen, aus einer großen Zahl vorliegender Bestimmungen von g an verschiedenen Orten die wahrscheinlichsten Werte für die Konstante m und zugleich für g_0 abzuleiten. Eine andere Form der obigen Gleichung ist:

$$g_\varphi = g_{45}\,(1 - m' \,.\, cos^2\,\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo

$$m' = \frac{\frac{1}{2}m}{1 + \frac{1}{2}m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ist und g_{45} die Schwerkraft in 45° Breite repräsentiert. Einschließlich der Veränderung mit der Höhe werden also die Formeln für die Berechnung der Beschleunigung der Schwere in der Breite φ und der Höhe h über Meer:

$$g_{\varphi,h} = g_{0,0}\,(1 + m \,.\, sin^2\,\varphi)\,(1 - n \,.\, h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$g_{\varphi,h} = g_{45,0}\,(1 - m' \,.\, sin^2\,\varphi)\,(1 - n \,.\, h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Drücken wir h in Metern aus, so wird theoretisch:

$n = 0{,}000\,000\,3142$ bei Erhebung um h über Meer in freier Luft,
$n = 0{,}000\,000\,1960$ bei Erhebung des Landes um h über Meer.

Für die Konstanten m und m' hat man folgende Werte berechnet:

Nach Bessel	0,005 3084	0,002 6472
Meridian von Paris	0,005 1663	0,002 5764
„ „ Sibirien bis Indien	0,005 4710	0,002 7280
„ „ London	0,005 1769	0,002 5818
„ „ Konstantinopel	0,005 1827	0,002 5846
Nach E. Schmidt	0,005 2004	0,002 5935
„ Baily	0,005 1715	0,002 5791
„ Hansteen	0,005 1956	0,002 5911
„ Bovenius	0,005 1624	0,002 5745
„ Fischer (1868)	0,005 1851	0,002 5958
„ Listing (1878)	0,005 2015	0,002 5940
„ Helmert (1884)	0,005 3100	0,002 6480

Für das Bureau international hat hiernach, als für das mittlere Europa geltend, Broch[1]) folgende Formel adoptiert:

$$g_{\varphi,h} = g_{45,0}\,(1 - 0{,}002\,590 \,.\, cos \,.\, 2\,\varphi)\,(1 - 0{,}000\,001\,96 \,.\, h) \qquad (9)$$

die auch von Mascart und Wild den „Tables météorologiques internationales“, Paris 1890 (Gauthier Villars) in den bezüglichen Teilen zugrunde gelegt wurde.

---

[1]) Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. 1. Paris 1881.

Grundsätze:

„*Dieselben Ursachen bringen überall und immer dieselben Wirkungen hervor.*“

Materie. Die physikalischen Körper haben zum Unterschiede von den geometrischen Körpern nicht allein eine *Form*, sondern auch einen *Inhalt*. Diesen Inhalt nennen wir *Materie*. Wir betrachten sie als die Trägerin der Eigenschaften der Körper und die Ursache der Sinneseindrücke, die wir von den Körpern empfangen.

Wir beobachten, daß verschiedene Körper bei gleicher Form ganz abweichende Eigenschaften besitzen können, woraus wir schließen müssen, daß es ihr Inhalt, also ihre Materie ist, welche die verschiedenen Eigenschaften bedingt. Wir erfahren hierdurch, daß es verschiedenartige Materie gibt.

Homogen nennen wir jene Körper, welche in jedem ihrer Volumteile durchaus gleiche Beschaffenheit haben; im anderen Falle nennen wir sie *heterogen*. Beispiele homogener Körper sind schlierenfreies Glas, Bergkristall, Wasser, Wasserstoff; heterogene Körper sind schlierenhaltiges Glas, Granit, eine in verschiedenen Schichten ungleich konzentrierte Salzlösung, Emulsionen (Milch), Rauch.

Isotrop heißen jene Körper, welche in allen ihren Punkten nach allen *Richtungen* gleiche Eigenschaften zeigen; im anderen Falle heißen sie *anisotrop* oder *heterotrop*. Isotrope Körper sind gut gekühltes Glas, Flüssigkeiten und Gase bei gleich verteilter Temperatur. Anisotrope Körper sind gepreßtes Glas, Kristalle, Flüssigkeiten und Gase mit ungleich temperierten Schichten [1].

---

[1] Bei näherer Überlegung findet man, daß diese Definitionen eine Schwierigkeit oder Unbestimmtheit enthalten. Man rechnet Luft (oder ein anderes Gasgemisch) zu den homogenen Körpern, trotzdem Volumteile derselben von der Größenordnung der Moleküle abwechselnd Stickstoff oder Sauerstoff oder ein Vakuum enthalten. Auch ein reines Gas, z. B. Wasserstoff, wäre demnach nicht homogen, ebensowenig ein fester Körper, der Poren enthält. Nur eine den Raum kontinuierlich ausfüllende Materie könnte vollkommen homogen sein. Man spricht aber doch von homogenen mechanischen Gemischen und wird auch von einem ganzen Gebirge, das überall aus demselben Granit besteht, sagen dürfen, es habe homogene geologische Beschaffenheit. Die Definition würde erst dadurch eine Bestimmtheit erlangen, daß man die Größe der Volumelemente angibt, deren Beschaffenheit man in Vergleich zieht. So z. B. wäre Milch bei Betrachtung von Volumteilen, die von der Größenordnung der in ihr schwebenden Fettkügelchen sind, heterogen, dagegen homogen, wenn man ganze Cubikcentimeter derselben vergleicht. Dasselbe würde gelten für Siegellack, welches ein inniges Gemenge von Harz und Ocker, von Schießpulver, welches ein Gemenge von Kohle, Schwefel und Salpeter ist, von Bimsstein, welcher abwechselnd aus geschmolzener Lava und Luftblasen besteht. Man hat solche Körper auch *quasihomogen* oder grobhomogen genannt. Ähnliches gilt von der Isotropie. Füllen wir ein Gefäß mit feinstgepulvertem Bergkristall überall gleich dicht an, so daß nirgend die Richtung der Hauptachse der Kristalle überwiegend vorkommt, so sind Volumteile dieses Körpers, deren Größenordnung die der Kristallfragmente weit übersteigt, als isotrop anzusehen, während die Fragmente selbst anisotrop sind. Man kann solche Körper *quasiisotrop* nennen.

Helmert[1]) hat folgende Formel aufgestellt und dabei die Benutzung des Faktors von $h : 0{,}3140\,10^{-6}$ auch für Landerhebungen begründet:

$$g_{\varphi,h} = g_{0,0}\,(1 + 0{,}005\,310 \,.\, \sin^2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,3140 \,.\, h) \qquad (10)$$

oder

$$g_{\varphi,h} = g_{45,0}\,(1 - 0{,}002\,648\,\cos^2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,3140 \,.\, h) \qquad (10\,a)$$

und als Wert der Beschleunigung $g_{0,0}$ am Äquator und im Meeresniveau gefunden:

$$g_{0,0} = 978{,}000 \text{ cm}$$

woraus folgt:

$$g_{45,0} = 980{,}60 \text{ cm} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (10b)$$

und:

$$g_{90,0} = 983{,}19 \text{ cm}$$

	Breite	+ Östl. Länge von Greenwich	Höhe über Meer m	g in Centimetern
Spitzbergen	78° 50′	11° 40′	6	983,07
Christiania	59 55	10 43	28	981,95
Stockholm	59 21	18 3	45	981,86
Greenwich	51 29	0 0	48	981,20
Kopenhagen	55 41	12 35	18	981,58
Pulkowa	59 46	30 20	70	981,91
Moskau	55 45	37 34	142	981,59
Tiflis	41 41	44 48	471	980,21
Königsberg	54 43	20 30	22	981,50
Potsdam	52 23	13 4	87	981,29
Leipzig	51 20	12 24	119	981,22
München	48 9	11 36	529	980,74
Brüssel (Uccle)	50 51	4 22	102	981,17
Paris	48 50	2 20	60	980,96
Wien	48 13	16 22	183	980,88
Budapest	47 30	19 4	122	980,86
Genf	46 12	6 9	405	980,60
Zürich	47 23	8 33	467	980,67
Mailand	45 28	9 11	141	980,59
Rom	41 54	12 30	59	980,36
Catania	37 30	15 5	43	980,07
Madrid	40 24	— 3 41	657	980,02
Algier	36 47	3 4	3	979,95

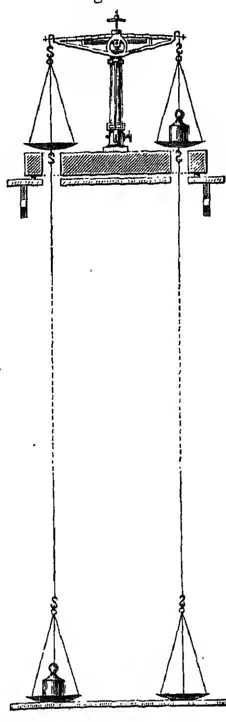
[1]) F. R. Helmert, Mathematische und physikalische Theorien der höheren Geodäsie **2**, 241 und 244, Leipzig 1884; siehe auch: Helmert, Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten. Beilage IX zu den Verhandlungen der 13. allgem. Konferenz für internat. Erdmessung. II. Teil, 1901, bei G. Reimer, Berlin. (Hier ist S. 368 als Faktor von $h : 0{,}3155 \,.\, 10^{-6}$ und als besserer Wert für $g_{0,0}$ S. 371: 978,045 angegeben, woraus für $g_{45,0}$ folgen würde 980,642. Diese Zahl ist nur wenig kleiner als 980,665, welche nach § 35, S. 97, Anmerkung, von der internationalen Generalkonferenz für Maß und Gewicht als Normalbeschleunigung der Schwere unter 45° Breite und im Meeresniveau adoptiert worden ist.

	Breite	+ Östl. Länge von Greenwich	Höhe über Meer m	g in Centimetern
St. Helena	— 15° 55′	— 5° 42′	11	978,68
Kapstadt	— 33 56	18 29	11	979,68
Sidney	— 33 52	151 12	43	979,69
Kalkutta	22 33	88 21	6	978,83
Tokio	35 43	139 46	15	979,82
Washington	38 53	— 77 1	14	980,12
San Francisco	37 47	—122 26	114	979,98
Rio de Janeiro	— 22 55	— 43 18	3	978,87
Kap Horn	— 55 51	— 67 13	12	981,64

Die Abweichung der nach obiger Formel berechneten Werte von g von den beobachteten ist durchweg geringer als 0,0001 des ganzen Wertes [1]). In der vorstehenden Tabelle geben wir die beobachteten Werte von g nach Helmerts unten angeführtem Bericht für eine Auswahl von Orten.

§ 97. Ermittelung der Abnahme der Schwere mit der Höhe mittels der Wage (Methode von Jolly). Den Einfluß der Erhebung über die Oberfläche der Erde auf die Schwerkraft g hat zuerst Ph. v. Jolly [2]) auf einem anderen Wege, nämlich mittels der Wage nachzuweisen gesucht. Wie die Fig. 307 zeigt, stellte er zu dem Ende eine genaue Wage bei ersten Versuchen 5,5 m, bei den späteren 25 m hoch über dem Fußboden auf und hing an deren Wagschalen vermittelst entsprechend langer Drähte zweite Schalen auf, welche sich bloß 0,2 m bzw. 4 m über dem Boden befanden. Die Wage wurde im ersten Falle mit 1 kg, im letzteren mit 5 kg auf jeder Schale belastet und unter Beobachtung aller nötigen Vorsichtsmaßregeln Wägungen ausgeführt, wobei abwechselnd beide Gewichte auf den oberen Schalen lagen und darauf das eine auf die betreffende untere Schale gebracht wurde.

Fig. 307.



Bei der Belastung mit 1 kg betrug die Gewichtszunahme beim Übertragen von der oberen zur unteren Schale für die Höhendifferenz 5,29 m im Mittel vieler Versuche:

1,510 mg;

bei der Belastung mit 5,00945 kg für die Höhendifferenz 21,005 m stieg sie auf

31,686 mg.

Nach Gleichung (1a), § 96, soll aber dem Gravitationsgesetz zufolge sein:

[1]) Tafeln zur Erleichterung der Berechnung nach (10) hat publiziert: v. Triulzi, Formeln und Hilfstafeln für relative Schwerebestimmungen. Pola 1895.

[2]) Ph. v. Jolly, Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. Abhandlung der königl bayerischen Akademie, II. Cl., XIII. Bd., 1. Abt. 1771, und XIV. Bd., 2. Abt. 1881.

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{2h}{R}\right)$$

oder

$$g_0 - g_h = g_h \frac{2h}{R}.$$

Die gleiche Beziehung gilt aber auch für die Gewichte G_0 und G_h, welche oben und unten der konstanten Tara das Gleichgewicht halten. Setzen wir hier obige Werte ein und für R den Wert von München: 6365722, so ergibt sich:

$$G_0 - G_{5,29} = 1{,}662\,\text{mg} \quad \text{und} \quad G_0 - G_{21,00} = 33{,}06\,\text{mg}.$$

Der erste theoretische Wert ist um 9 Proz., der zweite um 4 Proz. größer als der beobachtete, was wohl auf den vermindernden Einfluß der umgebenden Gebäudemassen zurückzuführen ist.

Entsprechende Beobachtungen haben später Thiesen[1]) im Pavillon de Breteuil, sowie Richarz und Krigar-Menzel[2]) in Spandau angestellt und ebenfalls geringere als die theoretischen Werte für die Abnahme der Schwere mit der Höhe gefunden. Für den Koeffizienten n von h in unseren Formeln (7) und (8), § 96, ergeben sich demnach folgende Werte:

$n =$ 0,000000314	theoretisch,	
= 0,000000285	1. Versuch	von W. Jolly,
= 0,000000301	2. „	
= 0,000000248	unmittelbar	Thiesen,
= 0,000000278	korrigiert	
= 0,000000279	Richarz und Krigar-Menzel,	
= 0,000000196	theoretisch.	

Hiernach erscheint der erste theoretische Wert, den Helmert in seiner Formel aufgenommen hat, auch nach diesen Bestimmungen der richtigere zu sein. (Helmert nimmt jetzt [1901], wie oben angegeben, den Wert 0,0000003155 an.)

Die Zahl 0,0000003 sagt also aus, daß die Beschleunigung der Schwere bei der Erhebung um 1 m über das Meeresniveau um 0,3 Millionstel ihres Wertes abnehme oder daß das Gewicht von 1 kg, wenn man es um 1 m hebt, um 0,3 mg kleiner werde. Wenn man also Wägungen bis auf 0,01 mg sicher ausführen will, so dürfen die Schwerpunkte von Kilogrammgewichten in den beiden Wagschalen in der Höhe um nicht mehr als 3 cm differieren.

§ 98. Mittlere Dichte der Erdmasse. Das Pendel und die gewöhnliche Wage (auch die Torsions- und Bifilarwage, die wir später näher betrachten werden) haben ferner dazu gedient, die mittlere Dichte der

---

[1]) M. Thiesen, Détermination de la variation de la pesanteur avec la hauteur au Pavillon de Breteuil. Travaux et Mémoires du Bureau internat. des poids et mesures, T. VII, 1890.

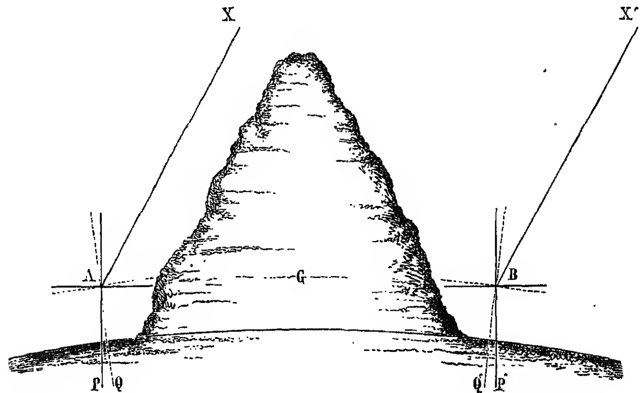
Der zweite Wert ist von Thiesen in bezug auf das umgebende Gebäude korrigiert worden.

[2]) F. Richarz und O. Krigar-Menzel, Die Abnahme der Schwere mit der Höhe, bestimmt durch Wägungen. Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 23. März 1883 und Ann. der Physik und Chemie. Neue Folge, **51**, 559, 1894.

Erde: Δ, bezogen auf die Dichte des Wassers, dieselbe als 1 gesetz
zu ermitteln.

Maskelyne und Hutton haben zuerst versucht, aus der Ablenkun, welche das Pendel oder Bleilot in der Nähe isoliert stehender Gebirge erfäh die Anziehung derselben nach dem Gravitationsgesetz zu bestimmen. Inde sie dann die Größe dieser Anziehung mit derjenigen der Erde vergliche war es ihnen möglich, aus dem bekannten Volumen des Gebirges und de Dichte seiner Masse, sowie aus den bekannten Volumen der Erde auf d mittlere Dichte dieser zu schließen. Sie wählten hierzu die Bergkett Shehallien in Schottland, an deren Nord- und Südseite die Ablenkung de Bleilotes aus der Vertikalen gegen den Berg hin gemessen wurde, wie di Fig. 308 andeutet. Da die Dichte und Größe der Bergmasse nur annähern

Fig. 308.



bekannt waren, so war eine erhebliche Sicherheit des Resultates nicht z erwarten. Bedeutend genauer schon war die Bestimmung von Cavendish welcher die Anziehung von Bleikugeln auf eine horizontale Torsionswag maß. Carlini beobachtete Pendelschwingungen auf einem Berge. Reic stellte seine, auf das gleiche Prinzip wie bei Cavendish sich stützenden Ve suche unter Anwendung einer Bifilarwage an, die größere Sicherheit als di Torsionswage gewährte. Im Auftrage der Londoner astronomischen Gesel schaft wiederholte sodann Baily die Experimente von Cavendish. Nac derselben Methode haben Cornu und Baille mit der Torsionswage seh sorgfältige Beobachtungen ausgeführt und dabei auch einen Fehler in de Bestimmungen von Baily erkannt (siehe nebenstehende Tabelle).

Airy verglich Pendelschwingungen an der Erdoberfläche und in de Tiefe eines Bergwerkschachtes von 383 m Tiefe. Mit der Wage habe Poynting und wenig später auch v. Jolly, bei dem zweiten der oben e wähnten Versuche, die Anziehung größerer Bleimassen auf Gewichte, welch auf der Wagschale sich befanden, gemessen. Mit einem Pendelapparat un großen Bleimassen bestimmte Wilsing zwei Werte und später mit de Torsionswage, Boys, endlich mit der gewöhnlichen Wage Richarz un Krigar-Menzel die mittlere Dichte der Erde. Nachstehend sind die Resu tate aller dieser Bestimmungen zusammengestellt und in der letzten Kolumn die zur Mittelbildung benutzten Werte.

Beobachter	Zeit	[illegible]	Δ
Maskelyne und Hutton	1774	4,71	
Cavendish	1798	5,48	5,48
Carlini	1824	4,84	
Reich	1838 1849	5,49 [illegible]	[illegible]
Baily	1842	5,67	
Korrigiert von Cornu		[illegible]	5,55
Airy	1854	6,57	
Korrigiert von Haughton		5,48	5,48
Cornu und Baille	1872 1873	5,56 5,50	[illegible]
Poynting	1878	[illegible] 5,46	5,49
v. Jolly	1879	5,69	5,69
Wilsing	1887	5,594 5,587	5,59
Boys		5,527	5,53
Richarz und Krigar Menzel	1896	5,505	5,50
		Mittel der letzten Reihe Δ	5,537

§ 99. **Die Gravitationskonstante.** Im § 43 wurde mitgeteilt, daß nach Newtons Entdeckung zwei Massen M und m sich mit einer Kraft anziehen, welche proportional dem Produkt ihrer Massen Mm und verkehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes R sei. Ist also M die Masse der Erde, m eine Masse an ihrer Oberfläche, R der Erdradius, so ist die Kraft mg, mit welcher die Masse m von der Erde angezogen wird, gegeben durch

$$mg = A \frac{Mm}{R^2} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo A eine Konstante ist, welche man die Gravitationskonstante nennt.

Da nach den Rechnungen der analytischen Mechanik eine Kugel so wirkt, als wenn ihre Masse im Mittelpunkt konzentriert wäre, so ist für R der Erdradius einzusetzen. Da nun (1) die Größe m beiderseits sich aufhebt, so folgt für die Gravitationskonstante

$$A = g \cdot \frac{R^2}{M} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Ist $\varDelta$ die mittlere Dichte der Erde, so ist

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 . \varDelta \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

und

$$A = g \cdot \frac{3}{4 \pi R . \varDelta} .$$

Für R ist der Radius einer Kugel zu setzen, welche gleiches Volum mit dem Erdsphäroid hat, nämlich

$$R = 6370284 \text{ m}.$$

Für Δ setzen wir den im § 98 erhaltenen Mittelwert

$$\Delta = 5 . 537.$$

Für g ist der Wert für 45° Breite zu nehmen, indessen ist der bezügliche Wert nach **Helmert** aus (10b), § 96: 980,60 cm noch mit dem Einfluß der Zentrifugalkraft aus der Drehung der Erde behaftet, während obige Formel auf die reine Anziehung ohne solche sich bezieht. Zur Elimination der Zentrifugalkraft ist, wie wir später sehen werden, der obige Wert von g um die Komponente der letzteren nach der Vertikalen des Ortes zu vergrößern, die für eine Breite φ ist:

$$F_\varphi = \frac{4\pi^2 R \cos^2\varphi}{U^2},$$

wo R wieder den mittleren Radius der Erde und U die Umdrehungszeit um ihre Achse (Sterntag), und zwar in Sekunden mittlerer Sonnenzeit repräsentiert.

Führen wir diese Werte: $R = 6\,370\,284$ m und $T = 86\,164$ s (s. § 29) ein, so kommt:

$$F_\varphi = 0{,}03\,387 . \cos^2\varphi,$$

also:

$$F_{45} = 0{,}01\,693 \text{ m}.$$

Da R oben in Meter und F_{45} auch in Meter ausgedrückt ist, so ist also die oben einzusetzende Größe:

$$g = 9{,}8060 + 0{,}0169 = 9{,}8229 \text{ m}.$$

Somit wird:

$$A = \frac{3 . 9{,}8229}{4\pi . 5{,}537 . 637\,0284} = 6{,}648 . 10^{-8}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da die Masse M oben in Cubikmeter ausgedrückt ist und 1 m³ Wasser 1 Tonne wiegt, so sagt vorstehender Wert der Gravitationskonstante auch aus, daß die Beschleunigung, welche die Masse von 1 Tonne auf 1 m Entfernung durch die Gravitationsanziehung erteilt, gleich $5{,}648 . 10^{-8}$ m pro Sekunde ist.

Die Dimension aber der Gravitationskonstante wird, da diejenige von g: $[l\ t^{-2}]$ ist, gemäß Gleichung (2):

$$\text{Gravitationskonstante: } [m^{-1}\ l^{-3}\ t^{-2}].$$

Führen wir statt 1 m als Längeneinheit 1 cm und statt der Masse von 1 Tonne die 10^6 mal kleinere von 1 g ein, so ändert sich am Zahlenwert der Konstante nach vorstehender Dimension offenbar nichts. Es wird also im (C. G. S.-)System die Gravitationskonstante dargestellt durch das Dimensionensymbol:

$$\text{Gravitationskonstante: } [C^3\, G^{-1}\, S^{-2}],$$

und der Zahlenwert derselben sagt aus, daß die Masse von 1 g einem Körper in der Entfernung von 1 cm eine Beschleunigung von $6{,}648 . 10^{-8}$ cm pro Sekunde durch die Gravitation erteilt, also die Gravitationsanziehung auf die Masse von 1 g durch die Masse von 1 g in 1 cm Entfernung gleich ist $6{,}648 . 10^{-8}$ Dynen oder 0,06648 Mikrodynen.

Die Bestimmung der Beschleunigung der Schwere durch das Pendel hat uns also zu der der mittleren Dichtigkeit der Erde und durch diese zu derjenigen der Gravitationskonstante geführt. Wir gehen jetzt zur zweiten Hauptanwendung des Pendels über.

§ 100. Anwendung des Pendels zur Regulierung der Uhren; Metronom. Die Länge des einfachen Sekundenpendels ist gegeben durch:

$$l = \frac{g}{\pi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wird also wie g mit der Breite und Höhe variieren. Nach der Formel von Helmert für g ist daher:

$$l_{\varphi, h} = 99{,}092\ (1 + 0{,}005310 . \sin^2 \varphi)\ (1 - 0{,}0000003140 . h)\ \text{cm} \quad . \ . \ (2)$$

so daß also z. B. in 45⁰ Breite und am Pol je im Meeresniveau ist:

$$l_{45;0} = 99{,}355\ \text{cm}, \quad l_{90;0} = 99{,}619\ \text{cm}.$$

Vom Äquator zum Pol nimmt somit die Länge des einfachen Sekundenpendels um etwas über 5 mm zu. Nachdem man die Benutzung dieser Länge als Naturmaßeinheit für die Länge verlassen hat, hat ihre genaue Kenntnis keine praktische Bedeutung mehr.

Pendeluhr. Dagegen hat schon Galilei die Idee gehabt, das Pendel zur Regulierung der Uhr zu verwenden, wie die beistehende Kopie, Fig. 309, in verkleinertem Maßstabe einer von ihm hinterlassenen, nach seinen Angaben von seinem Sohn Vicenzo und seinem Schüler Viviani angefertigten Zeichnung beweist, deren Ausführung er nicht mehr erlebt hat[1]).

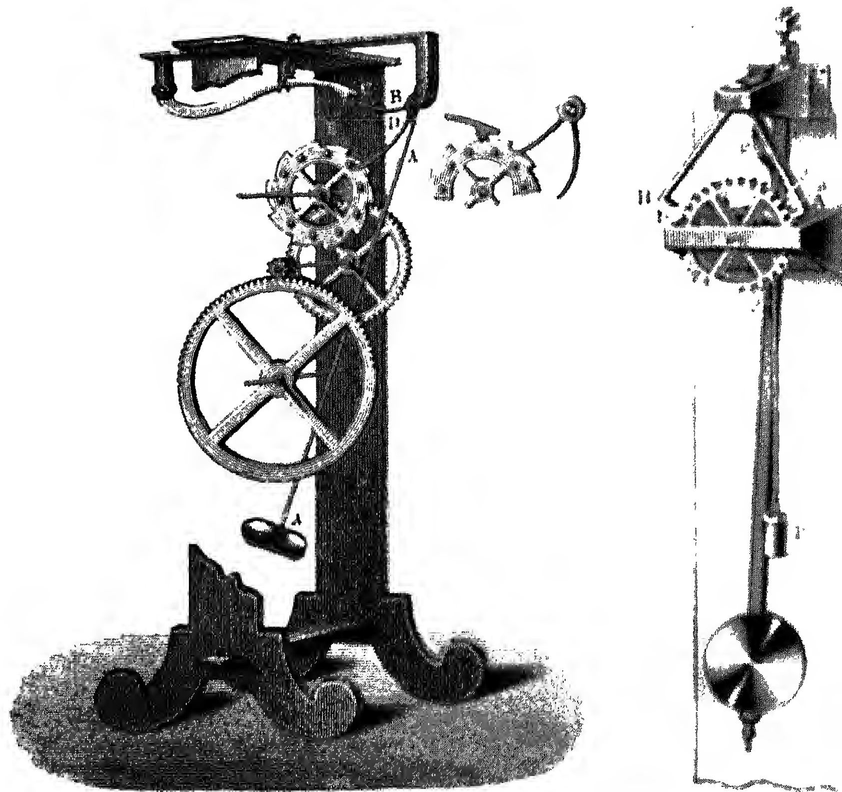
Als Erfinder der Pendeluhr in ihrer heutigen Gestalt ist Chr. Huygens anzusehen.

Wie hiernach die Regulierung der Bewegung einer Uhr durch das Pendel erfolgt, zeigt Fig. 310. Auf dem festen Uhrbrette ist vermittelst eines Metallbügels die Achse einer Welle mit Zahnrad befestigt und auf dieser Welle ist die Schnur aufgewunden, an welcher das treibende Gewicht P hängt. Dieses würde für sich dem Wellrade eine beschleunigte drehende Bewegung erteilen, was durch das Pendel verhindert wird. Dieses ist nämlich weiter oben vermittelst einer Feder, die als Drehungsachse dient, am Brette aufgehängt und greift mittels eines Stiftes in den Schlitz des Armes gg ein, der an einer vom Bügel C getragenen drehbaren Welle befestigt ist. An derselben Welle sitzt weiter vorn der Anker AB, der mit den Haken an seinen Enden in die Lücken der Zähne des Zahrades einfallen kann. Bei den Schwingungen des Pendels greift abwechselnd der eine und andere Arm des Ankers mit seinem Haken in das Zahnrad ein, wie es z. B. in der Zeichnung mit dem Arme A der Fall ist, der den Zahn a des Zahnrades bei der äußersten Stellung des Pendels nach links anhält, so daß die Drehung des Wellrades, die durch das Gewicht erfolgt, gehemmt wird. Wenn nun das Pendel zurückschwingt, so verläßt der Haken von A den Zahn a, so daß sich das Rad drehen kann, aber nur um einen halben Zahn, indem sofort auf der anderen Seite der Haken des Armes B in das Zahnrad eingreift und den Zahn b bei der äußersten Stellung des Pendels auf dieser Seite ebenfalls festhält. Schwingt dann das Pendel wieder auf die erste Seite aus, so wird das Rad ebenfalls für einen Moment frei und kann um einen halben Zahn sich weiter drehen, bis der Haken von A in die folgende Zahnlücke eingreift und der folgende Zahn c des Rades sich jetzt an den Haken anlegt. Wenn also das Pendel wieder

[1]) Dieselbe findet sich samt einer Wiedergabe der darauf bezüglichen Mitteilungen Vivianis in R. Biedermanns Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London 1876, S. 411.

zum Ausgangspunkte zurückgekehrt ist, also zwei Schwingungen [illegible] hat, so hat sich in zwei Sprüngen das Zahnrad um einen Zahn vorw[...] gedreht; hat es also 30 Zähne, so wird ein an seiner Achse befestigter Z[...] in 60 Sprüngen den Kreisumfang zurückgelegt haben [illegible] Sekun[...] zeiger entsprechen, wenn die Schwingungsdauer des Pendels eine Sek[...] beträgt. Dies kann durch Verschieben der schweren Linse an der Pe[...] stange vermittelst der Schraubenmutter, auf die sie sich stützt, erzielt wer[...] Die Bewegung der Uhrzeiger ist somit keine gleichförmige, sondern

Fig. [illegible]

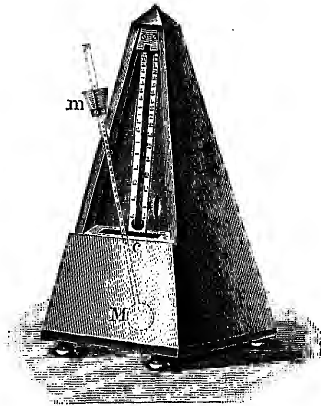


sprungweise, aber durch das Pendel auf gleiche Intervalle regulierte, [...] aber beim Stundenzeiger wegen der großen Verlangsamung für das unbe[...] nete Auge bereits als eine gleichförmige erscheinen. Infolge der Rei[...] und des Luftwiderstandes würde das Pendel allmählich zur Ruhe kom[...] dies wird aber bei der Uhr dadurch verhütet, daß die Zähne des Zahnr[...] jeweilen bei der Hemmung einen Druck auf die Ankerhaken ausüben [...] damit durch das Mittel des Ankers dem Pendel den Bewegungsverlust z[...] ersetzen. Damit dies im richtigen Verhältnis geschieht, muß das trei[...] Gewicht den Reibungsverlusten so angepaßt werden, daß das Pendel [...] dieselbe Schwingungsamplitude beibehält.

Metronom. Um durch ein Pendel beliebig zu bestimmende Zeit[...] valle angeben zu können, hat **Mälzel** (1816) den Taktmesser (Metro[...]

Fig. 311) konstruiert, indem er an einer mit einer Federuhr verbundenen Pendelstange mit der Hauptmasse M jenseits der Drehungsachse c noch eine verschiebbare Masse m anbrachte. Bezeichnen wir die Entfernungen der Massen M und m von der Drehungsachse mit D und d, so ist mit Vernachlässigung der Masse des dünnen Stabes die Entfernung L des Schwerpunktes, in welchem die Masse $M + m$ angreift, gegeben durch:

Fig. 311.



$$L = \frac{MD - m \cdot d}{M + m},$$

also das Drehungsmoment der Massen:

$$(M + m) \cdot L = 9\ (MD - md),$$

und das Trägheitsmoment:

$$K = MD^2 + md^2.$$

Es ist somit die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels angenähert:

$$l = \frac{MD^2 + md^2}{MD - md},$$

woraus folgt, daß man durch Vergrößerung von d gegenüber D auch bei einem kurzen Pendel beliebige große l bzw. Schwingungsdauern erzielen kann.

Es gibt noch eine andere Art von Pendeln, nämlich horizontale Pendel mit vertikaler Drehungsachse, welch letztere durch Fäden oder Drähte dargestellt werden, wie das Torsionspendel oder die Torsionswage, das bifilare Pendel oder die Bifilarwage und das sogenannte Horizontalpendel, sie sollen an einer anderen Stelle behandelt werden.

§ 101. Foucaults Pendelversuch. Nach dem Gesetze vom Beharrungsvermögen oder der Trägheit verharrt jeder Körper in dem Zustande der Ruhe oder der Bewegung, in welchem er sich eben befindet, falls nicht eine äußere Kraft auf ihn einwirkt, welche seine Geschwindigkeit nach Größe oder Richtung verändert. Die Stärke des Impulses, welcher auf eine Masse m wirken muß, um ihr die Geschwindigkeit v zu erteilen, ist durch das Produkt mv gegeben. Da nach Newton die Reaktion stets gleich der Aktion ist, so können wir auch sagen, daß sich der Körper von der Masse m mit einem Widerstande von der Größe mv jeder Änderung seiner Geschwindigkeit um den Betrag v widersetze. Dies gilt nicht allein, wenn dem ruhenden Körper die Geschwindigkeit v erteilt oder dem mit der Geschwindigkeit v behafteten Körper diese genommen werden soll, sondern auch dann, wenn ihm Geschwindigkeit in anderer Richtung gegeben werden soll. Daher kommt es, daß jeder Körper einer Änderung seiner Bewegungsrichtung einen Widerstand entgegensetzt, welcher abhängt von der ihm erteilten Bewegungsgröße mv.

Diese Schlußweise findet Anwendung auf das Verhalten schwingender und rotierender Körper. Auf die letzteren werden wir später zurückkommen;

hier soll die Anwendung auf die Schwingungen des Pendels erörtert werden. Das Pendel behält seine Schwingungsebene im Raume unverändert bei, solange nicht eine äußere Kraft ablenkend auf dieselbe einwirkt.

Um dies zu zeigen, bedient man sich der einfachen Vorrichtung Fig. 312, welche so auf eine Schwungmaschine befestigt wird, daß bei Drehung derselben der Aufhängepunkt B keinen Kreis beschreibt.

Gibt man dem Fadenpendel einen Anstoß, so daß es in einer bestimmten Ebene schwingt, und dreht dann die Schwungmaschine langsam herum, so

Fig. 313

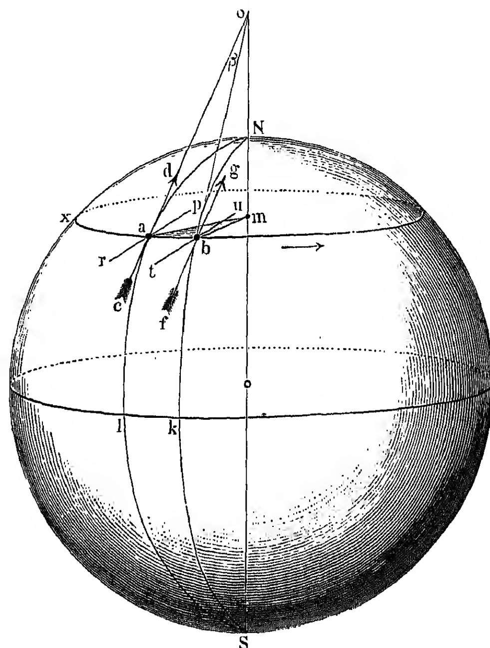
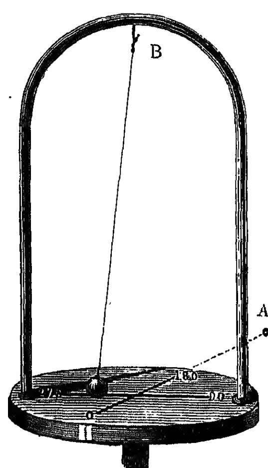


Fig. 312.



behält das Pendel den Weltgegenden gegenüber die Lage seiner Schwingungsebene bei. Denkt man sich nun an Stelle der Schwungmaschine die rotierende Erde gesetzt, also das Pendel über einem der Erdpole aufgehängt, so muß ebenfalls die Schwingungsebene in ihrer Orientierung zum Weltall erhalten bleiben, während unter demselben die Erde von West nach Ost vorbei rotiert.

Ein daneben aufgestellter Beobachter würde offenbar den Eindruck erhalten, daß die Schwingungsebene binnen 24 Stunden in Richtung von Osten nach Westen im Kreise gedreht werde. Würde man ein Pendel am Äquator der Erde aufhängen, so könnte daselbst keinerlei Drehung eintreten, da daselbst die Erde keinerlei Rotation in bezug auf eine durch den Aufhängepunkt des Pendels gehende Vertikallinie hat.

An allen Punkten zwischen Pol und Äquator wird eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene eintreten, welche sich um so bedeutender einstellen muß, je näher dem Pole der Aufstellungspunkt des Pendels liegt. Auf der nördlichen Halbkugel wird diese Drehung in der Richtung Ost, Süd, West, auf der südlichen nach der Richtung Ost, Nord, West erfolgen.

Die Rechnung lehrt, daß der Drehungswinkel dem Sinus der geographischen Breite proportional ist. Um dies nachzuweisen, möge in Fig. 313 NS

s ist die Aufgabe der Chemie, die verschiedenen Stoffe kennen zu , zu klassifizieren und ihre Veränderungen zu studieren. Durch die erfahren wir, daß sich viele Stoffe in einfachere zerlegen und aus n zusammensetzen lassen. Diejenigen Stoffe, welche sich nicht weiter en lassen, heißt man Grundstoffe oder Elemente.

)ie wichtigste Eigenschaft der Materie ist ihre Unzerstörbarkeit. Es rfahrungsgemäß kein Mittel, um eine einmal vorhandene Menge von e zu vermehren, zu vermindern oder zu vernichten.

ndere Eigenschaften derselben werden an späterer Stelle besprochen n.

ther. Eine große Gruppe von Erscheinungen (Licht, strahlende e, magnetische und elektrische Fernwirkung) hat die Physiker genötigt, der gewöhnlichen mit dem Tastsinne wahrnehmbaren und wägbaren e noch eine materielle Substanz von außerordentlicher Feinheit anzu- n, welche den ganzen unserer Beobachtung zugänglichen Weltenraum, alle Körper erfüllt. Dieselbe wird Äther (Lichtäther, Weltäther) nt. Die Eigenschaften, welche wir diesem Äther zuschreiben müssen, an geeigneter Stelle dargelegt werden.

)agegen ist die Annahme des früher von den Physikern vorausgesetzten nestoffs, sowie die der magnetischen und elektrischen Fluida rlich geworden.

8. **Allgemeine Eigenschaften der Materie.** Unter allgemeinen schaften der Materie versteht man solche, welche jeder Materie ohne schied zukommen. Es sind folgende:

. Raumerfüllung oder Ausdehnung. Jeder Körper nimmt Raum ein, dessen Größe sein Volumen genannt wird; er erstreckt abei nach drei Dimensionen, die wir als Länge, Breite und Höhe nnen.

. Undurchdringlichkeit. Mit dieser Eigenschaft soll gesagt werden, demselben Raume, den die Materie eines Körpers einnimmt, nicht zu- ein anderer sein kann. Darauf beruht auch die Tastbarkeit der r. Wenn eine abgeschossene Kugel ein Stück Holz durchdringt, so lie Holzmasse selbst nicht durchdrungen, sondern zur Seite gedrängt. o durchdringt das Wasser nicht die Materie des Schwammes, sondern nur dessen Poren. Wenn Wasser ein Stück Zucker durchdringt, so nt eine Zuckerlösung, welche die Poren des Zuckerstückes ausfüllt.

. Teilbarkeit. Alle Körper lassen sich auf mechanischem Wege, Spalten, Zerstoßen, Zerreiben, Ausziehen usw. in kleinere Teile zer- Ein spröder Körper, z. B. Glas, läßt sich in einer Achatschale zunächst t zerreiben, daß weder der Finger die einzelnen Teilchen noch fühlt, das Auge dieselben zu unterscheiden vermag. Sie haben dann weniger)1 mm Durchmesser. Dennoch fühlt man noch zwischen den Zähnen zelnen Körnchen. Durch fortgesetztes Zerreiben und Schlämmen

die Erdachse, $xabz$ den Parallelkreis durch den Standpunkt des Pendels und m den Mittelpunkt dieses Kreises vorstellen.

Das Pendel schwinge in a in der Richtung des Pfeiles cd, also in der Meridianebene. Eine in dieser Ebene an den Punkt a gezogene Tangente treffe die verlängerte Erdachse in O, der Winkel aom ist gleich der geographischen Breite des Punktes a und werde mit φ bezeichnet.

Nach einiger Zeit gelangt der Ort a infolge der Achsendrehung der Erde nach b, die Tangente erhält die Lage bo, das Pendel schwingt aber parallel mit cd in der Richtung des Pfeiles fg, seine Ebene bildet also mit der Meridianebene einen Winkel $gbo = aob$, welcher mit β bezeichnet werde. Gleichzeitig hat sich die Erde um den Winkel $amb = \alpha$ gedreht. Aus

$$\alpha : \beta = bo : bm$$

folgt:

$$\beta = \alpha \frac{bm}{bo} = \alpha \sin \varphi.$$

An diesem Resultate würde nichts geändert, wenn die Schwingungsebene in a bereits einen Winkel mit dem Meridian gebildet hätte.

Auf dem Vorgetragenen beruht der Foucaultsche Pendelversuch, welcher als ein direkter physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde im Jahre 1852 von Foucault im großen Maßstabe zur Ausführung gebracht wurde, indem er an der Kuppel des Pantheons an einem 67 m langen Stahldraht eine 28 kg schwere Kugel aufhängte und als Pendel in Schwingungen versetzte. Der Versuch gelingt jedoch auch in kleinerem Maßstabe unter Anwendung einiger Vorsichtsmaßregeln [1]).

§ 102. Verminderung der Schwere durch die Zentrifugalkraft.

Wir sind jetzt auch imstande, die Verminderung, welche die Schwere auf der Erde durch die Zentrifugalkraft erleidet, genau zu bestimmen. Unter dem Äquator wird die letztere für die Masse 1 nach § 51 sein:

$$F_0 = \frac{4 \pi^2 R}{T^2},$$

wenn R der Radius der Erde daselbst, d. h. 6378250 m, und T die Umlaufszeit der Erde, d. h. 86164 Sekunden darstellt.

Es ist also in Centimetern:

$$F_0 = 3{,}391.$$

Vom Äquator gegen die Pole hin wird der schwächende Einfluß der Fliehkraft immer geringer, einmal, weil der Radius der Parallelkreise immer kleiner wird, also in der Breite φ statt R sein wird $R . \cos \varphi$, und sodann, weil nicht die ganze radial wirkende Fliehkraft, sondern bloß ihre Komponente nach der Vertikalen des Ortes, also: $F . \cos \varphi$ der Schwere entgegenwirkt. Es ist somit in einer Breite φ die Verminderung der Schwere durch die Zentrifugalkraft gegeben durch:

$$F_\varphi = F_0 . \cos^2 \varphi = F_0 (1 - \sin^2 \varphi);$$

---

[1]) Siehe Weinhold, „Physikalische Demonstrationen", S. 97. Die oben gegebene Ableitung ist nicht strenge richtig. Vgl. die Zusammenstellung neuerer Untersuchungen in Günthers Lehrbuch der Geophysik I, S. 233.

also auch:

$$F_0 - F_\varphi = F_0 \sin^2\varphi = 3{,}391 . \sin^2\varphi.$$

Nun ist nach § 96, Formel 10 b, die bereits um die Zentrifugalkraft verminderte Schwere am Äquator: 978,0, also wird diejenige in der Breite φ sein:

$$g_\varphi = 978{,}0 + 3{,}391 \sin^2\varphi,$$
$$= 978{,}0\ (1 + 0{,}003647 . \sin^2\varphi).$$

In der Formel (§ 96, 10) von Helmert ist aber der Koeffizient von $\sin^2\varphi$ viel größer, nämlich 0,005310, was dem weiteren Anwachsen der Schwere vom Äquator zum Pol infolge der Abplattung der Erde an den Polen zuzuschreiben ist. Die Differenz beider Größen entspricht dem letzteren Effekt.

§ 103. Verhältnis der Schwerkraft auf der Erde zur Anziehung des Mondes durch die letztere. Wenn die Anziehung, welche der Mond der allgemeinen Gravitation zufolge durch die Erde erfährt, in der Tat derselben Kraft entspringt, welche einen Stein auf der Erdoberfläche fallen macht, so muß sich jene Anziehung Z zu g verhalten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernung E des Mondes und der Erdoberfläche vom Erdzentrum oder der Radius R der Erde, also soll sein:

$$\frac{Z}{g} = \frac{R^2}{E^2}.$$

Andererseits muß aber die Anziehung Z gleich sein der Zentrifugalkraft des Mondes bei seiner Bewegung um die Erde, also:

$$Z = \frac{4\,\pi^2 E}{U_{,}^2},$$

wo $U_{,}$ die Umlaufszeit des Mondes um die Erde darstellt.

Es soll also sein:

$$g \cdot \frac{R^2}{E^2} = \frac{4\,\pi^2 E}{U_{,}^2}.$$

Nun ist:

$$R = 6370000\,\text{m}, \quad E = 384000000\,\text{m}$$

und $U_{,} = 2361000$ Sekunden, und wenn wir für g die Schwere am Pol einführen: $g = 983{,}2$ cm. Mit befriedigender Übereinstimmung in Anbetracht der Unsicherheit mancher Größen ergeben sich so für die Beschleunigungen durch Gravitation und durch Fliehkraft die Werte:

0,2706 und 0,2719 cm,

d. h. die Beschleunigung, welche die Erde durch ihre Anziehung dem Monde gegen sich hin pro Sekunde erteilen würde, ist 0,27 cm pro Sekunde und wird also in der Tat durch die entgegengesetzt gerichtete Zentrifugalkraft des Mondes in seiner Bahn aufgehoben, womit die Identität der Schwere auf der Erdoberfläche mit der allgemeinen Gravitation nachgewiesen ist, wie dies zuerst Newton getan hat.

§ 104. Verhalten rotierender Körper. Wenn ein Körper sich um eine Achse dreht, in bezug auf welche die Massenteilchen desselben ganz symmetrisch angeordnet sind, so werden sich die Zentrifugalkräfte entsprechend gelegener Teilchen beiderseits der Achse aufheben, und es wird daher die

Achse keinerlei einseitigen Druck auszuhalten haben. Eine solche durch den Schwerpunkt gehende Achse heißt man eine Hauptachse der freien Drehung oder eine freie Achse, deren es drei in jedem Körper gibt; diejenige, für welche das Trägheitsmoment den größten Wert hat, ist insoweit stabil, als der Körper bei der Rotation von selbst in diese Lage zurückkehrt. Die Trägheit wird mit

Fig. 314.

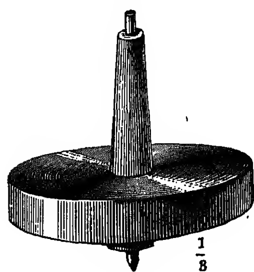


Fig. 315.

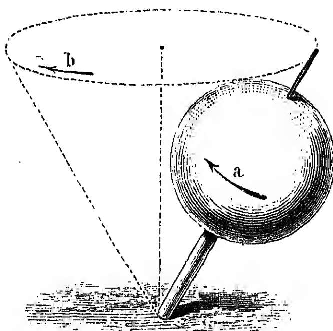


Fig. 316.

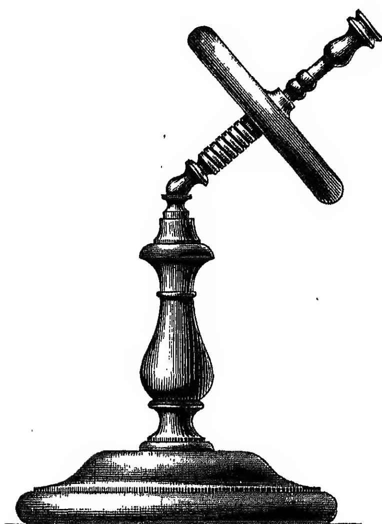
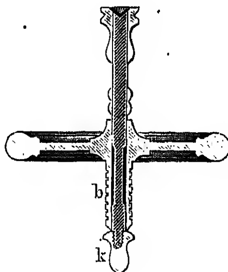


Fig. 317.



ihrer Bewegungsgröße $m \cdot v$ die Lage der Achse im Raume um so stärker festhalten, je größer die Geschwindigkeit der Drehung und die Masse des Körpers sind. Auf dieser Eigenschaft beruht der Kreisel, der seine Achse ange Zeit unverändert beibehält, wenn er wie in Fig. 314 aus einer schweren Bleischeibe mit stählerner, unten zugespitzter Achse besteht und etwa durch Abziehen einer auf seine Achse aufgewundenen Schnur in rasche Rotation versetzt wird. Er widersetzt sich mit einer gewissen Kraft jeder Umstellung der Achse durch einen seitlichen Druck. Gibt man der Achse des Kreisels absichtlich wie in Fig. 315 eine schiefe Lage, so daß sein Schwerpunkt außerhalb des Stützpunktes fällt, also die Schwere ihn beständig umzustürzen sucht, so geschieht dies nicht, sondern es erfolgt eine langsame Verschiebung der Achse senkrecht zu der Richtung der störenden Kraft, so daß die Achse, wie es die Figur andeutet, die Oberfläche eines Kegels um die vertikale Stellung beschreibt. Die Pfeile *a* und *b* zeigen die entsprechenden Bewegungsrichtungen an. Diese langsame Umstellung der Rotationsachse heißt man Präcession. Einen für diese Versuche geeigneten Apparat stellt Fig. 316 dar.

Die Fig. 317 gibt einen Durchschnitt durch den auf den Fuß aufgesetzten Kreisel.

Noch viel schöner und sicherer läßt sich diese langsame Drehung einer Rotationsachse an dem Gyroskop, Fig. 318, zeigen. *a* ist eine runde messingene Scheibe, deren äußere Begrenzung durch einen dicken messingenen Wulst gebildet wird. Durch die Mitte dieser Scheibe geht eine stählerne, in Spitzen laufende Achse *b*, welche von einem messingenen Ringe *c* getragen wird.

An den Ring *c* ist in der Vertikalebene der Achse *b* ein etwas vorragendes Metallstückchen *n* aufgeschraubt, welches mittels einer in seiner Unterfläche angebrachten Vertiefung auf die Stahlspitze *o* aufgesetzt werden kann.

Geschähe dies, während die Messingscheibe *a* nicht um ihre Achse rotiert, so könnte der Ring *c* mit allem, was in ihm befestigt ist, die horizontale Stellung nicht behaupten, in welcher ihn unsere Figur darstellt, sein Schwer-

Fig. 318.

Fig. 319.

punkt würde sich rasch niedersenken müssen. Wenn aber die Scheibe *a* vor dem Aufsetzen von *n* auf die Spitze *o* durch kräftiges Abziehen einer um die stählerne Achse *b* gewickelten Schnur in rasche Rotation versetzt worden ist, so behält er die horizontale Stellung bei, während er sich nun langsam in horizontaler Ebene um die Spitze *o* umdreht. Erst nach einiger Zeit, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *a* infolge der unvermeidlichen Reibung bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat, beginnt der Ring *c* samt seinem Inhalte allmählich zu sinken.

Der Bohnenbergersche Präzessionsapparat, bei welchem der schwere Körper mit seiner Rotationsachse, wie die Fig. 319 zeigt, noch um zwei senkrecht zueinander stehende Achsen drehbar aufgestellt ist, gestattet, wie leicht ersichtlich, eine allgemeinere Verwendung.

Wie sich die fragliche Erscheinung, wenigstens in ihren Hauptzügen, ohne Kalkül erklären läßt, hat Poggendorff in seinen Annalen[1]) gezeigt. Auf unseren speziellen Fall angewandt, würde die Poggendorffsche Erklärung ungefähr folgende sein:

Wenn die materielle Scheibe *nopq*, Fig. 320, um die eben horizontal stehende Achse *ab* sehr rasch rotiert, so haben alle Teilchen der Scheibe

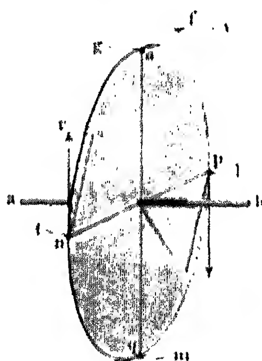
---

1) 40, 348.

tangentiale Geschwindigkeiten erlangt, welche für die Punkte *n*, *o*, *p* und *q* durch Pfeile angedeutet sind.

Wenn nun durch irgend eine Kraft die rechte Seite der Achse *ab* etwas gesenkt, also die Scheibe um die Achse *op* oder eine damit parallele etwas gedreht wird, so werden dadurch die Geschwindigkeiten, mit welchen gerade die Punkte *o* und *q* behaftet sind, nicht alteriert, sie werden nur parallel mit sich selbst verschoben. Anders verhält es sich mit den materiellen Teilchen in *n* und *p*; sie werden genötigt, aus der Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten, mit welchen sie eben behaftet sind, herauszutreten; das Teilchen *n* z. B. wird genötigt, die Richtung *ns* einzuschlagen. Dadurch wird aber offenbar die ursprüngliche Geschwindigkeit *nr* in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine *ns* die Richtung bezeichnet, welche die in *n* an die Peripherie gelegte Tangente annehmen muß, während die andere Seitenkraft *nt* rechtwinkelig zur Ebene der Scheibe als ein Druck wirkt, welcher eine Drehung um die Achse *oq* oder eine damit parallele zu bewirken strebt, und zwar in der Art, daß dadurch *b* nach vorn bewegt wird.

Fig. 320.



Wird in gleicher Weise die Geschwindigkeit zerlegt, mit welcher ursprünglich ein materielles Teilchen in *p* behaftet war, so ergibt sich eine Seitenkraft *pl*, welche parallel mit *nt* die Scheibe samt der Achse in gleicher Richtung zu drehen strebt wie *nt*.

Daraus ergibt sich zunächst, daß, wenn die Scheibe *a* des Apparates Fig. 318 in der Richtung des Pfeiles *r* rotiert, eine Drehung des Ringes *c* in der Richtung des Pfeiles *s* erfolgen muß.

Durch die Seitenkräfte *nt* und *pl*, Fig. 320, wird nun die Scheibe in der Weise um eine vertikale Achse gedreht, daß dadurch auch die Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten in *o* und *q* alteriert wird. Das Teilchen *o*, welches die Tangentialgeschwindigkeit *of* hatte, wird eine Tangentialgeschwindigkeit in der Richtung *or* annehmen müssen, die Geschwindigkeit *of* wird also in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine nach *or* gerichtet ist, während die andere *og* als ein Druck auf die Scheibe wirkend dahin strebt, die rechte Seite der Achse *ab* zu heben. eine gleiche Wirkung geht aus der Zerlegung der ursprünglichen Tangentialgeschwindigkeit von *q* hervor.

Infolge der Drehung der Rotationsachse *ab* um eine vertikale Achse treten also Kräfte auf, welche ihr äußeres Ende *b* zu heben streben, also der ursprünglich störenden Kraft gerade entgegenwirken; und so kommt es denn, daß, wenn die Rotationsgeschwindigkeit nur groß genug ist, die horizontale Lage der Rotationsachse erhalten bleibt.

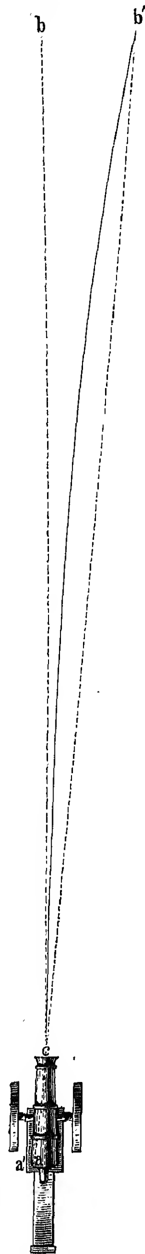
Wir haben hier nur einen speziellen Fall.

Eine vollständige Erklärung der hierher gehörigen Erscheinungen nicht allein der Art, sondern auch der Größe nach, ist ohne höhere Rechnung nicht wohl möglich.

Diese Versuche erklären auch die Präzession und Nutation der Erdachse. Auf die Erdachse üben nämlich die Sonne einerseits und der Mond anderer-

seits wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde und der Neigung der Achse Erdbahn durch ihre Anziehung eine solch umstellende Tendenz aus, info welcher die Erdachse um den Pol der Ekliptik im La von 25000 Jahren einen Konus von 23° 28′ Winkel schreibt, die man Präzession genannt hat, und die Nutat manifestiert sich als kleine Störung im Gange der Präz sion infolge einer 19 jährigen Schwankung der Mondba neigung gegen den Erdäquator.

Fig. 321 a.



Eine interessante, hierher gehörige Erscheinung ist den Artilleristen wohlbekannte Seitenabweichung der gezogenen Geschützen abgeschossenen rotierenden Projekt Man hat bemerkt, daß dieselben nicht in der Vertikalebe welche man sich durch die Rohrachse gelegt denken ka fortfliegen, sondern außer der vertikalen Krümmung Flugbahn auch eine Krümmung derselben in horizonta Richtung, und zwar meistens nach rechts zeigen. Fig. 32 stellt dieses Verhalten in übertriebenem Maßstabe dar. mit einem solchen Geschütze das anvisierte Ziel zu treff muß die Visierrichtung (durch Linksverschiebung des sehens) nach rechts gedreht werden, und zwar um so me je weiter das Ziel entfernt ist. In der Fig. 321 a ist *ab* verlängerte Rohrachse, *b′* das Ziel, *c* das Korn (oder Mücke), *a* das Absehen in der normalen, *a′* in der v schobenen Lage.

Wäre diese Abweichung durch eine schiefe Bohru des Rohres veranlaßt, so müßte, wenn man dasselbe dem Rücken liegend abfeuern würde, die Abweichung entgegengesetzte werden; auch könnte durch eine schi Bohrung nur eine Winkelabweichung, aber nicht eine ho zontal gekrümmte Flugbahn entstehen.

Diese Erscheinung erklärt sich vielmehr folgend maßen:

Zunächst ist klar, daß die Achse des Geschosses s parallel zu bleiben sucht, während die Richtung der Fl bahn ihren Winkel mit dem Horizont ändert (s. Fig. 321 wo die Lage des Geschosses am Anfang, in der Mitte u am Ende der Bahn angedeutet ist). Das Geschoß ste offenbar dem Luftwiderstande immer mehr seine Unterse entgegen. Bei den zur Anwendung kommenden Gesch formen geht nun die Resultierende des Luftwiderstand fast immer über den Schwerpunkt hinweg und sucht dah die Achse des Geschosses vorn aufzurichten. Nach d oben Vorgetragenen ist nun klar, daß eine solche Aufric tung, verbunden mit der Rechtsrotation des Geschosses, ei Drehung desselben um seine vertikale Achse herbeiführ muß, und zwar der Art, daß die Spitze nach rechts a weicht.

Ist diese Drehung einmal eingetreten, so wird durch die nun auf d linken Seite überwiegende Wirkung des Luftwiderstandes auch eine Seite

verschiebung aus der Vertikalebene der Flugbahn nach rechts eintreten müssen[1]).

Um diese Erscheinung zu demonstrieren, hat der Verfasser einen Apparat konstruiert, der die Bewegung eines rotierenden Projektils nachahmt. Derselbe ist in Fig. 322 in perspektivischer Ansicht, in Fig. 323 und 324 von oben und von der Seite gesehen gezeichnet.

Das Spitzgeschoß *A* ist innerhalb des horizontalen Rahmens *B* um seine eigene horizontale Achse drehbar und kann durch Abziehen einer in *a* eingehängten aufgewickelten Schnur in Rotation versetzt werden. An zwei an der Außenseite des Rahmens angebrachten Häkchen in *bb*, deren Verbindungslinie senkrecht auf der Rotationsachse steht und durch den Schwerpunkt des ganzen Apparates geht, sind zwei weiter oben sich vereinigende Fäden angebunden, deren gemeinschaftliche Fortsetzung bis zu einem Haken an der Decke des Zimmers reicht und dort befestigt ist. Die Einrichtung ähnelt daher dem eines sogenannten Taubenschießens.

An der Hinterseite ist ein Steuerflügel *C* in der Weise angebracht, daß durch dessen Stellung die Resultierende des Luftwiderstandes oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes des Projektils zu liegen kommt (Fig. 322 zeigt die erstere Lage). Damit durch die Verstellung des Steuerflügels der Schwerpunkt des Ganzen nicht verrückt werde, ist ein Gegengewicht *D* angefügt, so daß der Flügel sich um seinen eigenen Schwerpunkt drehen muß. Außerdem kann man den Flügel um seine Längsachse drehen oder auch ihn fortnehmen und durch einen anderen mit zwei aufeinander senkrechten Flächen (Fig. 324 *C*) ersetzen.

Mit diesem Apparate können nun folgende Experimente gemacht werden:

1. Stabilität der Rotationsachse (Vorteil der gezogenen Geschütze). Man läßt den Apparat in einem Bogen von etwa 5 m Länge schwingen, indem man ihn am Flügel haltend rückwärts zieht und fallen läßt. Rotiert das Projektil nicht, so schlägt es leicht um, oder kommt durch geringe Ursachen aus seiner Richtung, rotiert es, so bleibt sich seine Achse schön parallel. Hierbei ist dem Steuerflügel eine gegen den Luftwiderstand neutrale Stellung zu geben.

2. Seitendrehung. Man läßt nach rechts rotieren, stellt den Flügel *C* nach aufwärts, dann richtet sich die Spitze beim Vorwärtsfliegen deutlich nach rechts. Ändert

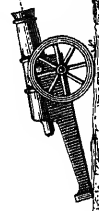


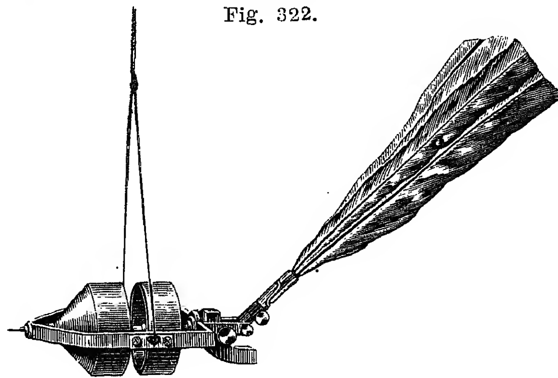
Fig. 321 b.

[1]) Außerdem bewirkt auch noch die Reibung des Geschosses an der umgebenden Luft eine Abweichung in demselben Sinne. Einen Apparat zur Demonstration dieser Wirkung hat v. Beetz angegeben.

man die Rotationsrichtung oder die Flügelstellung ins Gegenteil, so d[r]
sich die Spitze nach links, ändert man beides, so bleibt die Drehung n
rechts.

3. Seitenabweichung. Dieselbe läßt sich einigermaßen mittels
Doppelflügels (Fig. 324 *C*) erreichen. Man stellt seine Ebenen so, daß
vertikal, die andere n
aufwärts oder abw
gerichtet ist.

Fig. 322.



Der Flügel ist
diesem Apparate
halb nötig, um
größeren Luftwiderst
des viel schneller bew
ten geschossenen
jektils durch die grö
Fläche des langsa
fliegenden Apparates
erreichen.

Auf denselben Prinzipien beruhen die merkwürdigen Bewegungen
Bumerangs, eines australischen Wurfholzes, welches, wenn richtig f
geschleudert, in der Luft umkehrt und dem Werfenden zu Füßen niederf

Fig. 323.

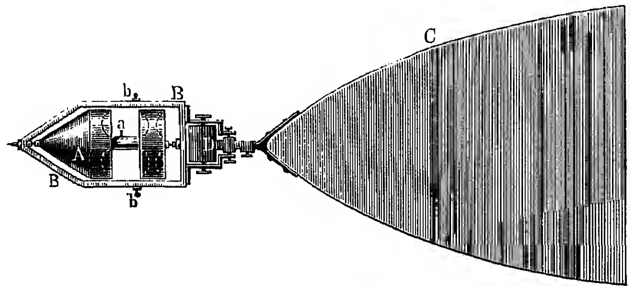


Fig. 324.

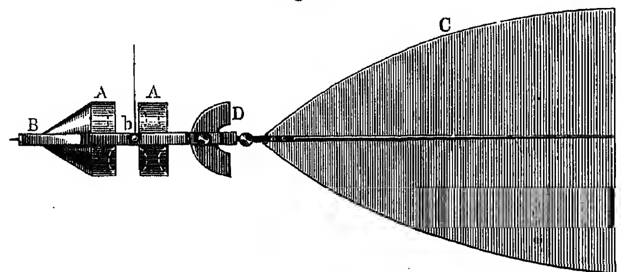


Fig. 325 *a* und *b* zeigt die Hauptformen des Bumerangs. Es sind m
oder weniger gebogene Hölzer von 70 bis 80 cm ausgestreckter Länge, 5
6 cm Breite und 1 cm Dicke. Ihr Querschnitt ist derselbe wie bei e
plankonvexen Linse. Außerdem haben dieselben eine Torsion von 2
3 Graden in der Weise, daß bei dem Typus *a* eine Schraubenfläche
sprechend einer rechtshändigen Schraube, beim Typus *b* einer linkshändi

Schraube vorhanden ist[1]). Fig. 326 zeigt, wie der Bumerang gehandhabt wird; man gibt ihm gleichzeitig eine Rotation im Sinne des Pfeiles und eine fortschreitende Geschwindigkeit in horizontaler Richtung. Er fliegt dann unter günstigen Umständen bis 100 m weit und darüber, wendet nach links und

Fig. 325.

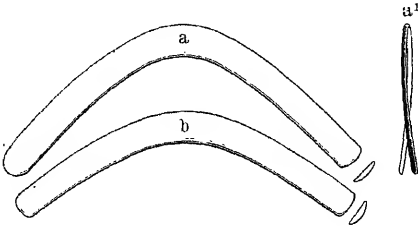
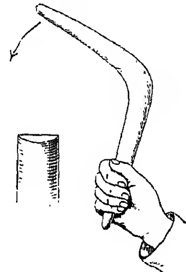
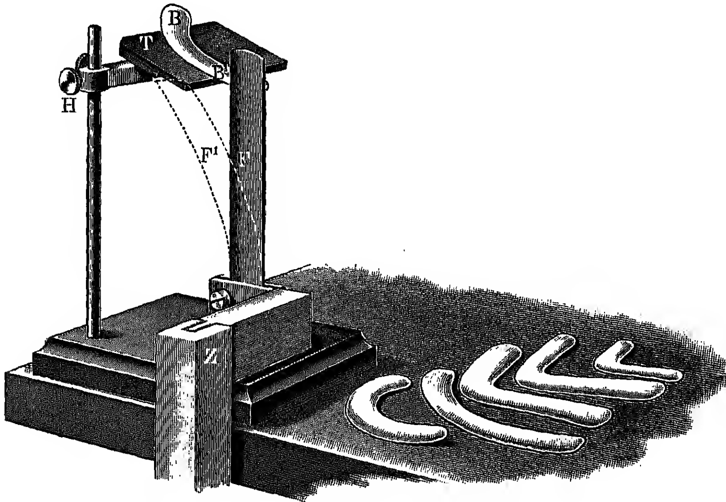


Fig. 326.



kommt nach Zurücklegung eines, manchmal mehrerer (bis zu fünf) Kreise wieder zum Ausgangspunkte zurück. Eine zweite Art, ihn zu werfen, geht

Fig. 327.



von horizontaler Lage seiner Ebene aus. Er fliegt dann eine Strecke weit, steigt dann in die Höhe und kehrt zurück. Der Typus *b* zeigt mehr geradlinige, in sich zurückkehrende Bahnen.

Um solche Experimente im Hörsaale vornehmen zu können und von der Geschicklichkeit des Werfenden unabhängig zu machen, hat der Verfasser kleine Bumerangs aus hohlgeklopftem Aluminiumblech und eine Schleudervorrichtung, Fig. 327, konstruiert[2]). Dieselbe besteht aus einer vertikal eingespannten breiten Stahlfeder *F*, einem verstellbaren und drehbaren Tischchen *T* mit Halter *H*, welche auf gemeinsamem Fußbrette befestigt sind und mittels

[1]) Gilbert T. Walker, Phys. Zeitschr. 2, 457.

[2]) Wiener Akad. Ber. 1905, der Apparat ist beim Institutsmechaniker Rabsch in Graz erhältlich.

einer Zwinge Z an den Tisch angeschraubt werden konnte. Der Bu[illegible] wird, nachdem man die Feder F in die Lage L zurückgezogen, [illegible] Tischchen aufgelegt, wie die Figur zeigt. Läßt man die Feder los, [illegible] so fliegt der Bumerang 6 bis 8 m weit schief in die Höhe und kehrt [illegible] zum Ausgangspunkte zurück.

Auf die sehr komplizierte Theorie des Bumerangs können wir [illegible] eingehen. Wir beschränken uns auf die Bemerkung, daß die [illegible] Bewegungen das Resultat der Zusammensetzung der Rotationen u[illegible] Einflusses des Luftwiderstandes ist [1].

---

[1]) Erdmann, Erklärung der Bahnen des [illegible] (1869); W. Stille, Versuche und Rechnungen [illegible] Bumerangs, Poggend. Ann. 147, [illegible] Phys. Zeitschr. 2, 457—461 (1901).

kann man es dahin bringen, daß auch zwischen den Zähnen kein Körnchen wahrgenommen wird. Aber das Mikroskop läßt dann immer noch einzelne Bruchstücke unterscheiden, deren Durchmesser nur $^{2}/_{1000}$ der Dicke eines Menschenhaares beträgt.

Der verstorbene Optiker Nobert hat auf Glas mittels seiner Teilmaschine mit einer Diamantspitze 5000 Furchen auf 1 mm Breite gezogen.

In der Technik werden Fäden von Kupfer, Eisen und Silber angewendet, welche ebenso fein sind wie ein Haar; ja Wollaston hat Platindraht dargestellt, welcher nur $^{1}/_{1200}$ mm dick war. Man müßte 140 solcher Drähte zusammenlegen, um nur die Dicke eines einzelnen Kokonfadens zu erhalten, und obgleich das Platin der schwerste aller bekannten Stoffe ist, so würde ein solcher Draht von 100 m Länge kaum 0,07 g wiegen. Um einen solchen Draht zu erhalten, nahm Wollaston einen Platindraht, dessen Durchmesser 0,25 mm betrug, befestigte ihn in der Achse einer zylindrischen Form von 5 mm Durchmesser, goß diese Form mit geschmolzenem Silber aus und erhielt so einen Zylinder von Silber, dessen Achse aus Platin bestand. Diesen Zylinder ließ er nun durch einen Drahtzug gehen; beide Metalle verlängerten sich dabei gleichmäßig. Nachdem nun der zusammengesetzte Faden bis zur äußerst möglichen Feinheit ausgezogen worden war, kochte er ihn in Salpetersäure, welche das Silber auflöste und den Kern von Platin bloßlegte. Durch Erhitzen von sich berührenden Quarzstücken bis zum Weichwerden und Wegschleudern des einen Stückes mittels einer Armbrust lassen sich Quarzfäden herstellen, welche mit unbewaffnetem Auge kaum mehr sichtbar sind. Sie finden zur Aufhängung von Elektrometernadeln u. dgl. mancherlei Anwendung.

Die Dicke des Goldüberzuges auf vergoldeten Silberfäden der Lyoner Tressen beträgt nach Réaumur nur wenig über 0,0001 mm. Ein Centigramm Karmin färbt einen Liter Wasser noch merklich rot, ein Centigramm Fuchsin ein noch größeres Volum von Alkohol. Nach Achards Berechnung wird dabei ein Cubikcentimeter in acht Millionen Teilchen zerlegt. Bei durch Indigo noch schwach blau gefärbtem Wasser geht diese Zerteilung nach Parrot sogar bis auf 30 Billionen Teilchen. Nach Kirchhoff und Bunsen wird eine Gasflamme schon durch weniger als ein Millionstel Milligramm Kochsalz merklich gelb gefärbt.

Noch weiter geht die Teilbarkeit der Riechstoffe, wie z. B. Campher, Moschus, Asa foetida. Nach Versuchen von Kreil kann ein Cubikcentimeter des letzteren Riechstoffes 1200 Billionen wahrnehmbare Teilchen liefern.

Es ist bekannt, daß viele Tiere einen sehr entwickelten Geruchssinn haben. Die Gemse wittert den Jäger auf 100 Schritt Entfernung, wenn der Luftzug günstig ist. Wie außerordentlich klein müssen die Teilchen sein, welche von der Körperoberfläche des Jägers bis ins Geruchsorgan des Tieres getragen werden! Auf der Fährte der Tiere und der Menschen bleiben ebenfalls verschwindend kleine Körpermengen zurück, welche durch ihre Verflüchtigung dem Hunde ermöglichen, die Spuren durch den Geruchssinn zu verfolgen. Und doch kann es nur ein kleiner Bruchteil der auf der Spur zurückgebliebenen materiellen Teilchen sein, welche auf die Geruchsorgane des Hundes wirken.

Die Frage, ob es überhaupt eine Grenze der Teilbarkeit gebe, führt auf eine unfruchtbare Spekulation hinaus. Man kann sich die Materie entweder

Viertes Kapitel.

Mechanik nichtstarrer, fester Körper.

§ 105. Allgemeines über die Eigenschaften nichtstarrer Körper. Im § 58 wurde bemerkt, daß es vollkommen starre Körper, streng genommen, gar nicht gibt, weil allen wirklichen Körpern ein mehr oder minder hoher Grad von Teilbeweglichkeit zukommt. Bei den im vorausgehenden Kapitel vorgenommenen Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung der festen Körper wurde von dieser Teilbeweglichkeit vorderhand abgesehen, d. h. die Körper wurden als starr angenommen. Dies ist in vielen Fällen mit genügender Annäherung zulässig, in vielen anderen Fällen aber nicht. Die Mitberücksichtigung der Teilbeweglichkeit führt im allgemeinen zu sehr komplizierten und schwierigen Untersuchungen. Der hier verfügbare Raum und das Ausmaß der vorauszusetzenden mathematischen Kenntnisse legt uns aber Beschränkungen auf, so daß wir nur die allerwichtigsten Tatsachen und Lehrsätze besprechen können [1].

Plastizität. Derjenige Grenzfall, der sich von dem Falle vollkommener Starrheit am weitesten entfernt, besteht darin, daß die Teilchen des Körpers einer Verschiebung gar keine Kraft entgegensetzen. Diesem Grenzfalle nähern sich am meisten die dünnflüssigen Stoffe (flüssiges Kohlendioxyd, Schwefeläther, Wasser, Quecksilber), mit denen wir uns hier nicht beschäftigen. Unter den als „fest" bezeichneten Körpern sind es die plastischen Stoffe, welche sich dem erwähnten Grenzzustande nähern, also z. B. weiches Wachs, feuchter Ton, in geringerem Grade Blei, Gold usw. Solche Körper lassen sich, je nach der Art des Zusammenhanges ihrer Teile und ihrer Formänderung, kneten, hämmern, walzen, prägen, ziehen, spinnen. Das Charakteristische dieses Zustandes liegt darin, daß infolge des Mangels von Kräften, welche den ursprünglichen Zustand wiederherzustellen suchen, die durch die einwirkenden Kräfte verursachten Verschiebungen auch nach dem Aufhören der Kräfte erhalten bleiben.

Elastizität. Der andere Grenzfall wäre der, bei welchem durch die eintretenden Verschiebungen der Teilchen Gegenkräfte geweckt werden, welche nach dem Aufhören der äußeren Kräfte die verschobenen Teilchen wieder in ihre ursprüngliche Anordnung zurückbringen. Geschähe dies, was in Wirklichkeit nicht vorkommt, sofort und vollkommen, so würden wir einen solchen Körper vollkommen elastisch nennen. Dem vollkommen elastischen Zustande

---

[1] Für eingehenderen Unterricht verweisen wir auf Spezialwerke, so insbesondere auf Ad. Wernickes Lehrbuch der Mechanik III. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn, 1903

nähern sich z. B. Stahl, Elfenbein, Glas, Gummielastikum. Je nach der Art
Verschiebung unterscheiden wir Zug- und Druckelastizität, Biegung
elastizität, Torsionselastizität und Schubelastizität (Scherungselastizit
Alle diese zusammen werden als Gestaltselastizität bezeichnet. Fin
der Druck von allen Seiten gleichmäßig statt, so erfährt ein elastischer Kö
eine Volumsverminderung, welcher die Volums- (Kompressions-) elastizi
entspricht. Unter Elastizität versteht man aber nicht bloß die Eigensch
der Körper, Verschiebungen der Teile Widerstand entgegenzustellen, sond
auch die Kraft, mit der es geschieht. Diese ist nach dem Prinzip
Gleichheit von Aktion und Reaktion ebenso groß wie die äußere Kraft, wel
die Verschiebung bewirkt.

Elastizitätsgrenze. Die elastischen Körper zeigen unter sich bede
tende Unterschiede in bezug auf die Größe der Verschiebungen, die sie erlei
können, ohne daß ihre Eigenschaft, die ursprüngliche Form wieder an
nehmen, aufhört. So z. B. kann man ein Kautschukband wohl bis zur do
pelten Länge ausziehen; es nimmt nachher doch wieder die ursprüngli
Länge an. Ein Stahlband gleicher Dimensionen verträgt nur ein geringe
Ausziehen. Wird eine gewisse Grenze der Verlängerung überschritten,
bleibt ein Teil derselben nachher erhalten, das Band ist bleibend gedeh
worden. Die elastischen Körper sind also nur bis zur Elastizitätsgren
mehr oder weniger vollkommen elastisch, über diese Grenze hinaus nähe
sie sich zunächst dem plastischen Zustande.

Festigkeit. Wird die Verschiebung (Verlängerung usw.) noch wei
getrieben, so kommt eine weitere Grenze, wo der Zusammenhang der Teilch
plötzlich ganz aufhört. Der gedehnte Körper wird zerrissen, der gebog
bricht ab, der komprimierte wird zermalmt usw. Die Festigkeit gegen
Eindringen eines anderen Körpers wird Härte genannt.

Sprödigkeit. Körper, deren Elastizitäts- und Festigkeitsgrenzen se
beschränkt sind, deren Teilchen also schon bei sehr geringen Verschiebung
den Zusammenhang verlieren, heißen spröde. Sprödigkeit und Elastizi
sind daher eigentlich keine Gegensätze. Derselbe Körper, der für gerin
Verschiebungen noch sehr elastisch ist, kann für nur wenig größere Ve
schiebungen sehr spröde sein. So z. B. sind harter Stahl, Glas, die Mehrza
der kristallisierten Körper elastisch und spröde. Aber auch Plastizität u
Sprödigkeit, obwohl Gegensätze, können an ein und demselben Körper vo
kommen. So z. B. ist eine Siegellackstange für geringe Verschiebung
(insbesondere wenn sie langsam erfolgen) noch plastisch, dagegen für etw
größere (insbesondere rasche) Verschiebungen spröde. Beispiele größ
Sprödigkeit sind die bekannten batavischen Tränen sowie die Bologne
Fläschchen, welche bei der geringsten Verletzung in viele Teile zersplitter
Diese Erscheinung hat aber hier den Grund in inneren Spannungen infol
der raschen Abkühlung des Glases während des Erstarrens.

Einfluß der mechanischen Behandlung. Die erwähnten Eige
schaften hängen bei den amorphen Körpern nicht allein von deren chemisch
Zusammensetzung, sondern in hohem Grade auch von deren vorausgegangen
mechanischer Behandlung ab. So z. B. ist sowohl Elastizität als auch Festi
keit verschieden groß für Stäbe, welche nur aus gegossenem Metalle od
aus gehämmertem, gezogenem Metalle bestehen.

Einfluß der Wärme. Derselbe zeigt sich in doppelter Weise. Einmal ändern sich die erwähnten Eigenschaften mit der Temperatur des Körpers, so z. B. zeigt Stahl bei tiefer Temperatur größere Sprödigkeit, bei höherer Temperatur größere Dehnbarkeit, während Zink bei 120° C am dehnbarsten ist, dagegen in der Kälte und über 200° spröde erscheint.

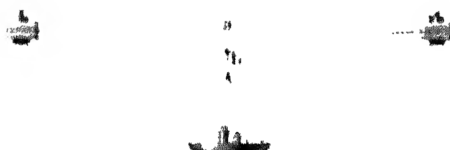
Dann aber bewirkt eine Erwärmung auch eine bleibende Veränderung, welche nach dem Erkalten fortdauert. So z. B. erfährt der durch rasches Abkühlen gehärtete und spröde gewordene Stahl durch vorübergehendes Erwärmen auf Temperaturen von 200 bis 350° eine gradweise Veränderung seiner Eigenschaften von der größten Härte bis zur größten Dehnbarkeit (Anlassen des Stahles). Man pflegt hierbei in der Praxis den Grad der Veränderung aus den Anlauffarben, mit denen sich eine blanke Oberfläche überzieht, zu erschließen.

Einfluß der Zeit. Es wurde bereits oben bemerkt, daß eine Siegellackstange für rasche Biegungen spröde, für langsame plastisch erscheint. Wir erklären uns dies aus der Annahme, daß die Moleküle des Harzes, welche durch die Deformation in gespannte Lagen gekommen sind, allmählich durch langsame Bewegungen (Fließen) in ungespannte gegenseitige Lagen gelangen.

Hierher gehören auch die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung. Spannt man eine elastische Feder, so ist die Kraft, mit der sie in die ursprüngliche Lage zurückzukehren sucht, unmittelbar nach der Spannung am größten, nimmt dann aber allmählich bis zu einem gewissen Grade ab. Auch kehrt sie nach kurzer Spannung vollkommener in die frühere Lage zurück als nach längerer Spannung. Endlich findet die Rückkehr in die frühere Form nicht sofort in voller Weise statt, sondern es dauert längere Zeit, bis die letzten Formänderungen einen Abschluß erlangen.

§ 106. Elastizitätskoeffizient und Elastizitätsmodulus. Um die Verlängerung zu messen, welche Drähte erfahren, wenn sie durch Gewichte innerhalb ihrer Elastizitätsgrenze gespannt werden, welche also weder Zerreißung noch eine merkliche bleibende Verlängerung erfahren, wandte S'Gravesande folgende Methode an. Der zu prüfende Draht wurde, wie Fig. 328 andeutet, in horizontaler Richtung ausgespannt, an beiden Enden fest eingeklemmt und dann in der Mitte durch Gewichte belastet. Wird die Länge *ab* gemessen, um welche die Mitte des Drahtes durch das angehängte Gewicht niedergezogen wird, so läßt sich daraus leicht die Verlängerung berechnen, welche der Draht erfahren hat.

Fig. 328.



Diese Methode ist für dickere Drähte und für Stäbe nicht mehr anwendbar. Wertheim fand es am zweckmäßigsten, die Verlängerung direkt zu messen, und zwar auf folgende Weise. Der Stab, dessen Verlängerung gemessen werden sollte, war oben in einen eisernen Träger (Fig. 329, S. 331) eingeklemmt und trug unten einen Haken, an welchen ein zur Aufnahme von Gewichten dienender Kasten angehängt wurde. Auf dem Stabe waren zwei Punkte *a* und *b* markiert, deren Abstand vor und während der Belastung

Die elastischen Körper folgen innerhalb gewisser Grenzen einem 167 von Hookes nachgewiesenen Gesetze, demzufolge die Deformationen de sie hervorbringenden Kräften direkt proportional sind. Nur sowe die Körper diesem Gesetze folgen, sind sie als vollkommen elastisch anzusehe

Die elastische Verlängerung eines Drahtes oder Stabes ist demnach pr portional:

1. dem angehängten Gewichte,
2. der Länge des Stabes,
3. umgekehrt dem Querschnitt des Stabes.

Die Verlängerung d, welche ein Stab von der Länge l und dem Que schnitt f durch ein Gewicht P erleidet, ist also:

$$d = k\frac{Pl}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (
$$

wenn k einen konstanten Faktor bezeichnet, welcher für jede Substanz ein besonderen Wert hat und welcher der Elastizitätskoeffizient genannt wir

Aus Gleichung (1) folgt:

$$\frac{Pl}{df} = \frac{1}{k} = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (
$$

Da k für jede Substanz eine konstante Größe ist, so ist auch $\frac{1}{k}$ oder eine konstante Größe, welche mit dem Namen des Elastizitätsmodulu bezeichnet wird. Denken wir uns in Gleichung (2) $l = 1$, $f = 1$ und $d =$ gesetzt, so wird $P = E$; E ist also das Gewicht, welches erforderlich wä um einen Stab von dem Querschnitt 1 und der Länge 1 um die Länge auszudehnen, oder, was dasselbe ist, um ihn auf das Doppelte seiner ursprün lichen Länge auszuziehen, vorausgesetzt, daß er eine solche Dehnung oh Überschreitung der Elastizitätsgrenze ertragen könnte.

Verschiedene Physiker haben die Elastizitätskonstanten mehrerer Sto mit möglichster Genauigkeit bestimmt. Die vollständigsten Untersuchung über diesen Gegenstand sind aber diejenigen, welche Wertheim angestellt hat[1]

Die wichtigsten Resultate seiner Versuche über Metalle sind in folgend Tabelle zusammengestellt.

	Angelassen		Gezogen	
	k	E	k	E
Blei	0,000570	1727	0,000555	1803
Gold	0,000179	5585	0,000123	8131
Silber	0,000140	7141	0,000137	7274
Zink	—	—	0,000114	8734
Kupfer	0,000095	10519	0,000080	12449
Platin	0,000064	15518	0,000058	17044
Stahldraht	0,000058	17278	0,000053	18809
Gußstahl	0,000051	19561	0,000051	19549
Eisen	0,000048	20794	0,000048	20869
Messing	—	—	0,000117	8543

[1]) Pogg. Ann., Ergänzungsband II.

Unter k findet man, um den wievielten Teil seiner Länge ein Draht des in der ersten Kolumne genannten Metalles von 1 qmm Querschnitt verlängert wird, wenn er durch ein Gewicht von 1 kg gespannt wird. Ein 1 m langer Silberdraht von 1 qmm Querschnitt wird also durch Anhängen von 1 kg um 0,14 mm verlängert. — Auch die unter E stehenden Zahlen beziehen sich auf 1 qmm Querschnitt.

Für verschiedene Glassorten erhielten Wertheim und Chevandier folgende Werte von k und E:

	k	E
Spiegelglas	0,000 142	7015
Fensterglas	0,000 126	7917
Kristallglas	0,000 145	6890
desgl. bleihaltig . .	0,000 182	5477

Als Elastizitätsgrenze bezeichnet man das Gewicht, welches eine bleibende Verlängerung von 0,000 05 der Stab- oder Drahtlänge bewirkt, welches also einen 1 m langen Draht bleibend um 0,05 mm verlängert. Die folgende Tabelle gibt in dem eben angedeuteten Sinne die Elastizitätsgrenze für Drähte von 1 qmm Querschnitt in Kilogrammen.

	Elastizitätsgrenze	Verlängerung bei der Elastizitätsgrenze	Verlängerungsmaxima
Blei, ausgezogen	0,25	0,000 14	0,243
„ angelassen	0,20	0,000 12	0,614
Silber, ausgezogen	11	0,001 49	0,0045
„ angelassen	3	0,000 36	0,168
Kupfer, ausgezogen	12	0,000 93	0,003
„ angelassen	3	0,000 27	0,220
Platin, ausgezogen	26	0,001 42	—
„ angelassen	14	0,000 81	0,0023
Eisen, ausgezogen	32	0,001 50	0,026
„ angelassen	5	0,000 22	0,109
Stahldraht, ausgezogen	43	0,002 00	—
„ angelassen	15	0,000 56	0,0044

Ferner finden wir in dieser Tabelle angegeben, um den wievielten Teil seiner Länge ein Draht von 1 qmm Querschnitt höchstens ausgezogen werden darf, wenn keine merkliche Verlängerung zurückbleiben soll; in der letzten Kolumne endlich findet man angegeben, um den wievielten Teil ihrer Länge Drähte noch ausgezogen werden können, ehe der Bruch erfolgt.

So sehen wir z. B., daß man an einen ausgezogenen Kupferdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bis zu 12 kg anhängen darf, ohne daß er eine merkliche (über 0,05 mm gehende) bleibende Verlängerung erfährt, daß der fragliche Draht durch 12 kg um 0,93 mm elastisch verlängert wird, und daß er im ganzen um 3 mm ausgezogen werden kann, ehe der Bruch erfolgt.

Wertheim und Chevandier[1]) fanden für Holzstäbe in der Richt der Fasern bei 20 Proz. Feuchtigkeit folgende Werte für die Elastizit konstanten (auf 1 qmm Querschnitt bezogen).

	Spezifisches Gewicht	Elastizitätskoeffizient λ	Elastizitätsmodulu E	Elastizit grenz
Akazie	0,717	0,000792	1262	[illegible]
Tanne (Pin. abies)	0,493	0,000[illegible]	111[illegible]	2,2
Föhre (Pin. silv.)	0,559	0,00077[illegible]	[illegible]4	1,6
Hagebuche	0,756	0,000921	1086	1,[illegible]
Birke	0,812	0,00100[illegible]	[illegible]	1,6
Buche	0,823	0,001020	980	2,[illegible]
Eiche	0,872	0,0010[illegible]	921	2,[illegible]
Ahorn	0,674	0,000[illegible]	1021	2,7
Pappel	0,477	0,001934	517	1,[illegible]

Durch akustische Versuche ermittelten Wertheim und Chevand folgende Werte für den Elastizitätsmodulus verschiedener Holzarten der Richtung des Radius und in der Richtung der Tangente:

	In der Richtung	
	des Radius	der Tangente
Hagebuche	208	10[illegible]
Ahorn	157	[illegible]
Eiche	189	1[illegible]
Birke	81	1[illegible]
Buche	270	159
Pappel	73	[illegible]
Tanne	94	[illegible]
Föhre	97	[illegible]

Die Proportionalität zwischen der Verlängerung und dem spannend Gewichte findet auch bei spiralförmig gewundenen Metalldrähten, sogenannt Spiralfedern, statt, nur ist hier eine verhältnismäßig kleine Kraft sch imstande, bedeutende Verlängerungen zu bewirken, wie sich dies z. an Jollys Federwage (Fig. 330) zeigen läßt. — Ein spiralförmig gew dener Draht (etwa Klaviersaite Nr. 6) ist bei a aufgehängt und trägt seinem unteren Ende zwei kleine Wagschalen c und d, von denen die letzt stets in Wasser eingetaucht ist. Das Glas, welches das Wasser enthält, st auf einem Träger B, der am Stativ A auf und nieder geschoben werden kan und welcher stets so zu stellen ist, daß d frei im Wasser schwebt. Um d Stellung der Marke m bequem und sicher ablesen zu können, ist die s

[1]) Pogg. Ann., Ergänzungsband II, S. 481.

Stativ A angebrachte Teilung auf einen Spiegelstreifen aufgetragen. Um richtig abzulesen, mit welchem Teilstrich der Skala sich m in gleicher Höhe befindet, hat man das Auge in eine solche Stellung zu bringen, daß die Marke m mit ihrem Spiegelbilde zusammenfällt.

Bei einer Spirale von 36 Windungen der oben bezeichneten Drahtsorte stellte sich z. B. die Marke m beim Teilstrich 64 ein, als die Wage nicht weiter belastet war. Als auf die Wagschale c das Gewicht von 1 g aufgelegt wurde, mußte man den Schieber B niedersenken, um die Wagschale d im Wasser frei schwebend zu erhalten und nun stellte sich die Marke m beim

Fig. 330.

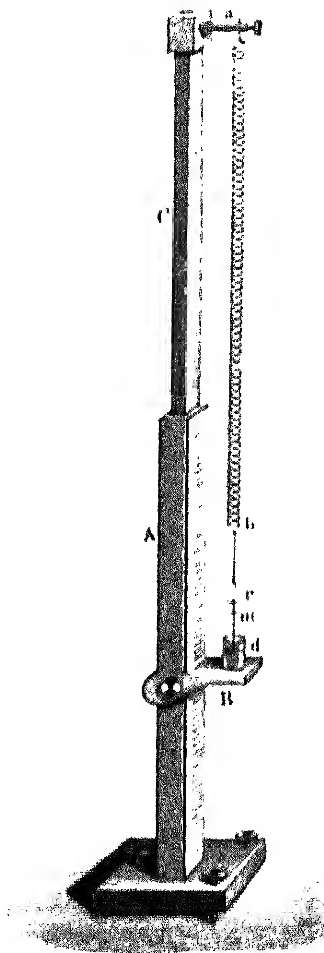
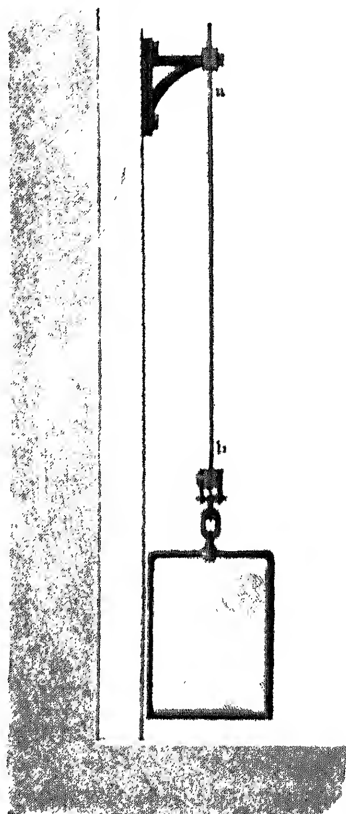


Fig. 331.



Teilstrich 436 ein. Die Spirale hat also durch die Last von 1 g eine Verlängerung von 436 − 64 = 372 Teilstrichen erhalten. Durch ein Gewicht von 0,5 oder 0,1 g erleidet sie eine Verlängerung von 186 oder 37,2 Teilstrichen. 1 mg verlängert die Spirale um 0,372 Teilstriche.

Das Auflegen eines kleinen Kristalls auf die Wagschale c bewirkte eine Verlängerung der Spirale um 211 Teilstriche, das Gewicht dieses Kristalls beträgt also $\frac{211}{372} = 0{,}567$ g. Um das spezifische Gewicht des Kristalls zu

bestimmen, wird er in die in Wasser eingetauchte Schale d gebracht u dann eine abermalige Wägung ausgeführt[1]).

Nach demselben Prinzip hat man auch Federwagen mit stärkerem Sta draht für den alltäglichen Gebrauch konstruiert, wie eine solche in Fig. 3 die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf, dargestellt ist. Während dieser Federwage die (bis 9 kg schwer angehängten Lasten die Spiralfeder v längern, wird bei der Briefwag Fig. 332, die Spiralfeder durch die a gelegten Gewichte zusammengedrüc

Fig. 331.

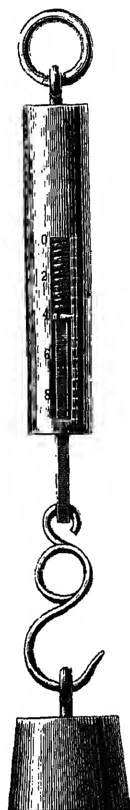
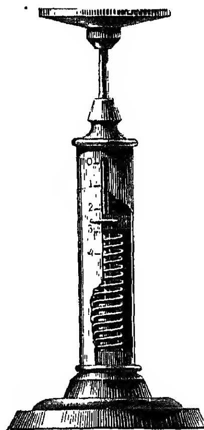


Fig. 332.



Bei der Federwage wirkt das (wicht des zu wägenden Körpers, welc von der Intensität der Schwerkraft hängig ist, der von der Intensität Schwerkraft unabhängigen Elastizi der Federn entgegen; für densell Körper würden also die Angaben Federwage verschieden ausfallen, we die Intensität der Schwerkraft s änderte. Dieselbe Last z. B., welc an den Haken der Federwage, Fig. 3 angehängt, auf der Erde den Zeig bis zum Teilstrich 6 herunterzieht, würde denselben dem Monde nur bis zum Teilstrich 1 herabziehen könn Die Wägungen mit der gewöhnlichen zweiarmigen Wa sind dagegen von der Intensität der Schwerkra ganz unabhängig, weil etwaige Variationen derselb ganz gleichmäßig auf den Inhalt beider Wagschalen wirk

Eine Spiralfederwage von entsprechend starkem Stal draht kann auch als Zugkraftmesser (Dynamomete gebraucht werden.

§ 107. Volumveränderung durch Zug. Na Poissons theoretischen Entwickelungen wird der Durc messer eines Stabes im Verhältnis von 1 zu $1 - \frac{\lambda}{4}$ verkleinert, wenn Länge desselben durch Ziehen im Verhältnis von 1 zu $1 + \lambda$ vermehrt word ist[2]). Damit stimmen die Resultate der Versuche von Cagniard La To überein, welche auf folgende Weise angestellt wurden. Der Metallst dessen unteres Ende festgehalten ist, während sein oberes Ende durch ei Hebelvorrichtung aufwärts gezogen wird, wie Fig. 333 anschaulich mac

[1]) Über die Verwendbarkeit der Jollyschen Federwage hat Prof. A. Stei hauser Untersuchungen veröffentlicht in der Zeitschrift „Die Realschule", 18 III. Jahrg. Nr. 4 u. 5.

[2]) Man bezeichnet das Verhältnis zwischen der Querkontraktion zur Län dilatation $\frac{\lambda'}{\lambda} = \mu$ als „Elastizitätszahl". Nach Poisson ist also $\mu = \frac{1}{4}$, na Wertheim $\mu = \frac{1}{3}$.

t von einer engen, mit Wasser gefüllten Glasröhre umgeben. Sobald der tab, durch Anziehen verlängert, dünner wird, senkt sich der Spiegel des Vassers in der Röhre, und man braucht nur die Größe dieser Senkung u messen, um daraus die Verminderung des Stabdurchmessers berechnen u können.

Wertheims Versuche stimmen jedoch mit diesen Resultaten nicht übern. Zunächst machte er Versuche mit Kautschukstäben von quadratischem uerschnitt, Fig. 334; er fand irch direkte Messung, daß, enn diese Stäbe durch anehängte Gewichte im Verältnis von 1 zu $1+\lambda$ verngert werden, die Seite des uerschnittes im Verhältnis on 1 zu $1-\frac{\lambda}{3}$ abnimmt.

Fig. 333.

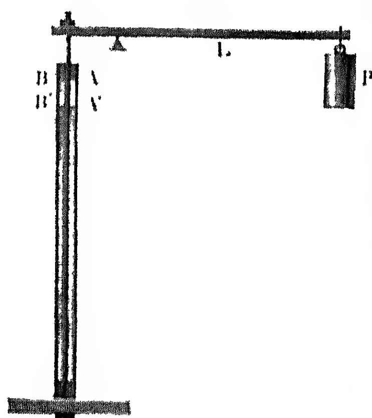


Fig. 334.



– Zu dem gleichen Resultat ihrten Versuche mit Messingöhren, welche, mit Wasser efüllt, am oberen Ende mit nem engen Glasröhrchen in erbindung standen. Durch usziehen der Röhre verändert ch der Rauminhalt derselben, wie man aus der Veränderung es Wasserstandes im Glasröhrchen erkennt.

Wenn sich der Durchmesser des Stabes im Verhältnis von zu $1-\frac{\lambda}{3}$ verkleinert, so nimmt der Flächeninhalt des Querhnittes ab im Verhältnis von 1 zu $1-\frac{2}{3}\lambda$ (da λ klein genug t, um seine höheren Potenzen zu vernachlässigen). Das Volumen des anzen Stabes ändert sich aber im Verhältnis von

$$1 \text{ zu } (1+\lambda)\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right),$$

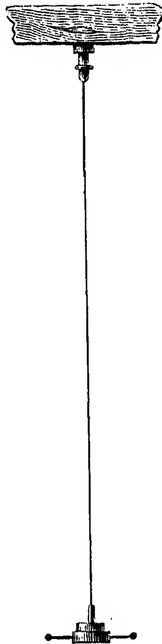
der, was dasselbe ist, im Verhältnis von 1 zu $1+\frac{1}{3}\lambda$.

Diese Ausdrücke lassen sich sofort von Zug auf Druck übertragen, indem an den Größen λ und $\lambda' = \mu\lambda$ das entgegengesetzte Zeichen gibt. Für autschuk haben andere Forscher für μ den Wert $\frac{1}{2}$ erhalten. Es scheint so die Größe μ keinen konstanten Wert zu haben, sondern von einer Subanz zur anderen zu wechseln.

§ 108. Torsionselastizität. Wenn ein Stab an einem Ende festklemmt, an dem anderen Ende durch irgend eine Kraft um seine Achse ngedreht wird, so erleiden die einzelnen Teilchen eine Verschiebung, durch elche eine elastische Kraft hervorgerufen wird, welche die verschobenen eilchen wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt. Um die rscheinung der Torsionselastizität an Drähten zu studieren, werden sie an

ihrem oberen Ende eingeklemmt, wie Fig. 335 zeigt, unten aber durch G
wichte belastet. Wenn man das Gewicht aus seiner ursprünglichen Lage
einen bestimmten Winkel herausdreht, wobei die Achse
Drahtes die Umdrehungsachse bildet, und es sich dann sel
überläßt, so wird es durch die Torsionselastizität zunäc
in seine Gleichgewichtslage zurückgeführt. In der Glei
gewichtslage angekommen, bleibt es aber nicht in dersell
stehen, sondern es geht infolge seiner Trägheit über diese
hinaus, den Draht nach der entgegengesetzten Seite winde
und so entsteht eine Reihe von Schwingungen, welche klei
und kleiner werden, bis endlich der Draht mit dem an
hängten Gewichte in seiner Gleichgewichtslage zur R
kommt.

Fig. 335.



In Beziehung auf die Größe der Torsionskraft gel
folgende Gesetze:

1. Die Torsionskraft ist dem Drehungswin
proportional; wenn man also das untere Ende des Drah
um $2n$, $3n$, $4n$ Grade usw. aus der Gleichgewichtsl
herausdreht, so ist die dadurch hervorgerufene Torsio
kraft 2-, 3-, 4- usw. mal so groß, als wenn die Drehung
n Grade betragen hätte. Dies Gesetz geht daraus herv
daß die Schwingungsdauer von der Größe der ursprü
lichen Drehung unabhängig ist, vorausgesetzt, daß man
Elastizitätsgrenze nicht überschritten hat.

Auf dieses Gesetz hat Coulomb, welcher überha
die Torsionselastizität zuerst gründlich studiert hat, se
Drehwage gegründet, welche als ein für die Lehre vom Magnetismus
der Elektrizität höchst wichtiges Instrument später besprochen werden s

2. Die Torsionskraft ist von der Spannung des Drahtes una
hängig.

3. Die Torsionskraft ist der Länge des Drahtes umgekeh
dagegen der vierten Potenz des Durchmessers direkt proportion

§ 109. Festigkeit. Die Kraft, mit welcher ein Körper der Trennu
seiner Teilchen widersteht, nennt man seine Festigkeit.

Der zwischen den einzelnen Teilchen eines festen Körpers stattfinde
Zusammenhang läßt sich durch Zerreißen, durch Zerbrechen, durch Z
winden (Abdrehen) oder durch Zerdrücken aufheben.

Absolute Festigkeit nennt man die Kraft, mit welcher ein Kör
dem Zerreißen widersteht, wenn er der Länge nach gespannt wird. Die
Widerstand ist dem Querschnitte des zu zerreißenden Körpers proportio
denn es muß ja der Zusammenhang von zwei-, drei-, viermal soviel Teilc
aufgehoben werden, wenn der Querschnitt des Körpers zwei-, drei-, vier
so groß ist. Es ist also

$$P = qk,$$

wenn P die absolute Festigkeit, also die eben zum Zerreißen nötige Kr
q den Querschnitt des Körpers und k einen konstanten Faktor bezeich
welcher von der Natur der zu zerreißenden Substanz abhängig ist. Die

als kontinuierlich den Raum ausfüllend oder aus diskreten Teilchen mit Zwischenräumen bestehend denken. Im ersten Falle kann es theoretisch keine Grenze der Teilbarkeit geben, denn blieben wir bei irgend einer Teilungsstufe stehen, so könnten wir uns die letzten Dimensionen immer wieder halbiert denken. Nehmen wir aber an, die Materie bestehe aus diskreten Teilchen, so müßte die fortgesetzte Teilung zunächst einmal bis zur Isolierung eines solchen Teilchens führen, und wir ständen dann wieder vor der Frage, ob dieses weiter teilbar sei. Die Erfahrung kann darüber nichts lehren, daher gehört die Frage nicht in die Physik.

Von der mechanischen Teilbarkeit ist streng zu unterscheiden die chemische Teilbarkeit (Zersetzbarkeit), auf welche wir später zurückkommen werden.

4. *Porosität.* Wenn man nicht die Annahme einer kontinuierlichen Ausfüllung des Raumes durch die Materie machen will, so muß man Zwischenräume annehmen. Denn die Erfahrung lehrt, daß sich die Körper durch Druck oder Abkühlung (ausnahmsweise durch Erwärmung) auf einen kleineren Raum zusammendrängen lassen. Wenn nun keine Zwischenräume wären, so müßten sich die Teilchen der Materie gegenseitig durchdringen, was mit der Eigenschaft der Undurchdringlichkeit unvereinbar wäre. Nennt man diese Zwischenräume *Poren*, so sind alle Körper porös. Gewöhnlich werden aber nur die größeren Zwischenräume, die direkt mit dem Auge oder mittels des Mikroskops sichtbar sind, als Poren bezeichnet.

Beispiele gröbster Porosität sind: Badeschwamm, Bimsstein; feinere Poren, welche aber noch Quecksilber oder Wasser und Gase hindurchlassen, besitzen die Holzarten, Sandsteine, unglasierte gebrannte Tongefäße, Papier, Leder. Glühend heißes Platin läßt Wasserstoffgas hindurch. Im Glase, Bergkristall und vielen anderen Körpern sind keine Poren direkt experimentell nachweisbar. Man pflegt sie daher nicht porös zu nennen, wenn wir auch aus den obigen Gründen überzeugt sein müssen, daß sie aus Teilchen mit Zwischenräumen bestehen.

5. *Trägheit oder Beharrungsvermögen* wird oft als eine allgemeine Eigenschaft der Körper bezeichnet, ist aber eigentlich keine. Diese Worte sind nur der Ausdruck des allgemeinen Grundsatzes, daß jede Veränderung eine Ursache haben muß, daß daher, wenn keine Ursache da ist, auch keine Veränderung erfolgt. Die Trägheit ist demnach nur *das Fehlen der Eigenschaft*, vermöge welcher ein Körper imstande wäre, aus sich heraus ohne eine Ursache (Kraft) seinen vorhandenen Zustand der Ruhe oder der Bewegung zu ändern. Die Ergänzung zu dieser negativen Eigenschaft bildet die

6. *Beweglichkeit*, das ist die Eigenschaft, unter dem Einflusse von Ursachen (Kräften) den momentanen Zustand der Ruhe oder der Bewegung zu ändern. Diese Eigenschaft kommt den Körpern in allen ihren Teilen zu und wird dann auch *Teilbeweglichkeit* genannt. So z. B. läßt sich ein Bleistab biegen, dehnen, tordieren (verdrehen), strecken, walzen. Bei allseitigem Drucke läßt sich das Volumen des Körpers verkleinern. Es können also die Teilchen des Körpers bis zu einem gewissen Grade verschoben, voneinander entfernt oder einander genähert werden, ohne daß eine Trennung derselben eintreten muß. Ein Körper, der diese Eigenschaft nicht im geringsten Grade hätte, wäre vollkommen *starr*. Da es einen solchen Körper

Faktor k, also die Kraft, welche eben nötig ist, um einen Stab zu zerreißen, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, wird der Festigkeitsmodulus genannt. Der Zahlenwert von k hängt davon ab, welche Flächeneinheit und welche Gewichtseinheit man wählt.

Schon Muschenbroek hat zahlreiche Versuche über die absolute Festigkeit verschiedener Körper angestellt. Die folgende Tabelle enthält den in Kilogrammen ausgedrückten Festigkeitsmodulus, wenn man das Quadratmillimeter als Flächeneinheit annimmt, also das Gewicht, welches eben nötig ist, um Drähte von einem Quadratmillimeter Querschnitt zu zerreißen, wie es Wertheim in der bereits oben zitierten Abhandlung angibt.

	Ausgezogen kg	Angelassen kg
Blei	2,2	1,9
Zinn	2,6	2,4
Gold	26	11
Silber	29	16
Kupfer	40	31
Platin	34	25
Eisen	63	48
Gußstahl	83	65
Messing	60	—

Auf denselben Querschnitt beziehen sich die folgenden von Wertheim und Chevandier ermittelten Werte für den Festigkeitsmodulus verschiedener Holzsorten:

	In der Richtung		
	der Fasern	des Radius	der Tangente
Akazie	7,93	—	—
Tanne (Pin. abies)	4,18	0,22	0,29
Föhre (Pin. silv.)	2,48	0,26	0,20
Hagebuche	2,99	1,00	0,61
Birke	4,30	0,82	1,06
Buche	3,57	0,88	0,75
Eiche	5,66	0,58	0,41
Ahorn	2,71	0,72	0,37
Pappel	1,48	0,15	0,21

Nach anderen Angaben ist die absolute Festigkeit der Holzarten bedeutend größer, so z. B. für

Eiche	6 bis 8 kg
Tanne	8 „ 9 „
Buche	8 „

Der Grund dieser Verschiedenheit ist vielleicht im ungleichen Wassergehalt, im verschiedenen Alter der Bäume, verschiedenem Standort usw. zu suchen.

Für Hanfseile ist nach älteren Bestimmungen die absolute Festigkeit für das Quadratmillimeter Querschnitt 3,5 bis 6,2.

Die große Verschiedenheit in der Festigkeit der Hanfseile rührt von der ungleichen Beschaffenheit der Materiale her, aus denen sie verfertigt sind. Dünne Seile sind verhältnismäßig stärker als dicke, weil sie aus besserem Hanf gemacht sind. Durch starkes Drehen der einzelnen Faden wird die Tragkraft der Seile bedeutend vermindert. Nasse Seile haben eine geringere Festigkeit als trockene.

Bei praktischen Anwendungen wird man der Sicherheit wegen wohl tun, bei Metallen nur ein Drittel, bei Hölzern nur ein Viertel der durch die Versuche ermittelten absoluten Festigkeit in Rechnung zu bringen.

Die Kraft, welche ein Körper dem Zerbrechen entgegensetzt, nennt man seine relative, diejenige, welche er dem Zerdrücken entgegensetzt, die rückwirkende Festigkeit. Die relative Festigkeit sowohl wie die rückwirkende steht in einem innigen Verhältnis zur absoluten, was sich auch in mathematischer Form ausdrücken läßt; doch ist hier nicht der Ort, weiter darauf einzugehen.

§ 110. Adhäsion. Dieselbe Kraft, welche die Teilchen eines festen Körpers zusammenhält, wirkt auch, um die Teilchen zweier vorher getrennter Körper zusammenzuhalten, wenn man nur imstande ist, sie in eine hinreichend innige Berührung zu bringen. So verbinden sich Spiegelplatten, welche nach der Politur dicht aneinander gelegt worden sind, oft so innig miteinander, daß sie nicht mehr getrennt werden können, ohne die Platten zu zerbrechen. Ebenso haften zwei blanke Bleiplatten, die man zusammendrückt, *fast so fest* aufeinander, als ob sie nur eine einzige Bleimasse ausmachten, vorausgesetzt, daß die Flächen, in welchen sich die beiden Bleistücke berühren, vollkommen eben und metallisch sind.

Dieses Aneinanderhaften zweier Körper wird mit dem Namen der Adhäsion bezeichnet.

Die Adhäsion zeigt sich nicht allein zwischen gleichartigen, sondern auch zwischen verschiedenartigen Körpern. Eine Bleiplatte mit einer Zinnplatte oder eine Kupferplatte mit einer Silberplatte durch Glattwalzen gezogen, gibt ein fast untrennbares Ganzes.

Besonders stark zeigt sich die Adhäsion, wenn ein flüssiger Körper mit einem festen Körper in Berührung gebracht und dann durch Erkalten oder durch Verdunstung des Lösungsmittels fest wird; hierauf beruht das Leimen, Kitten und Löten. Kittet man z. B. vermittelst Siegellack zwei Glasstücke zusammen, so kommt es oft vor, daß sich beim Auseinanderreißen nicht das Glas vom Siegellack trennt, sondern daß Stücke aus dem Glase herausgerissen werden. Wenn man eine Glasplatte mit Leim bestreicht, so haftet dieser oft so fest am Glase, daß Stücke aus demselben (dem Glase) herausgerissen werden, wenn sich der Leim beim Austrocknen zusammenzieht.

Wenn zwei Körper mit ebenen Flächen aufeinander liegen, und man den einen über den anderen hinwegschieben will, so setzt die Adhäsion dieser Bewegung ein Hindernis entgegen; die Adhäsion hat also einigen Anteil am Reibungswiderstand, der überall da überwunden werden muß, wo zwei Körper übereinander hingleiten, oder wo sich ein Körper über einen anderen

J. Stefan hat nachgewiesen[1]), daß die Adhäsion aufeinander gelegter ebener Platten in vielen Fällen nur eine scheinbare ist. Hängt man nämlich die obere Platte horizontal an einen Wagebalken und bringt sie ins Gleichgewicht, stellt die zweite Platte sehr nahe der ersteren und parallel unterhalb derselben auf, so wird durch jedes noch so kleine Übergewicht die obere Platte mit langsam beschleunigter Geschwindigkeit abgezogen. Ist die Distanz der Platten klein, ihr Durchmesser groß, so erfolgt die Bewegung anfangs so langsam, daß man längere Zeit hindurch dieselbe nicht direkt wahrzunehmen vermag. Trotzdem läßt sich durch optische Mittel (Interferenzstreifen) der Nachweis führen, daß die Bewegung der Platte sofort nach dem Auflegen eines Übergewichtes beginnt.

Am auffälligsten ist diese Erscheinung, wenn die Platten sich innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit, z. B. unter Wasser, befinden.

So beobachtete z. B. Stefan an zwei Platten von 155 mm Durchmesser, welche unter Wasser anfänglich um 0,1 mm voneinander abstanden, daß durch den kontinuierlichen Zug eines Gramms dieser Abstand in $1^1/_2$ Minuten um 0,01 mm, in 7 Minuten erst um 0,1 mm vergrößert wurde. Durch diese Langsamkeit der Bewegung irre geführt, wird man versucht, das Phänomen für ein solches zu halten, welches auf statischem Gleichgewichte beruht, während es in Wirklichkeit ein dynamisches Phänomen ist. Sollen die Platten sich entfernen, so muß sich der entstehende größere Zwischenraum zuvor mit Flüssigkeit füllen, da sonst der äußere Druck die Entfernung hindert. Infolge der Reibung dringt jedoch die umgebende Flüssigkeit anfangs nur sehr langsam ein und verursacht die Verzögerung. Stefan fand, daß sowohl in Luft als in tropfbaren Flüssigkeiten die Zeit zur Erreichung eines gewissen größeren Abstandes dem aufgelegten Übergewichte genau verkehrt proportional sei, diese Zeit wächst ferner bei gleichem Übergewicht nahezu im quadratischen Verhältnis, wenn die Plattendistanz im einfachen Verhältnis abnimmt. Endlich verhalten sich unter sonst gleichen Umständen diese Zeiten wie die vierten Potenzen der Radien der Platten. Auf die Erörterung des theoretischen Zusammenhanges dieser Gesetze mit denen der inneren Reibung müssen wir hier verzichten.

Aus dem Mitgeteilten ist nicht zu folgern, daß es überhaupt keine wahre Adhäsion gebe, wohl aber ist die Annahme der letzteren auf solche Fälle zu beschränken, in denen die Abstände der Platten so klein sind, daß sie in den Wirkungskreis der Molekularkräfte kommen.

§ 111. Vom Stoß im allgemeinen. Wenn ein in Bewegung begriffener Körper auf seiner Bahn mit irgend einem anderen Körper zusammentrifft, so entsteht ein Stoß, infolgedessen jeder den Bewegungszustand des anderen mehr oder weniger modifiziert. Der nächste in sehr kurzer Zeit vollendete Erfolg des Stoßes ist eine Formveränderung der zusammentreffenden Körper, welche vorübergehend ist bei elastischen, bleibend bei nicht elastischen Substanzen. Bei letzteren tritt überdies Wärmeentwickelung ein.

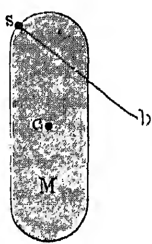
In Beziehung auf die Lage des Punktes, in welchem ein Körper zuerst durch einen anderen ihn treffenden gestoßen wird, unterscheidet man zentrale und exzentrische (nicht zentrale) Stöße. Denkt man sich auf der Ober-

[1]) Sitzungsber. d. Wiener Akademie vom Jahre 1874 (2) 69, 713.

fläche des Körpers in dem Punkte, auf welchen der Stoß erfolgt, eine Norm gezogen, so ist der Stoß zentral, wenn diese Normale durch Schwerpunkt des Körpers geht; der Stoß ist exzentrisch, we dies nicht der Fall ist.

Wie also auch eine homogene Kugel mit anderen Körpern zusammentref mag, so erleidet sie stets einen zentralen Stoß, weil alle Normalen der Kug oberfläche durch den Mittelpunkt derselben gehen; w jedoch ein homogener Körper M von der Gestalt Fig. im Punkte s von irgend einem anderen getroffen, so der Stoß in Beziehung auf diesen Körper M nicht zent weil die Normale sb nicht durch den Schwerpunkt C Körpers M geht.

Fig. 336.



In Beziehung auf die Bewegungsrichtung unterschei man den geraden und den schiefen Stoß. Beim gera Stoß fällt die Bewegungsrichtung mit der Normalen des rührungspunktes zusammen, beim schiefen Stoß ist d nicht der Fall.

Der Stoß zweier Kugeln wird also ein gerader sein, wenn sich beide der Verbindungslinie der Mittelpunkte bewegen.

Wir beschäftigen uns hier nur mit dem geraden zentralen Stoß, schiefe Stoß läßt sich auf eine Komponente des geraden zurückführen.

§ 112. **Stoß unelastischer Körper.** Wenn zwei unelastische Kör A und B, Fig. 337, mit verschiedenen Geschwindigkeiten behaftet, zusamm stoßen, so findet zunächst eine gegenseitige Zusammendrückung, eine For veränderung statt, welche endigt ist, wenn die Geschw digkeit beider Körper gleiche geworden ist. Es nun die Aufgabe, diese meinschaftliche Endgeschw digkeit zu finden.

Fig. 337.



Es seien M und M_1 die Massen der beiden Körper, c und c_1 ihre G schwindigkeiten, welche positiv bezeichnet werden sollen, wenn sie von Linken zur Rechten gerichtet sind. Die Bewegungsgrößen der beiden Körp sind Mc und $M_1 c_1$; was der eine nach dem Stoß an Bewegungsquanti eingebüßt hat, um so viel hat die Bewegungsquantität des anderen genommen, und danach läßt sich die gemeinschaftliche Geschwindigkei nach dem Stoße berechnen. Nehmen wir an, daß bei gleichgerichteter G schwindigkeit beider Körper die Geschwindigkeit c des Körpers A größer als die Geschwindigkeit c_1 des Körpers B, so ist der Verlust an Bewegun quantität, welchen A durch den Stoß erleidet, $M(c - v)$, die Zunahme Bewegungsquantität von B ist dagegen $M_1 (v - c_1)$, wir haben also

$$M(c - v) = M_1 (v - c_1)$$

und daraus

$$v = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

Wenn sich B in entgegengesetzter Richtung von A bewegt, so ist negativ, und man erhält

$$v = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Jeder Stoß unelastischer Körper ist mit einem Verlust an lebendiger Kraft verbunden. Die lebendige Kraft des Körpers A ist vor dem Stoße

$$\frac{M c_2}{2},$$

die des Körpers B ist

$$\frac{M_1 c_1^2}{2},$$

also die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße

$$M \frac{c^2}{2} + M_1 \frac{c_1^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Nach dem Stoße ist die lebendige Kraft

$$(M + M_1) \frac{v^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Zieht man den Wert (3) von (2) ab, so erhält man als Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoß

$$\alpha = M \frac{c^2 - v^2}{2} + M_1 \frac{c_1^2 - v^2}{2}.$$

Dieser Wert läßt sich in folgender Weise umformen:

$$\alpha = \frac{M}{2} (c + v)(c - v) + \frac{M_1}{2} (c_1 + v)(c_1 - v)$$

$$\alpha = \frac{M}{2} (c + v)(c - v) - \frac{M_1}{2} (v + c_1)(v - c_1). \quad . \; . \; (4)$$

Setzen wir in die Differenz $c - v$ für v seinen obigen Wert bei (1), so kommt

$$c - v = \frac{M_1 (c - c_1)}{M + M_1}$$

und

$$M (c - v) = \frac{M M_1 (c - c_1)}{M + M_1},$$

da aber $M (c - v) = M_1 (v - c_1)$, so ist auch

$$M_1 (v - c_1) = \frac{M M_1 (c - c_1)}{M + M_1}.$$

Setzt man diese Werte für $M (c - v)$ und $M_1 (v - c_1)$ in Gleichung (4), so kommt

$$\alpha = \frac{M M_1 (c - c_1)}{M + M_1} \cdot \frac{(c + v - v - c_1)}{2}$$

$$\alpha = \frac{M M_1}{M + M_1} \cdot \frac{(c - c_1)^2}{2} \text{ [1]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

[1]) Diese Formel bezieht sich auf das absolute Maßsystem; im Gravitations-Maßsystem, in welchem statt der Massen M, M_1 die Gewichte P, P_1 eingeführt werden, erhielte man

$$\alpha = \frac{P P_1}{P + P_1} \frac{(c - c_1)^2}{2g}.$$

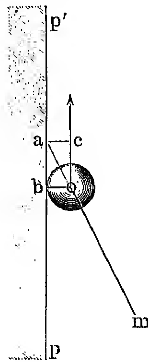
Die Größe $\frac{M M_1}{M + M_1}$ bezeichnet man als das harmonische Mit der Massen M und M_1.

Zahlenbeispiel: Wenn z. B. auf einer Eisenbahn zwei Züge 60000 kg und 80000 kg Masse in entgegengesetzter Richtung mit den schwindigkeiten $c = 7$ m und $c_1 = -5$ m sich bewegend zusammenstoß so entsteht ein auf die Zerstörung der Lokomotiven und Wagen verwende Verlust an lebendiger Kraft, welcher bei vollständigem Mangel an Elastizi aller zum Stoß gelangender Teile sein würde:

$$\frac{60000 \cdot 80000}{140000} \cdot \frac{(7 + 5)^2}{2} = 2468563 \text{ Joule (in absolutem Maße}^{1)}).$$

Aus den obigen Betrachtungen und Berechnungen geht hervor, wie na teilig Stöße in einer Maschine wirken müssen, welche nicht geradezu zur A übung von Stößen bestimmt ist, sondern in welcher selben nur infolge mangelhafter Konstruktion auftret Solche Stöße verzehren nicht allein ganz unnötigerw einen großen Teil lebendiger Kraft, sondern sie füh auch die Maschine selbst einem raschen Ruin entgegen.

Fig. 338.



Stoß einer unelastischen Kugel gegen ei ebensolche Wand. Es bewege sich die unelastis Kugel o, Fig. 338, in der Richtung ma gegen die Wand p die Strecke oa stelle die Geschwindigkeit derselben Zerlegt man diese in die auf die Wand senkrechte Kom nente ob und in die zur Wand parallele Komponente so ist ersichtlich, daß die erstere die Abplattung der Ku die letztere die Fortbewegung derselben in der Richtung parallel zur Wand bewirkt. Bei der Ausführung ei derartigen Versuches, etwa mit einer Kugel aus weichem Ton, tritt di Folgerung nur angenähert ein, weil diese Kugel immer noch etwas elasti ist und auch die entstehende Drehbewegung einen Einfluß ausübt.

§ 113. Stoß elastischer Körper. Wenn zwei Körper im gerad zentralen Stoß zusammentreffen, so ist der erste Effekt eine gegenseit Zusammendrückung, welche so lange fortdauert, bis die Geschwindigkeit beiden Massen die gleiche geworden ist. Ist bis zu diesem Moment Verschiebung der Teilchen beider Körper über ihre Elastizitätsgrenze hina gegangen, so daß ihre Formveränderung (wenn nicht gar Zertrümmerung folgt) eine bleibende ist, so erfolgt die fernere Bewegung nach den im vorig Paragraphen besprochenen Gesetzen. Ist jedoch durch Zusammendrücku der beiden zusammenstoßenden Körper in dem Augenblicke, in welchem il Geschwindigkeit die gleiche geworden ist, ihre Elastizitätsgrenze noch ni überschritten, so streben nun beide Körper, ihre ursprüngliche Gestalt wie anzunehmen, wodurch sie, in dem Berührungspunkte gegeneinander drücke gleichsam einen abermaligen Stoß erleiden. Jede Kugel erhält durch

---

[1]) Im Gravitations-Maßsystem: $\frac{60000 \cdot 80000}{140000} \cdot \frac{(7 + 5)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 251895$ mkg.

Wiederherstellung der Form den Stoß zurück, welchen sie während der Zusammendrückung auf die andere ausgeübt hat.

Zur Ableitung der Formel wollen wir wieder wie im vorigen Paragraphen von dem Fall ausgehen, daß sich beide Körper nach derselben Seite hin (nach der rechten) bewegen. Die links sich befindliche Kugel A, deren Masse M ist, habe die größere Geschwindigkeit c; wenn sie gegen die andere Kugel B, deren Masse M_1 und deren Geschwindigkeit c_1 ist, anstößt, so verliert sie beim Anstoß während der Zusammendrückung bis zu dem Moment, in welchem beide Kugeln gleiche Geschwindigkeit haben, die Bewegungsquantität $M(c - v)$, wo v dieselbe Bedeutung hat wie in § 112. Die Bewegungsquantität der Kugel B hat dabei aber um $M_1 (v - c_1)$ zugenommen. Während nun beide Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder annehmen, erleidet jede Kugel einen Rückstoß, welcher dem Stoße gleich ist, den sie der anderen erteilt hat; die Kugel A wird also abermals einen Verlust an Bewegungsquantität erleiden, welcher gleich ist $M(c - v)$; der Gesamtverlust an Bewegungsquantität, welchen die Kugel A nach Beendigung des elastischen Stoßes erlitten hat, ist also:

$$2 M (c - v).$$

In gleicher Weise ergibt sich für den Gewinn an Bewegungsquantität, welchen die Kugel B bis zu dem Moment erfahren hat, wo beide Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder angenommen haben und auseinander zu fahren beginnen,

$$2 M_1 (v - c_1).$$

Die Geschwindigkeit von A wird also nach Beendigung des elastischen Stoßes sein:

$$V = c - 2(c - v) = 2v - c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit von B wird aber geworden sein:

$$V_1 = c_1 + 2(v - c_1) = 2v - c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzen wir in diese Werte von V und V_1 für v seinen Wert aus § 112 (1), so kommt:

$$V = \frac{(M - M_1)\, c + 2 M_1 c_1}{M + M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$V_1 = \frac{(M_1 - M)\, c_1 + 2 M c}{M + M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Für den Fall, daß die beiden Kugeln gleiche Masse besitzen, also $M = M_1$ ist, gehen diese Formeln über in folgende:

$$V = c_1$$
$$V_1 = c,$$

d. h. die Kugeln vertauschen beim Stoße ihre Geschwindigkeiten.

Die Bewegungsquantität der beiden Kugeln vor dem Stoße war:

$$M c + M_1 c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nach dem elastischen Stoße ist sie:

$$M V + M_1 V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzen wir für V und V_1 ihre Werte (1) und (2), so kommt

$$MV + M_1V_1 = M(2v - c) + M_1(2v - c_1)$$
$$= 2(M + M_1)v - (Mc + M_1c_1).$$

Nun aber ist nach § 112 (1):

$$(M + M_1)v = Mc + M_1c_1.$$

Setzt man nun für $(M + M_1)v$ diesen Wert in obige Gleichung, so kommt:

$$MV + M_1V_1 = 2(Mc + M_1c_1) - (Mc + M_1c_1)$$
$$MV + M_1V_1 = Mc + M_1c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Bewegungsquantität ist nach dem elastischen S ebenso groß wie vor demselben.

Gehen wir nun zur Bestimmung der lebendigen Kräfte nach dem elasti-schen Stoß über.

Zieht man Gleichung (2) ab von der Gleichung (1), so kommt

$$V - V_1 = c_1 - c$$

und daraus:

$$V + c = V_1 + c_1$$

Aus der obigen Gleichung (7) ergibt sich aber

$$M(V - c) = M_1(c_1 - V_1)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (9) und (8) erhält man aber

$$M(V^2 - c^2) = M_1(c_1^2 - V_1^2),$$

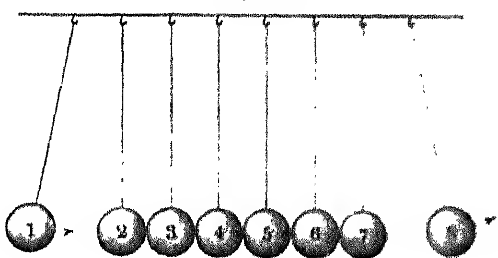
und daraus endlich:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{M_1V_1^2}{2} = \frac{Mc^2}{2} + \frac{M_1c_1^2}{2}$$

d. h. die **Summe der lebendigen Kräfte nach dem elastischen** ist **ebenso groß wie vor demselben**, beim elastischen Stoß findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt.

Stoß auf eine Reihe elastischer Kugeln (Fig. 339). Hängt eine Reihe gleich schwerer elastischer Kugeln aus Elfenbein, hartem oder Glas hintereinande gerader Linie bifilar auf Ritchies Stoßapparat, legt dieselben (nach Tynd in eine glatte Rinne, so man folgendes zeigen

Fig. 339.



Läßt man die äuße Kugel 1 links aus einer wissen Höhe auf die Kug fallen, so bleiben alle folge bis auf die letzte ruhig hän nur die letzte (8.) steigt (nahe) ebensoweit in die Höhe. Dasselbe wieder sich beim Rückfalle. **Erklärung:** *Jede Kugel tauscht mit der folgenden* Geschwindigkeit.

Hebt man die Kugeln 1 und 2 und läßt sie nacheinander oder zug fallen, so steigen die Kugeln 8 und 7 nacheinander oder gleichzeitig in Höhe. Läßt man 4 Kugeln fallen, so steigen die restlichen vier in die H

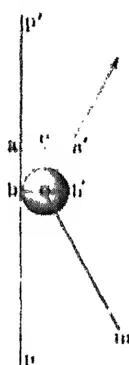
Läßt man 5 Kugeln gegen 3 fallen, so bleiben die 3 ersten stehen, die 5 letzten fliegen empor.

Die Erklärung aller dieser Fälle ergibt sich durch konsequente successive Anwendung desselben Grundsatzes von der Vertauschung der Geschwindigkeiten.

Hat die Hälfte der Kugeln eine größere Masse als der Rest, so pflanzt sich ein auf die erste übertragener Stoß zwar ebenfalls auf die letzte Kugel fort; es entsteht aber an der Grenze zwischen den schwereren und den leichteren Kugeln eine Teilung der Stoßwirkung. Nur der eine Teil der lebendigen Kraft geht bis ans Ende fort, der andere Anteil wird an der Grenze reflektiert. Dabei ist der Sinn der Bewegung der einzelnen Kugeln davon abhängig, ob der Stoß in der Richtung von den schwereren zu den leichteren Kugeln oder umgekehrt stattgefunden hat. Im ersten Falle ist der Sinn der reflektierten Bewegung von dem gleichen Zeichen, im letzteren Falle von entgegengesetztem Zeichen mit dem Sinne des ursprünglichen Stoßes.

Stoß einer elastischen Kugel gegen eine elastische Wand. Die elastische Kugel o, Fig. 340, bewege sich in der Richtung $m\,a$ gegen die Wand. Die Strecke $o\,a$ stelle die Geschwindigkeit dar. Zerlegt man diese nach den Komponenten $o\,b$ und $o\,c$ senkrecht und parallel zur Wand, so bewirkt erstere zunächst Abplattung und sofort darauf Rückstoß von der Wand mit einer Geschwindigkeit $= o\,b'$. Diese Komponente setzt sich mit der Komponente $o\,c$ zusammen zu einer Resultierenden $o\,a' = o\,a$. Es ist ersichtlich, daß nach dieser Theorie der Winkel $m\,o\,b'$ gleich dem Winkel $b'\,o\,a'$ sein muß. Der Einfallwinkel ist also gleich dem Reflexionswinkel. Da in Wirklichkeit die Kugel nicht vollkommen elastisch ist und außerdem eine Drehbewegung um eine auf der Reflexionsebene senkrechte Achse o entstehen muß, welche auf die weitere Bewegung Einfluß ausübt, so stimmt, wie Versuche am Billard ergeben, die Erfahrung mit obiger Theorie nur angenähert überein.

Fig. 340.



§ 114. Gleitende Reibung.

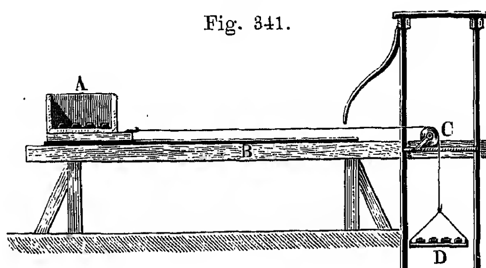
Ein schon mehrfach besprochener Widerstand, welcher fast auf alle Bewegungen einen bedeutenden Einfluß ausübt, ist die Reibung. Um eine nur etwas große Last auf einer horizontalen Ebene fortzuschleifen, ist ein bedeutender Kraftaufwand nötig, welcher lediglich von den Reibungswiderständen herrührt. Wäre die Ebene sowohl, auf welcher die Last fortgeschleift werden soll, als auch die Unterfläche der Last selbst absolut hart und glatt (was in der Natur nie der Fall ist) und fände außerdem nicht die mindeste Adhäsion zwischen den übereinander hingleitenden Flächen statt, so könnte die kleinste Kraft die größte Last in Bewegung setzen, und einmal angestoßen, müßte sich die Last mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf der horizontalen Ebene fortbewegen.

Die Reibung rührt unstreitig daher, daß die Erhabenheiten einer jeden der übereinander hingleitenden Flächen in die Vertiefungen der anderen eingreifen. Wenn nun die Bewegung stattfinden soll, so müssen entweder die hervorragenden Teilchen von der Masse ihres Körpers abgerissen oder der eine Körper muß fortwährend über die Unebenheiten hinweggehoben werden.

Ersteres findet vorzugsweise statt, wenn die reibenden Flächen sehr r letzteres, wenn sie mehr geglättet sind. Je glatter die reibenden Flä sind, desto mehr Einfluß gewinnt auch die Adhäsion, welche namen bei Anwendung von flüssiger oder halbflüssiger Schmiere von Bedeutung v

Um Versuche über gleitende Reibung anzustellen, wandte Coul den Fig. 341 dargestellten Apparat (Tribometer) an. Ein Kästchen A, ches man nach Belieben Gewichten belasten kann, auf zwei horizonta Schienen, welche neben ander gelegt sind. Eine an Kästchen befestigte Sc geht über eine Rolle C trägt an ihrem freien I eine Wagschale D, auf we so lange Gewichte zug werden, bis dadurch das Kästchen A eben noch in Bewegung gesetzt wenn angestoßen, in gleichförmiger Bewegung erhalten wird.

Fig. 341.



Nehmen wir an, die untere Fläche des Kästchens sei durch eine eis Platte gebildet und die Schienen seien gleichfalls von Eisen; ferner bet das Gewicht des Kästchens A samt allem, was darin liegt, 10 kg, so wir einmal in Bewegung gesetzt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgesch werden, sobald die Wagschale D samt ihrem Inhalte 1,4 kg wiegt. Die Überwindung der Reibung hier anzuwendende Kraft beträgt also in di Falle 14 Proz. der Last.

Bezeichnet man mit P die Normalkraft auf die Reibungsfläche, m die Kraft, welche die Reibung eben überwindet, so ist $f = \frac{p}{P}$ der Reibu koeffizient. Derselbe beträgt demnach für Eisen auf Eisen 0,14.

1. Die zur Überwindung der Reibung nötige Kraft (Reibu widerstand) ist der Kraft proportional, mit welchem die Fläc welche übereinander hergleiten sollen, normal aufeinander drückt werden.

Hätte man, ohne am Gewicht des Kästchens etwas zu ändern, die eise Schienen breiter oder schmäler gemacht, so würde man doch immer zu selben Resultat gekommen sein, d. h. zur Überwindung der Reibung wü immer 14 Proz. der Last nötig gewesen sein, und so ergibt sich:

2. Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der dehnung der reibenden Flächen.

Eine sehr einfache Methode zur Bestimmung des Reibungskoeffizie ergibt sich aus den Gesetzen über die Bewegung auf der schiefen E Man gibt der Ebene, auf welcher die Reibung des Körpers P zu untersu ist, eine solche Neigung α, daß der Körper P, wenn angestoßen, mit gl förmiger Geschwindigkeit abrutscht. Die Kraft p zur Überwindung Reibung ist dann gegeben durch

$$p = P \,.\, \sin \alpha,$$

folglich

$$f = \frac{p}{P} = \sin \alpha.$$

in der Natur nicht gibt, so ist die Teilbeweglichkeit als eine allgemeine Eigenschaft der Materie anzusehen.

Wir kommen auf die Trägheit, Beweglichkeit und Teilbeweglichkeit später ausführlicher zu sprechen.

7. Gravitation, Schwere. Während, wie wir eben hörten, die Körper nicht fähig sind, ihren eigenen Zustand der Ruhe oder Bewegung selbst zu ändern, so haben sie doch die Fähigkeit, gegenseitig eine solche Änderung zu bewirken. Wir sagen, sie ziehen sich an. Diese noch immer rätselhafte Eigenschaft heißen wir die allgemeine Gravitation, und in dem speziellen Falle, daß der eine dieser Körper die Erde ist, die Schwere. Auch diese werden wir erst in der Mechanik näher kennen lernen.

8. Aggregatzustände. Im Altertum kannte man vier „Elemente“: Erde, Wasser, Luft und Feuer. Es ist klar, daß diese nichts zu tun haben mit jenen Grundstoffen, die wir heute Elemente nennen. Dagegen ist es nicht unwahrscheinlich, daß wir in den drei ersten der vier alten Elemente die Repräsentanten der drei Aggregatzustände (Zusammenhangsformen) zu erblicken haben, während das vierte Element, das Feuer (die Wärme), das Agens darstellt, welches die Aggregatzustände ineinander überzuführen vermag.

Diese drei Aggregatzustände sind der feste, der tropfbar flüssige und der ausdehnsam flüssige oder gasförmige Zustand. Nach dieser Nomenklatur würden die Körper zunächst in feste und flüssige und dann die letzteren in tropfbar flüssige und in ausdehnsam flüssige eingeteilt werden.

Es ist aber einfacher, direkt eine Dreiteilung in feste, flüssige und gasförmige Körper anzuwenden.

Das nächstliegende Beispiel eines Körpers, welcher aller drei Zustände fähig ist, liefert das Wasser, welches als Eis oder Schnee fest, als gewöhnliches Wasser flüssig, als Dampf gasförmig ist.

Die festen Körper haben, die geringen Veränderungen abgerechnet, welche durch Wärme und Druck hervorgebracht werden, ein unveränderliches Volumen und eine selbständige Gestalt; es gehört auch eine mehr oder weniger bedeutende Kraft dazu, um einen festen Körper zu zerteilen. Es ist z. B. unmöglich, ein Stück Eisen auf die Hälfte, auf den dritten Teil seines Volumens zusammenzupressen, oder zu bewirken, daß es den doppelten, dreifachen Raum einnimmt; nur mit großer Gewalt sind wir imstande, seine Gestalt zu ändern oder es zu teilen.

Die Flüssigkeiten haben in demselben Sinne wie die festen Körper ein unveränderliches Volumen, d. h. wenn wir sie auch durch einen starken Druck ein klein wenig zusammendrücken können, wenn sie sich auch durch Erwärmung etwas ausdehnen, so sind diese Volumveränderungen doch immer nur sehr unbedeutend; wir können das Wasser, welches eine Literflasche ausfüllt, nicht in eine Halbliterflasche hineinpressen, und wenn wir es in eine Zweiliterflasche hineingießen, so füllt es diese nur zur Hälfte aus. Die Flüssigkeiten haben aber keine selbständige Gestalt wie die festen Körper, sondern die Gestalt des Raumes, den sie einnehmen, ist von der Form der sie umgebenden festen Körper, also von der Form der Gefäße abhängig; wenn eine Flüssigkeit ein Gefäß nicht ganz ausfüllt, so ist sie oben durch eine horizontale Oberfläche begrenzt. Endlich unterscheiden sich die flüssigen Körper von den festen noch dadurch, daß schon eine sehr geringe Kraft hin-

Die folgende Tabelle enthält nach Morins Versuchen einige der in der Praxis wichtigsten Reibungskoeffizienten.

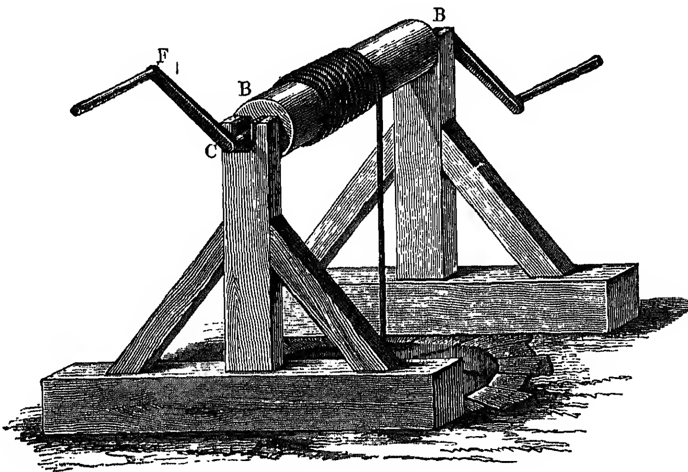
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	0,14
Messing auf Gußeisen	0,19
Schmiedeeisen auf Gußeisen	0,20
Buche auf Buche (Fasern parallel)	0,36
Eiche auf Eiche („ „)	0,48
„ „ „ („ gekreuzt)	0,32

Durch eine zweckmäßige Schmiere kann der Reibungswiderstand noch verringert werden. Für Metalle ist Öl, für Holz hingegen Talg oder Seife das beste Schmiermittel. So ist z. B. bei guter Schmiere der Reibungskoeffizient für Schmiedeeisen auf Gußeisen nur 0,06.

Bei Hölzern ist es nicht gleichgültig, wie die Fasern laufen; die Reibung ist nämlich bei gekreuzten Fasern viel geringer als bei parallelen.

Den Reibungskoeffizienten zwischen Eisen und Eis hat J. Müller in folgender Weise bestimmt: ein junger Mann hielt, auf seinen Schlittschuhen (neuer Konstruktion mit glatter Bahn) stehend, eine Federwage von der in Fig. 331, Seite 332, dargestellten Art in den Händen; an derselben war eine starke Schnur befestigt, mittels welcher ihn ein zweiter Schlittschuhläufer auf dem Eise fortzog. Beim Beginn der Bewegung zeigte die Federwage eine

Fig. 342.



Zugkraft von 5 bis 6 kg, während des Laufes aber schwankte sie zwischen 1 und 2 kg. Da nun der gezogene junge Mann 62 kg wog, so beträgt der Reibungskoeffizient während der Bewegung $^1/_{62}$ bis $^2/_{62}$ oder 1,6 bis 3,2 Proz.

Gleitende Reibung findet unter anderem auch überall da statt, wo Zapfen in ihren Pfannen gedreht werden. Untersuchen wir z. B. den Effekt der Zapfenreibung an dem schon öfter betrachten Haspel, Fig. 342. Das Gewicht des Wellbaumes selbst mit allem, was daran befestigt ist, mitsamt der daran hängenden Last von 50 kg, bewirke während des Aufwindens einen Gesamtdruck auf die Zapfenlager = 100 kg. Wenn die Zapfenlager von Gußeisen, die Zapfen aber von Schmiedeeisen sind, so beträgt der Rei-

bungswiderstand, welcher am Umfange der Zapfen wirkt, 20 Proz., de der Reibung ist also derselbe, als ob man statt ihrer um den Zapf Schnur in derselben Richtung geschlungen hätte, wie das Seil, welc Last trägt, und an dieser Schnur ein Gewicht 100 . 0,2 oder 20 kg an hätte; oder als wenn die am Umfange des Wellbaumes wirkende I $\frac{20}{5} = 4$ kg größer gewesen wäre, vorausgesetzt nämlich, daß der messer des Zapfens $^1/_5$ vom Durchmesser des Wellbaumes ist. Es also bei diesem Haspel etwa 8 Proz. der angewandten Kraft für di windung der Reibungswinderstände verzehrt.

Wenn ein Körper, welcher bis dahin ruhig auf seiner Unterlage Bewegung gesetzt werden soll, so ist der dabei zu überwindende R widerstand etwas größer als die Reibung, welche überwunden werd wenn die Bewegung bereits eingeleitet ist. Für sehr harte Körper is Unterschied unbedeutend, und er ist nur durch den Kraftaufwand welcher nötig ist, um dem bis dahin ruhenden Körper eine gewisse Gesch keit mitzuteilen. Bei weichen Körpern ist die Reibung der Ruhe, Kraft, welche angewendet werden muß, um den bis dahin ruhenden in Bewegung zu setzen, erheblich größer als die während der Bewe überwindende Reibung, weil ein weicher Körper, welcher einige Ze gegen einen anderen angepreßt wurde, notwendig eine Zusammendr erfährt, wodurch die kleinen Hervorragungen des einen mehr und den Vertiefungen des anderen gleichsam eingekeilt werden.

Wenn auf einem Körper mit horizontaler Oberfläche ein zweiter Masse m ruht und man gibt dem ersteren eine horizontale Beschleuni so ist die Kraft p, welche auf die Masse m wirken muß, um ihr die Beschleunigung zu geben, gleich φm. Die Kraft zur Überwindu Reibung ist aber $p' = fmg$, da mg das Gewicht von m ist. So lange ist, wird der Körper nicht abgleiten, ist aber $p' < p$, so muß er al Die Grenze ergibt sich aus der Gleichung $p' = p$, also $\varphi m = fm$ $\varphi = fg$.

Letztere Gleichung sagt, daß, um das Abgleiten zu vermeiden, schleunigung in der horizontalen Richtung nicht größer sein darf Beschleunigung der Schwere multipliziert mit dem Reibungskoeffi Nehmen wir für die auf dem Boden eines Eisenbahnwaggons aufge Kisten einen Reibungskoeffizienten $f = {}^1/_3$ an, so darf der Lokomoti beim Anfahren, sowie während der Fahrt nie eine größere positive ode tive Beschleunigung des Zuges eintreten lassen als $\varphi = \frac{9,8}{3} = 3,2$ da sonst die Körper verschoben werden. Hierher gehört auch das b Experiment, das man mit einer Visitkarte und einer Münze anstelle die man auf die Mündung einer Flasche gelegt hat. Schiebt man di langsam fort, so nimmt sie die Münze mit; schnellt man aber die Kart in horizontaler Richtung ab, so fällt die Münze in die Flasche. V § 72, Versuch Fig. 227.

§ 115. **Wälzende Reibung** findet da statt, wo ein runder Körpe eine Kugel, ein Zylinder, über die Unterlage hinwegrollt. Es komm die Unterlage stets mit neuen Punkten des rollenden Körpers in Ber

Der hierbei entstehende Widerstand ist bei weitem geringer als der Widerstand der gleitenden Reibung. Coulomb verwandte zu seinen Versuchen über wälzende Reibung Walzen von Guajak- und Ulmenholz, deren Durch-

Fig. 343.

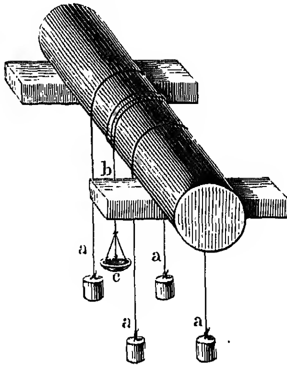
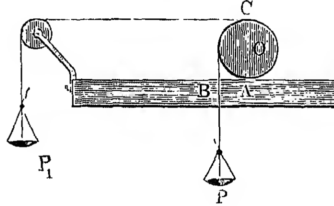


Fig. 344.



messer von 5 bis 31 cm variierte und die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ. Um auch den Druck abzuändern, mit welchem die Walze auf die Unterlage aufgedrückt wird, wurden zwei Schnüre *a* über die Walze gelegt und an beiden Seiten gleiche Gewichte angehängt, wie Fig. 343 andeutet. Das Übergewicht, welches die Bewegung hervorbringen soll, wurde in die an der Schnur *b* hängende leichte Wagschale gelegt.

Nach diesen Versuchen ist die wälzende Reibung dem Druck direkt und dem Halbmesser der Walze umgekehrt proportional, oder es ist

$$F = \varphi \cdot \frac{P}{R},$$

wenn F den Widerstand der wälzenden Reibung, P den Druck und R den Radius der Walze bezeichnet. Coulomb fand

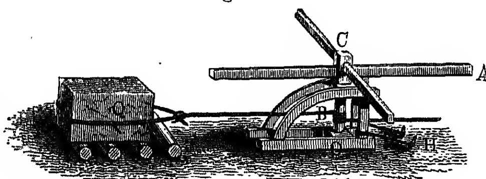
für Walzen aus Guajakholz den konstanten Faktor $\varphi = 0{,}018$
für Walzen aus Ulmenholz . . . . $\varphi = 0{,}031$.

Für gußeiserne Räder, welche auf gußeisernen Schienen laufen, fand Weisbach $\varphi = 0{,}018$.

Die obige Formel setzt voraus, daß die Kraft F an einem Hebelarm angreift, welcher dem Halbmesser der Walze gleich ist, wie es bei der obigen Anordnung der Fall war; wenn aber die Kraft an dem oberen Ende C der Walze, Fig. 344, angreift, so ist die wälzende Reibung nur halb so groß wie im vorigen Falle.

Wo es auf Verminderung der Reibungswiderstände ankommt, sucht man wo möglich die gleitende Reibung in eine wälzende zu verwandeln; um schwere Lasten fortzuschaffen, legt man dieselben auf Walzen, Fig. 345, und darin liegt auch der Vorteil der Räder unserer Fuhrwerke, an deren Umfang nur wälzende Reibung zu überwinden ist, während die gleitende Reibung lediglich auf die Achsen reduziert bleibt, wo die Überwindung derselben nur einen geringen Kraftaufwand in Anspruch nimmt, weil der Reibungskoeffizient durch Glätte der Flächen und Anwendung von Schmiermitteln möglichst herabgesetzt ist.

Fig. 345.

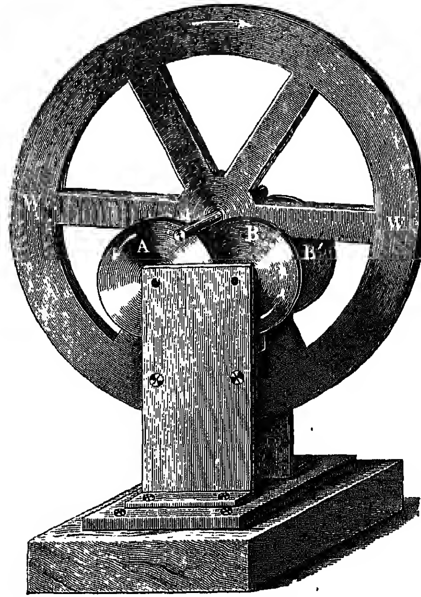


Aus obiger Formel geht auch hervor, daß der Reibungswiderstand a
einem Wagen um so geringer ausfallen wird, je größer der Halbmesser sein
Räder ist.

Die Zugkraft, welche nötig ist, um einen Lastwagen auf einer gute
horizontalen Landstraße fortzubewegen, beträgt 5 bis 7 Proz. der Last. A
horizontalen Eisenbahnen beträgt die erforderliche Zugkraft nur 0,5 b
0,7 Proz. der Last.

Um die Zapfenreibung zum Teil noch in wälzende Reibung zu ve
wandeln, legt man den Zapfen einer Welle oder eines Rades nicht in ei
Zapfenlager, sondern auf sogenann
Friktionsrollen, deren Einrich
tung durch Fig. 346 erläutert wir
Die Friktionsrollen bestehen au
zwei Räderpaaren, von denen da
eine, aus den Rädern A und B ge
bildet, das vordere Ende der Achs
trägt, um welche das Rad W gedreh
werden soll, während das hinter
Ende dieser Achse in gleicher Weis
auf den Rädern A' und B' (A' ist i
der Figur gänzlich verdeckt) au
liegt. Die Umdrehungsachsen de
beiden dicht hintereinander liegen
den zusammengehörigen Räder wi
A und B sind um mehr als de
Halbmesser und um weniger als de
Durchmesser eines solchen Rade
voneinander entfernt, so daß si
oben miteinander einen einspringen
den Winkel bilden, in welchen di
Achse des Rades W hineingelegt wird

Fig. 346.



Bezeichnet P die auf die Achse des Rades W ausgeübte Kraft, f de
Koeffizienten für gleitende Reibung, so ist fP der Reibungswiderstand, wel
cher zu überwinden wäre, wenn die Achse des Rades W sich in einem
Zapfenlager drehen müßte, und

$$K = f \,.\, P \,.\, u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

ist die mechanische Arbeit, welche durch Überwindung dieser Zapfenreibung
bei jeder Umdrehung des Rades verrichtet würde, wenn u den Umfang de
Achse bezeichnet.

Nun aber dreht sich der Zapfen des Rades W nicht in einem Zapfen
lager, sondern auf dem Umfange der Friktionsrollen, deren Achsen zusamme
nahezu ebenfalls die Last P zu tragen haben, so daß fP nun auch die Summ
der Reibung an den Achsen der Friktionsrollen bezeichnet. Dreht sich nu
das Rad W um, so findet am Umfange seiner Achse eine wälzende Reibung
statt, welche sehr unbedeutend ist; allein die Räder A und B einerseits, sowi
A' und B' andererseits drehen sich um ihre Achsen, und an diesen Achse
ist nur die gleitende Reibung zu überwinden.

Die Achse des Rades W macht aber n Umdrehungen, während die Friktionsräder nur eine machen, jeder Umdrehung des Rades W entspricht nur $\frac{1}{n}$ Umdrehung der Friktionsräder, es ist also $K' = \frac{1}{n} f P u'$ die mechanische Arbeit, welche bei jeder Umdrehung des Rades W durch Überwindung der Reibung an den Achsen der Friktionsrollen überwunden werden muß, wenn u' den Umfang einer jeden dieser Achsen bezeichnet.

Es ist aber $\frac{1}{n}$ offenbar gleich $\frac{u}{U}$, wenn u, wie bereits erwähnt, den Umfang der Achse des Rades W, U aber den Umfang einer Friktionsrolle bezeichnet. Folglich ist auch:

$$K' = f \cdot P \cdot u' \frac{u}{U} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Vergleichen wir den Wert von K' bei (2) mit dem obigen Wert von K, o sehen wir, daß

$$K' = K \frac{u'}{U} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

Durch Anwendung der Friktionsrollen wird also die Reibungsarbeit im Verhältnis $\frac{u'}{U}$, d. h. in dem Verhältnis vermindert, in welchem der Umfang der Friktionsrollen zum Umfang ihrer Achsen steht, oder auch, was dasselbe ist, in dem Verhältnis, in welchem der Halbmesser der Friktionsrollenachse kleiner ist als der Halbmesser der Friktionsrolle selbst.

Wäre z. B. der Radius der Friktionsrollenachse $1/_{20}$ vom Radius der Friktionsrolle, so würde der zu überwindende Reibungswiderstand nur $1/_{20}$ von dem sein, welchen die Umdrehung des Rades W erfahren würde, wenn seine Achse direkt in Zapfenlagern liefe.

§ 116. Nutzen und Anwendung der Reibung. Wir haben bisher die Reibung nur als ein Bewegungshindernis betrachtet, welches bei Maschinen einen bedeutenden Teil der bewegenden Kraft verzehrt, also offenbar nachteilig auf den Nutzeffekt wirkt; allein diese Reibung, welche hier freilich störend wirkt, bringt uns in anderen Fällen ungleich mehr Vorteil, und in vielen Fällen machen wir von derselben für unsere Zwecke Anwendung.

Zunächst könnten wir ohne Reibung weder sicher gehen noch stehen, wie uns das Glatteis zeigt, auf welchem nur eine stark verminderte Reibung stattfindet; daß der Nagel in der Wand hält, ist lediglich eine Folge der Reibung; ohne Reibung würden wir keinen Körper fest in den Händen halten können, sie würden uns entgleiten wie ein schlüpfriger Fisch.

Beim Betriebe von Maschinen machen wir häufig Anwendung von der Reibung zur Fortpflanzung der Bewegung; denn nur durch die Reibung wird es möglich, mittels Seile oder Riemen die Bewegung eines Rades auf ein anderes zu übertragen, wie dies z. B. bei der Schwungmaschine und bei der Drehbank der Fall ist.

Ein Seil, an dessen einem Ende eine Last P, Fig. 347, hängt, sei über einen horizontal liegenden, nicht drehbaren Zylinder geschlungen. Die Reibung, welche das Seil am Umfange des Zylinders zu überwinden hat, wenn

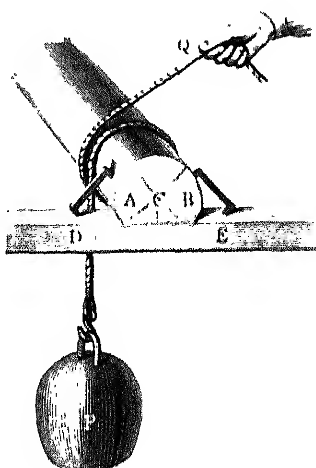
die Last P niedergehen soll, ist dann sehr bedeutend, so daß eine ge
Kraft Q hinreicht, um das Herabsinken von P zu verhindern.

Q	ist	ungefähr	0,6000 P	bei	$^1/_4$	Umwickelung	des	Zylinders.
Q	„	„	0,3800 P	„	$^1/_2$	„	„	„
Q	„	„	0,1200 P	„	1	„	„	„
Q	„	„	0,0150 P	„	2	Umwickelungen	„	„
Q	„	„	0,0002 P	„	4	„	„	„

Man macht hiervon Gebrauch, um eine große unteilbare Last von
gewissen Höhe herabzulassen, indem man das Seil, an welchem die
hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm schlagt und das a
Ende des Seiles in die Hand nimmt.

So kann ein Faßzieher, wenn er beim Hinablassen eines vollen F
in einen Keller das dabei angewandte Seil 3mal um einen quer übe
Kellertür gelegten Stamm wickelt, mit
Kraft gleich dem Gewichte von 12,5 kg
Last von 6600 kg ohne Gefahr hinabl

Fig. 347.



Ohne Reibung würde eine Lokom
nicht imstande sein, einen Wagenzug f
bringen. Die Kraft der Dampfmaschin
Lokomotive bewirkt zunächst eine Umdre
der Treibräder. Diese Räder laufen nun
weder um, während die Lokomotive
rollt, dann müssen sämtliche Reibungs
sonstige Widerstände an dem Wage
überwunden werden, welcher der Lokom
folgt; — oder die Treibräder drehen
um, während die Lokomotive an ihrer
stehen bleibt, dann ist die gleitende Rei
zu überwinden, welche beim Schleifen
Treibräder auf den Schienen entsteht.
ist nun klar, daß der Zug fortgehen wird, solange die Summe aller W
stände, welche beim Fortrollen des ganzen Wagenzuges überwunden w
müssen, noch kleiner ist als die gleitende Reibung, welche am Umfang
Treibräder entstände, wenn sie umgedreht werden sollten, ohne daß die
motive fortrollt.

Ist die fortzuziehende Last zu groß, so findet in der Tat ein Umla
der Treibräder ohne entsprechendes Fortrollen statt, wie man dies bei gr
Güterzügen oft bemerkt, wenn der Zug sich in Bewegung setzen soll,
beim Anfange der Bewegung nicht allein die Reibungswiderstände, son
auch der Trägheitswiderstand der bedeutenden in Bewegung zu setze
Masse überwunden werden muß.

Aus dem allen[1] geht hervor, daß es bei der Lokomotive nicht
darauf ankommt, daß die Maschine mit großer Kraft die Räder umd
sondern auch darauf, daß die gleitende Reibung, welche beim Schleifen
Treibräder auf den Schienen entsteht, recht groß ist. diese Reibung w
aber mit dem Gewicht der Lokomotive; die Dampfmaschine der Lokom
muß also nicht allein die gehörige Kraft entwickeln, sondern die Lokom
selbst muß auch das genügende Gewicht haben, welches um so größer

muß, je größere Lasten fortgezogen werden sollen, deshalb muß man auch nicht allein stärkere, sondern auch schwerere Maschinen anwenden, wenn die Eisenbahn nur eine Steigung von 1 bis 1½ m auf eine Länge von 100 m hat.

Eine verwandte Wirkung der Reibung findet auch bei der Bewegung gestoßener Kugeln, z. B. beim Billardspiel, statt. Stößt man mit dem Billardstock (Queue) eine Kugel in zentraler Richtung, Fig. 348, so würde sie, wenn sie sich auf der Unterlage nicht reiben würde, nur eine fortschreitende Bewegung erhalten. Durch die Reibung erlangt sie daneben noch eine Rotation im Sinne des gebogenen Pfeiles um eine horizontale, auf die Stoßrichtung senkrechte Achse. Stößt man sie, wie in Fig. 349, in einer Richtung, welche oberhalb ihres Schwerpunktes verläuft, so erhält sie von vornherein sowohl eine fortschreitende als auch eine rotierende Bewegung, welche ihrerseits durch die Reibung die fortschreitende Geschwindigkeit vermehrt. Stößt sie dann noch auf eine zweite Kugel, so prallt sie nicht zurück, sondern läuft derselben nach oder bleibt stehen. Stößt man dagegen die Kugel wie in Fig. 350 tief unten, so erhält sie neben der fortschreitenden Bewegung eine Rotationsbewegung im Sinne des krummen Pfeiles, welche für sich allein unter Mitwirkung der Reibung die Kugel zurücktreiben würde. Sie prallt dann von einer zweiten gestoßenen Kugel zurück. Durch einen passend geführten Schlag mit der etwas angefeuchteten senkrecht gehaltenen Hand vertikal von oben nach unten auf den rückwärtigen Teil der Kugel kann man leicht erreichen, daß sie zuerst nach vorn fliegt, dann aber unter dem Einfluß der fortdauernden Rotation nach augenblicklichem Stehen rückwärts rollt. Dieses Experiment entspricht dem senkrechten Wurf nach aufwärts, wo die momentane Kraft des Stoßes die Anfangsgeschwindigkeit nach oben gibt, während die fortdauernde Kraft der Schwere ihr diese Geschwindigkeit nach einiger Zeit nimmt und eine entgegengesetzte Beschleunigung nach abwärts übrig bleibt. Stößt man eine Kugel seitwärts, so erhält sie neben der fortschreitenden Geschwindigkeit eine solche um eine vertikale Achse. Da durch die Reibung am Boden eine Rotation um eine horizontale Achse dazu kommt, so geben die beiden Rotationsbewegungen zusammen eine resultierende Rotation um eine schief stehende Achse, welche zusammen mit der Reibung eine konstante Seitenkraft weckt. Die Kugel beschreibt dann keine geradlinige Bahn, sondern eine krummlinige. Der Billarspieler macht hiervon beim sog. „Falschnehmen“ Gebrauch.

Fig. 348.

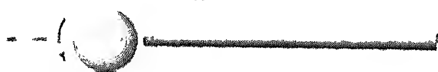


Fig. 349.

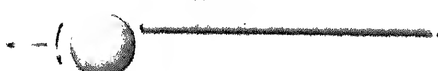


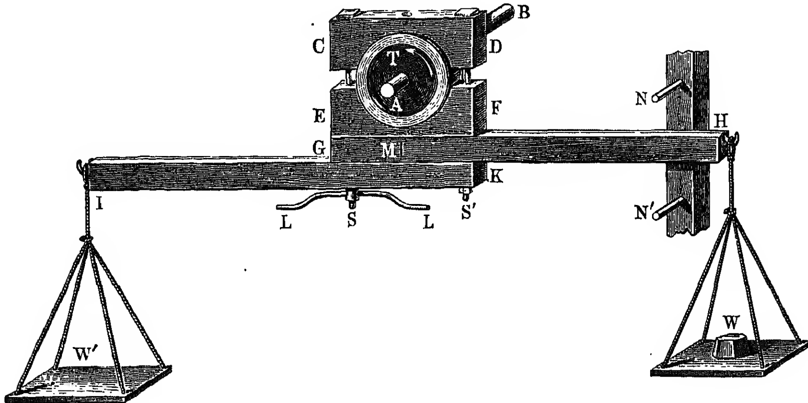
Fig. 350.



Auch durch schiefen Abprall von den Wänden des Billards kommt diese Rotationsweise zustande, weshalb die abprallende Kugel nachher einen Bogen beschreibt. Die vollständige Theorie des Billardspieles ist deshalb eine ziemlich komplizierte und schwierige, da auch die im § 104 erörterten Gesetze dabei zu berücksichtigen sind.

Man wendet die Reibung auch an, um die mechanische Leistung verschiedener Motoren zu bestimmen. In der Regel besteht die Arbeit der Motoren, z. B. der Wasserräder, Dampfmaschinen usw., in der Umdrehung einer Welle, deren Bewegung dann auf irgend eine Weise fortgepflanzt wird. An diese Welle wird nun, um die Leistung des Motors zu bestimmen, während die Maschine keine weitere Arbeit verrichtet, ein sog. Bremsdynamometer oder der nach seinem Erfinder genannte Pronysche Zaum angelegt, welcher in Fig. 351 dargestellt ist.

Fig. 351.



AB ist ein Stück der horizontalen Achse, welche durch den Motor, etwa durch ein Wasserrad, umgedreht wird. Auf dieser Achse wird eine eiserne Trommel T befestigt, deren Mantelfläche bei ungefähr $^1/_2$ m Durchmesser eine Breite von 15 cm hat. Auf dem Umfange dieser Trommel ist nun oben das Holzstück CD aufgesetzt, dessen fast halbkreisförmiger Ausschnitt gleichen Radius mit der Trommel hat. In dem Ausschnitt eines ähnlichen Holzstückes EF liegt die untere Hälfte der Trommel.

Durch Anziehen der Schrauben S und S' kann man die beiden Holzbacken CD und EF mehr oder weniger fest auf den Umfang der Trommel andrücken und auch während des Versuchs den Druck mit Hilfe des Hebels LL regulieren. Unterhalb des Holzbackens EF ist ein im ganzen ungefähr $2^1/_2$ m langer Balken GH angebracht, welcher bei H eine Wagschale W trägt. Um das Gewicht dieses Wagebalkens GH und der Wagschale W nicht in Rechnung bringen zu müssen, ist ihm entgegengesetzt ein zweiter, dem ersteren gleicher Hebelarm KI angebracht, welcher die Wagschale W' trägt, so daß GH mit W durch IK und W' äquilibriert ist. Sollte das Gleichgewicht nicht vollständig sein, so kann man es leicht durch Auflegen kleiner Gewichte auf die eine oder andere Wagschale herstellen.

Wenn sich nun die Achse AB in der Richtung des Pfeiles umdreht, so würde auch die ganze Brems- und Hebelvorrichtung in der gleichen Richtung gedreht werden, wenn auf W gar kein oder doch ein zu geringes Gewicht aufgelegt wäre. Um die Drehung in dieser Richtung zu begrenzen, ist in einem seitlich stehenden vertikalen Balken der eiserne Stab N eingesetzt, an welchem der Hebelarm GH alsbald anstoßen wird.

Wird auf die Wagschale W ein Gewicht aufgelegt, welches gerade der Reibung am Umfange der rotierenden Trommel T das Gleichgewicht hält, so

wird der Hebel GH, unbedeutende Schwankungen abgerechnet, auch während der Rotation der Achse AB in horizontaler Lage verbleiben, während er niedergezogen wird, wenn das auf W aufgelegte Gewicht zu groß ist. Um ein zu weites Herabziehen des Hebels GH zu verhindern, dient der eiserne Stab N'.

Der Versuch wird nun in der Weise angestellt, daß man, während die Achse AB samt der Trommel T rotiert, das Gewicht W und die Reibung am Umfange von T mit Hilfe des Hebels LL so reguliert, daß der Hebelarm GH in horizontaler Stellung verbleibt. Ist so das Gleichgewicht hergestellt, so hat man noch zu zählen, wieviel Umdrehungen die Achse AB in der Minute macht.

Wenn alles in der angegebenen Weise reguliert ist, so hält das auf W aufgelegte Gewicht P gerade der Reibung am Umfange der Rolle das Gleichgewicht, und die Arbeit, welche die Maschine bei jeder Umdrehung der Achse verrichtet, ist (im Gravitationsmaße) gleich $P\,2\,\pi\,r$, wenn r den Abstand des Hakens, an welchem die Wagschale W aufgehängt ist, von dem Punkt M bezeichnet, welcher auf dem Balken GH vertikal unter dem Mittelpunkte der Trommel liegt.

Bei einem derartigen Versuche, welcher zur Kraftbestimmung einer Turbine angestellt wurde, war $r = 1{,}92$ m, $P = 21$ kg, also die Arbeit, welche bei jeder Umdrehung der Achse verrichtet wurde,

$$21 \,.\, 1{,}92 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14 = 253{,}2 \text{ Meterkilogramm.}$$

Da aber die Achse 120 Umdrehungen in der Minute, also 2 Umdrehungen in der Sekunde machte, so war die während einer Sekunde geleistete Arbeit 506,4 Meterkilogramm oder gleich der Arbeit von

$$\frac{506{,}4}{75} = 6{,}75 \text{ Pferdekräften.}$$

Fünftes Kapitel.

Mechanik flüssiger Körper.

§ 117. Gleichförmige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkei
Wir haben in § 8 den flüssigen Aggregatzustand der Materie dahin cha terisiert, daß bei ihm die Teilchen zwar auch noch durch innere Kraft bestimmten Entfernungen voneinander gehalten werden, aber nicht wie bei den festen Körpern an bestimmte Nachbarteilchen gebunden erschei vielmehr eine vollkommene Verschiebbarkeit derselben gegeneinander s findet, so daß eine Flüssigkeit stets die Form des Gefäßes annimmt, in sie sich befindet, ohne aber dabei ihr Volumen zu verändern. Von di Vorstellung aus gelangen wir unmittelbar zu einer klaren Einsicht in Hauptprinzip des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten, das in dem aus Erfahrung abgeleiteten Satze besteht: Jede Kraft, die an irgend ei Stelle einer Flüssigkeitsmasse, z. B. auf einen Teil ihrer Ob fläche, ausgeübt wird, pflanzt sich nach allen Richtungen gleicher Stärke fort.

Wenn wir also an einer Stelle eines Flüssigkeitsvolumens auf die Fläc einheit eine Kraft p ausüben, so wird an jeder anderen Stelle auf Flächeneinheit eine gleiche Kraft p wirken. Gleichwohl bleiben die Teil im Inneren der Flüssigkeit in Ruhe, da vermöge des obigen Prinzips au von allen Seiten gleiche und daher sich gegenseitig aufhebende Kräfte wir Die auf die Flächeneinheit ausgeübte Kraft heißen wir Druck[1]

Betrachten wir im Inneren der Flüssigkeit einen von ihr gebild Würfel von 1 mm Seite und nehmen an, obige Kraft beziehe sich auf 1 als Flächeneinheit, so erfolgt nach unserem Satze senkrecht gegen jede S des Würfels von außen her ein Druck p, und es werden sich dabei je die die gegenüberstehenden Seitenflächen ausgeübten Kräfte gegenseitig kom sieren, somit der Würfel in Ruhe bleiben. Nicht so verhält es sich aber den Teilchen an der Oberfläche, bzw. mit unserem Würfel, wenn eine se Seitenflächen in die Oberfläche fällt; alsdann kompensieren sich zwar wi die Drucke auf die senkrecht zu dieser stehenden Seitenflächen des Wür dagegen wird der Druck p auf die der Oberfläche gegenüberstehende I

---

[1]) Es ist also Druck $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$. Diese Definition gilt für Flüssigkeiten Gase allgemein, während bei festen Körpern noch vielfach Druck gleichbedeu mit Kraft (Gewicht) ohne Rücksicht auf die Größe der Fläche gebraucht Wir wollen für letztere Größe die Bezeichnung „Gesamtdruck“ gebrauchen.

reicht, um ihre Teilchen zu verschieben, und daß sie die einzelnen Verschiebungen nicht rückgängig zu machen suchen.

Die gasförmigen Körper haben weder eine selbständige Form, noch ein bestimmtes Volumen; der Raum, den sie einnehmen, hängt nur von dem äußeren Drucke ab. Man kann eine Luftmasse leicht auf $^1/_2$, $^1/_4$ . . . $^1/_{10}$ ihres Volumens zusammenpressen; und umgekehrt, wenn man sie in einen 2, 4 . . . 10 mal größeren leeren Raum bringt, so füllt sie auch diesen vollständig aus, wie wir später noch ausführlicher zeigen werden; Gase haben also ein Bestreben, sich so viel wie möglich auszudehnen. Die leichte Teilbarkeit haben die Gase mit den Flüssigkeiten gemein.

Diese Unterschiede können nach unserer Ansicht von der Konstitution der Körper nur darauf beruhen, daß bei den festen Körpern die Moleküle nicht allein in einer bestimmten Entfernung, sondern auch in einer bestimmten gegenseitigen Lage bleiben, während die Moleküle der Flüsssigkeiten zwar auch in einer bestimmten Entfernung bleiben, aber doch sehr leicht sich aneinander verschieben lassen: bei den gasförmigen Körpern endlich finden wir ein Bestreben der Moleküle, sich möglichst weit voneinander zu entfernen.

Wir werden in der Wärmelehre auf diesen Gegenstand ausführlicher zu sprechen kommen.

§ 9. Kristallisation. Wenn ein Körper aus dem flüssigen (geschmolzenen oder gelösten) oder gasförmigen Zustande in den festen Zustand übergeht, so kann dies auf zwei ganz verschiedene Weisen geschehen. Wenn man z. B. eine Leimlösung durch Verdampfen des Wassers konzentriert, so wird die ganze Masse allmählich immer dickflüssiger und endlich fest, ohne daß es zu einer Ausscheidung eines festen Körpers aus der gleichzeitig vorhandenen Flüssigkeit kommt (Colloidsubstanzen). Wenn man aber z. B. eine Salzlösung ebenso behandelt, so scheiden sich bei bestimmter Konzentration und Temperatur feste Körper von regelmäßiger Gestalt und Struktur aus der Flüssigkeit aus. Die letztere heißt die Mutterlauge, die ausgeschiedenen festen Körper heißen Kristalle und die Stoffe, welche sich so verhalten, Kristalloidsubstanzen. Der ausgeschiedene Kristall wächst in seiner Mutterlauge, wenn dieselbe konzentriert wird, dasselbe geschieht bei dem Kristall, der sich aus der geschmolzenen Masse oder aus dem gasförmigen Zustande abscheidet, wenn die Temperatur sinkt. Ein festes Stück Leim dagegen wächst niemals in der flüssigen Leimlösung.

Eine einwurfsfreie Definition des Begriffs Kristall ist sehr schwer zu geben. Früher legte man das Hauptgewicht auf die regelmäßige Begrenzung der Kristalle durch Ebenen, welche nach bestimmten Gesetzen gelagert sind. Aber dies ist nicht ein charakteristisches Merkmal. Ein Würfel aus Glas ist kein Kristall, weil ihm die kristallinische Struktur fehlt, dagegen bleibt ein Kochsalzwürfel ein Kristall, auch wenn man ihn seiner regelmäßigen Begrenzung beraubt, weil er im Innern die Struktur des Kristalls behält.

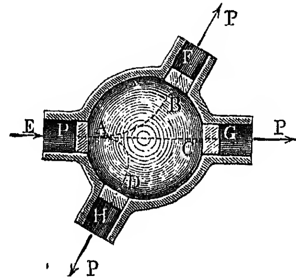
Groth definiert: Kristall als einen homogenen festen Körper, in welchem die Eigenschaften seiner Elastizität, Kohäsion usw. in gesetzmäßiger Weise von der Richtung abhängen. Lehmann[1])

[1]) Über die Definition des Begriffes Kristall: Zeitschr. f. Kristallogr. **18**, 457, 1890; Über fließende Kristalle: Zeitschr. f. physik. Chem. **4**, 462, 1889.

des Würfels nicht durch einen Flüssigkeitsdruck aufgehoben, und es würde daher die Flüssigkeit an dieser Stelle durch ihn nach außen getrieben, wenn nicht eine feste Wand da ist, oder ein gleich großer Druck p von außen auf die Flüssigkeitsoberfläche ausgeübt wird. Soll also auch an der Oberfläche der Flüssigkeit Gleichgewicht stattfinden, so muß an allen Stellen derselben senkrecht zu ihr auf die Flächeneinheit ebenfalls ein Druck p stattfinden.

Es sei in Fig. 352 der horizontale Durchschnitt eines mit Wasser gefüllten, allseitig geschlossenen Gefäßes dargestellt, an welchem sich in gleicher Höhe vier vollkommen gleiche Röhren befinden, die durch Kolben verschlossen sind. Da diese Kolben gleichen Durchmesser haben und in gleicher Höhe liegen, so haben sie auch vollkommen gleiche Kraft durch die Schwere des Wassers auszuhalten, einen Druck, von welchem wir also vorderhand ganz absehen können, den wir also als nicht vorhanden betrachten wollen.

Fig. 352.



Würde nun durch irgend eine Kraft einer der Kolben, etwa A, nach innen gedrückt, so pflanzt sich dieser Druck durch das Wasser hindurch auf die übrigen Kolben fort, und man müßte, um zu verhindern, daß diese Kolben herausgedrückt werden, auf jeden derselben einen nach innen gerichteten Gegendruck anbringen, welcher vollkommen dem auf den Kolben A wirkenden Druck gleich ist; das Gleichgewicht kann also nur dann bestehen, wenn alle vier Kolben durch ganz gleiche Kräfte nach innen gedrückt werden.

Der Druck pflanzt sich jedoch nicht allein vom Kolben A auf die übrigen Kolben, sondern auf alle Teile der Gefäßwand fort, so daß jeder Flächenteil der Gefäßwand, welcher ebenso groß ist wie der Querschnitt des Kolbens A, auch eine ebenso große Kraft auszuhalten hat.

In Fig. 353 ist der Durchschnitt eines ähnlichen Gefäßes mit zwei Röhren dargestellt, welche gleichfalls mit Kolben geschlossen sein sollen, die Röhren und folglich auch der Querschnitt der Kolben sind aber nicht gleich. Es sei

Fig. 353.

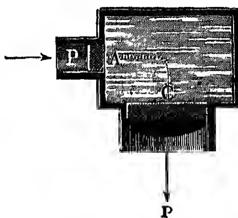
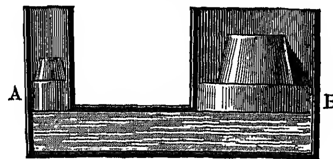


Fig. 354.



z. B. die Oberfläche des Kolbens C zehnmal so groß als die des Kolbens A, so wird, wenn irgend eine Kraft gegen den Kolben A drückt, die Kraft auf den Kolben C auch zehnmal so groß sein als der auf A wirkende, weil jedes Flächenstück des Kolbens C, welches der Oberfläche des Kolbens A gleich ist, eine ebenso große Kraft auszuhalten hat als A selbst.

Wenn man also den Kolben A mit einer Kraft gleich dem Gewichte von 5 kg nach innen drückt, so müßte man zur Erhaltung des Gleichgewichtes an dem Kolben C eine nach innen gerichtete Kraft gleich dem Gewichte von 50 kg anbringen.

Der Druck pflanzt sich nicht allein in einer Horizontalebene fort, w dies in den bisher betrachteten Beispielen der Fall war, sondern nach all Seiten, also auch nach oben und nach unten.

Fig. 354 stellt den vertikalen Durchschnitt zweier unten verbunden Röhren von ungleichem Querschnitt dar. Der die Röhren verbindende Rau sei mit Wasser gefüllt und auf dieses die Kolben A und B aufgesetzt. Wer nun auf den Kolben A, dessen Querschnitt zehnmal kleiner sein mag als d des Kolbens B, ein Gewicht, etwa von 6 kg, aufgelegt wird, so wird sich d Druck in der Weise bis zum Kolben B fortpflanzen, daß gegen jedes Fläche stück von B, welches ebenso groß ist als der Querschnitt von A, eine na oben gerichtete Kraft gleich dem Gewicht von 6 kg wirkt; man müß also den Kolben B mit 60 kg belasten, wenn das Gleichgewicht ungestö bleiben soll.

Wird der Kolben A mit dem Querschnitt q und einer Höhe h hina gedrückt, so verdrängt er ein Volumen Wasser $= qh$. Wird der Kolben vom Querschnitt Q gleichzeitig um die Höhe H gehoben, so wird dadur ein Raum vom Volumen $= QH$ gewonnen. Da nun offenbar $qh = QH$ se muß, so folgt hieraus:

$$h : H = Q : q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ($$

d. h. die Wege der Kolben verhalten sich verkehrt wie ihre Querschnitte. I aber die Querschnitte sich verhalten wie die Kräfte, so verhalten sich c Wege verkehrt wie c Kräfte, wie wir dies b den aus festen Körpe gebauten Maschin nachgewiesen haben. gilt also auch bei d Vorrichtung in Fig. 3 daß die übertragene A beit gleich groß blei oder daß auch hier d Prinzip der virtuell Geschwindigkeiten e füllt bleibt.

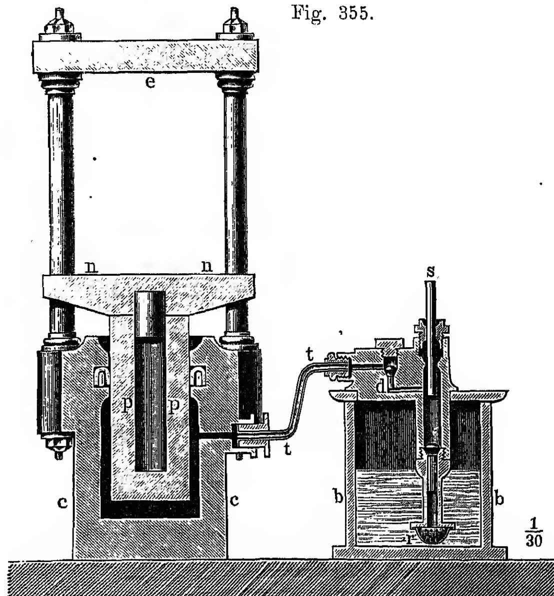
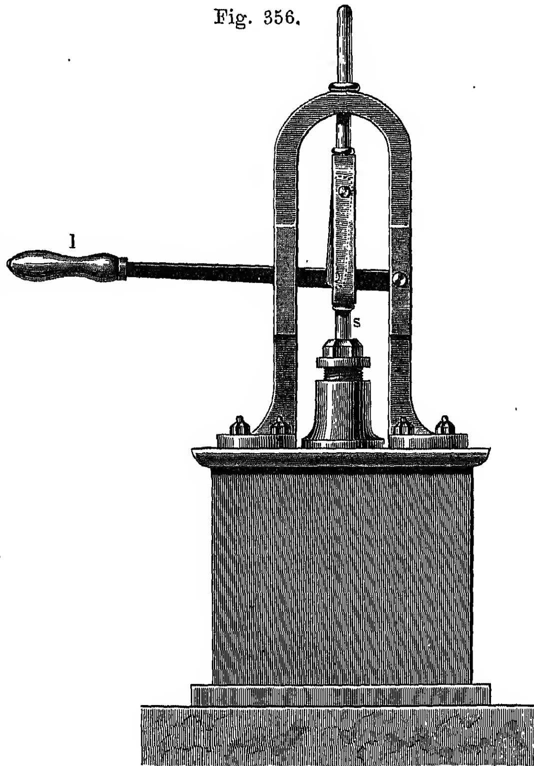


Fig. 355.

Eine hierauf b ruhende Maschine ist c hydraulische Press sie besteht aus zv Hauptteilen, einer Druc pumpe, mittels deren c Druck auf das Wass ausgeübt wird, u einem Kolben mit ein Platte, welcher den Druck empfängt, um ihn auf den zu pressenden Körp zu übertragen. Fig. 355 ist ein Durchschnitt der hydraulischen Presse u Fig. 356 eine äußere Ansicht der Druckpumpe von der rechten Seite der Fig. 3 gesehen. Durch den Hebel l wird der Kolben s gehoben, das Wasser des I hälters b dringt durch das Sieb r, hebt das Ventil i und gelangt so unter d Kolben s. Wenn man den Hebel niederdrückt, so geht auch der Kolbe

nieder, das zurückgetriebene Wasser schließt das Ventil i, hebt das Ventil d und gelangt durch die Röhre t in den Zylinder c der Presse; hier drückt es nun, vorausgesetzt, daß die ganze Höhlung von c samt der Röhre t bereits mit Wasser gefüllt sind, gegen den Kolben p, den es mit der Platte n hebt, und so wird der zu pressende Körper zwischen n und der festen Platte e zusammengedrückt.

Fig. 356.



Wenn der Kolben s durch irgend eine Kraft niedergedrückt wird, so hat jeder Flächenteil der Gefäßwände, welcher dem Querschnitt des Kolbens s gleich ist, eine gleiche Kraft auszuhalten. Ist also der Querschnitt des Kolbens p n mal so groß als der des Kolbens s, so wird der Kolben p mit einer Kraft nk gehoben, wenn der Kolben s mit einer Kraft k niedergedrückt wird.

Bezeichnen wir mit K die Kraft, mit welcher der große Kolben gehoben wird, so ist:

$$K = k\,\frac{R^2}{r^2},$$

wenn r den Halbmesser des kleinen, R den des großen Kolbens bezeichnet. Ist nun ferner l der Hebelarm, an welchen der kleine Kolben angehängt ist, L der Hebelarm, an welchem der Arbeiter drückt, so ist:

$$k = D\,\frac{L}{l},$$

wenn D die Kraft bezeichnet, welche der Arbeiter ausübt, mithin haben wir:

$$K = D\,\frac{L\,.\,R^2}{l\,.\,r^2}.$$

Ist z. B. $R = 10r$ und $L = 6l$, so ist $K = D\,.\,600$.

Wenn also der Hebel bei l mit einer Kraft gleich dem Gewicht von 10 kg niedergedrückt wird, so wird der Kolben p mit einer Kraft gleich dem Gewicht von 6000 kg gehoben.

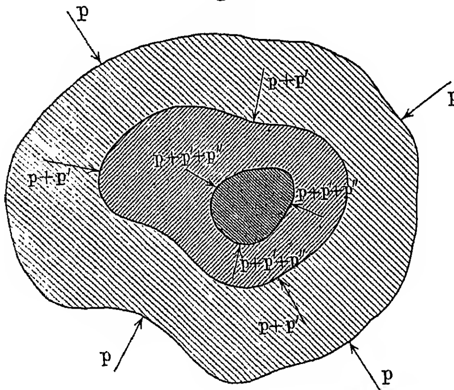
Von der Kraft, welche am Hebel l angewandt wird, geht ein Teil durch Reibungswiderstände verloren, bevor sie sich bis zum Kolben p fortpflanzt; deshalb wird der Effekt stets geringer sein, als er nach den eben angeführten Betrachtungen sein sollte.

Da das Übersetzungsverhältnis an der hydraulischen Presse ein desto größeres ist, je größer das Verhältnis der Durchmesser der Kolben, so hat

man zur Erreichung möglichst großer Kräfte den Durchmesser des Preßkolbens möglichst groß, dagegen jenen des Druckkolbens möglichst klein zu machen. Dies bedingt aber den Mißstand, daß der Druckkolben zu schwach wird; man hat deshalb Maschinen konstruiert, bei welchen der Druckkolben die Form eines Stahldrahtes oder einer Darmsaite besitzt, welche mittels Kurbel und Walze durch eine runde Öffnung in das Innere des Behälters hineingezogen werden. Solche Maschinen werden stereohydraulische Pressen genannt. Sie eignen sich zur Ausübung sehr bedeutender Kräfte auf sehr kurze Wegstrecken, z. B. für Lochmaschinen zur Durchbohrung von Kesselblech usw.

§ 118. Niveauschichten in einer Flüssigkeit. Mehr Schwierigkeit als der Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit, wo überall derselbe Druck stattfindet, macht für die Vorstellung derjenige einer Flüssigkeit, wo der Druck im Innern an verschiedenen Stellen verschieden ist. Es wirke z. B. bei einem Flüssigkeitsvolumen auf eine Flächeneinheit im Innern außer der Kraft p aus irgend einer Ursache noch eine weitere Kraft p', so wird das betreffende Flüssigkeitsteilchen, auf welches von der entgegengesetzten Seite her nur der Druck p wirkt, sich offenbar infolge des Drucküberschusses p' in der Richtung des letzteren in Bewegung setzen, und es gibt bloß eine Bedingung, um auch in diesem Falle Gleichgewicht zu erhalten, die nämlich, daß das betreffende Flächenstück einer geschlossenen Oberfläche angehöre, auf deren Flächeneinheit überall eine Kraft $p + p'$ von außen ausgeübt werde. Innerhalb dieser neuen Oberfläche findet dann überall ein Druck $p + p'$ statt, so daß auch jedes Element der Oberfläche wieder von allen Seiten einen gleichen Druck erfährt und somit in Ruhe bleiben wird. Auf diese Weise können wir uns noch eine Reihe weiterer geschlossener Oberflächen denken, innerhalb welcher und auf welche senkrecht zu ihnen je immer höhere Drucke ausgeübt werden, wie dies Fig. 357 für drei Oberflächen darstellt, und es kann somit unbeschadet des Gleichgewichtes der Druck in einer Flüssigkeit von Stelle zu Stelle variieren. Die geschlossenen Oberflächen gleichen Druckes, welche in diesem Falle in der Flüssigkeit vorhanden sein müssen und die je auf den Richtungen der Drucke senkrecht stehen, werden Niveauschichten genannt.

Fig. 357.



§ 119. Freie Oberfläche einer Flüssigkeit. Auch die freie Oberfläche einer Flüssigkeit wird eine solche Niveauschicht sein, sich also stets an jeder Stelle senkrecht zur Resultanten der wirkenden Kräfte einstellen. Demgemäß wird die freie Oberfläche der Flüssigkeit in einem Gefäße, wenn nur die Schwere auf sie einwirkt, eine horizontale

Ebene sein, was wir vorwegnehmend bereits in § 27 auf die Libelle angewendet haben. Tritt aber zu der Schwere noch eine andere Kraft hinzu, z. B. wie im Falle der Fig. 358 die Zentrifugalkraft, wenn wir das zylindrische Gefäß *CC* um seine Achse *AA* rotieren lassen, so nimmt die Flüssigkeitsoberfläche statt der Horizontalebene durch *aa'* die Gestalt eines Rotationsparaboloids an vom Durchschnitt *bcb'*. Die Resultante *r* nämlich aus der Schwerkraft *g* und der radial nach außen wirkenden Zentrifugalkraft *f* wird, je weiter wir uns von der Achse entfernen, wegen Zunahme der letzteren mit dem Radius bei gleichbleibender Rotationsgeschwindigkeit gemäß Gleichung (1), § 51, immer mehr der Richtung der letzteren, d. h. der Horizontalen, sich nähern und somit die Oberfläche der Flüssigkeit immer steiler werden. Durch

Fig. 358.

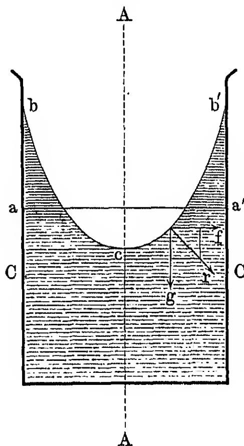
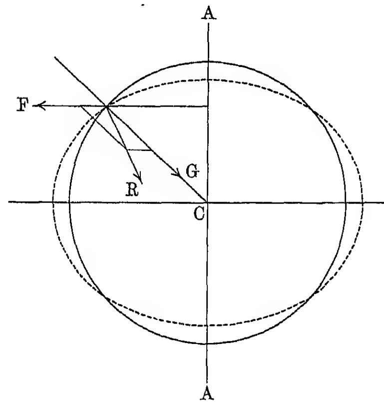


Fig. 359.



höhere Rechnung findet man, daß so die Flüssigkeitsoberfläche in der Tat die Gestalt eines Rotationsparaboloids, wie angegeben, annehmen wird.

Nehmen wir an, unsere Erde sei ganz mit einer Wasserschicht bedeckt, und die Atmosphäre habe überall eine gleiche Dichte und Höhe, so wird die Wasseroberfläche ringsum einem gleichen, dem Gewichte der über ihr ruhenden Luftsäule entsprechenden Drucke ausgesetzt sein, der als der Schwere entspringend nach dem Zentrum der Erde gerichtet ist. Setzen wir diese zunächst als ruhend voraus, so daß keine andere Kraft als die Schwere auf die Flüssigkeit wirke, so würde deren Oberfläche eine Kugel darstellen. Infolge der Drehung der Erde um ihre Achse *AA*, Fig. 359, kommt aber zu der nach dem Zentrum *C* hin gerichteten Schwerkraft *G* noch die senkrecht zur Achse *AA* nach außen wirkende Fliehkraft *F* hinzu, so daß sich die freie Oberfläche der Wasserschicht senkrecht zur Resultanten *R* aus beiden einstellen wird, woraus dann für die ganze Oberfläche statt einer Kugel die Gestalt eines an den Enden der Erdachse abgeplatteten Rotationsellipsoids (punktierte Linie der Figur) resultiert, wie wir dies in § 102 bereits als eine der Ursachen der Zunahme der Schwere vom Äquator zum Pole hin erwähnt und in § 51 durch einen Versuch mit der Schwungmaschine an elastischen Messingringen und einer plastischen Tonkugel demonstriert haben.

Da aber auch die feste Erdrinde und nicht bloß der flüssige Teil derselben zufolge der Gradmessungen ein an den Polen abgeplattetes Rotations-

ellipsoid darstellt, so hat man daran geschlossen, daß die Erde in e
früheren Epoche ihrer Existenz feurig flüssig gewesen sein müsse und da
diese Gestalt angenommen habe. Wie dem auch in Wirklichkeit gew
sein möge, so würde die durchweg flüssige Erde ein vorzügliches Bei
einer Flüssigkeitsmasse darbieten, bei welcher infolge des Gewichtes
nächst höheren Schichten auf die tieferen der Druck nach innen zu besti
wächst und wo die geschlossenen Niveauschichten konzentrische Kugelflä
bzw. Sphäroide zur äußeren Oberfläche repräsentieren, die doch ab
Gleichgewicht stattfinden könnte. Infolge dieses mit der Tiefe wachsen
Druckes wird aber auch die Dichtigkeit der Flüssigkeit gegen das Zent
der Erde hin zugenommen haben; in der Tat ist die mittlere Dichtig
der Erdmasse, wie wir gesehen haben, 5,5, während nach A. v. Humb
die mittlere Dichtigkeit der oberen Erdschichten nur 2,5 beträgt, es muß
die der unteren Schichten viel größer als 5,5 sein. Es läßt sich berech
daß in jenem flüssigen Zustande der Erde in der Nähe ihres Zentrums
Druck von $1\frac{1}{2}$ Millionen Kilogramm auf 1 cm² müßte stattgefunden ha
was eine beträchtliche Zunahme der Dichtigkeit von der Oberfläche ge
das Zentrum der Erde hin begreiflich macht, worauf wir übrigens sp
noch zurückkommen werden.

§ 120. Kommunizierende Gefäße. Gehen wir von dem vorigen
spiel variierenden Druckes im Innern einer Flüssigkeit zur Betrachtung
Gleichgewichtes einer in ein Gefäß eingeschlossenen Flüssigkeit über,
welche ebenfalls bloß die Schwere einwirkt, so wird auch da der Druck
der Oberfläche nach der Tiefe hin zufolge des Gewichtes der oberen Flü
keitsschichten stetig proportional der Tiefe unter der Oberfläche zuneh
wobei die Ergänzung der übereinander liegenden Schichten verschied
Druckes zu geschlossenen Niveauschichten oder Oberflächen gleichen Dru
durch einen Verlauf derselben je an den Wänden des Gefäßes herum s

Fig. 360.

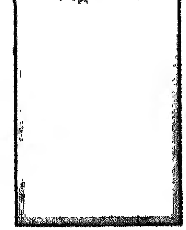
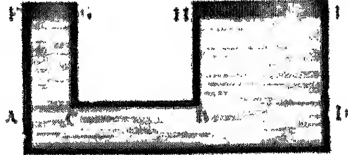


Fig. 361.

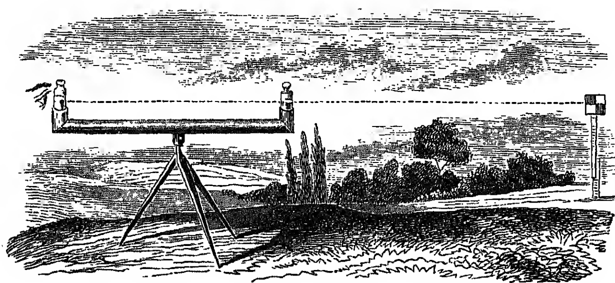


findet, wie dies Fig. 360 darstellt, wo die zusammenfallenden Niveausch
längs den Wänden nur behufs der Verdeutlichung separat gezeichnet
In jeder Horizontalebene eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes muß
überall derselbe Druck stattfinden, der abgesehen von dem auf die O
fläche wirkenden Luftdruck dem Gewicht der Flüssigkeitssäule über
Flächeneinheit bis zur Oberfläche entspricht. Hieraus folgt unmittelbar
nächst der Satz, daß in kommunizierenden zylindrischen Röhren auch
verschiedener Weite die Flüssigkeit gleich hoch steht, d. h. in beiden Rö
in dieselbe Horizontale falle. In der Tat werden in den unten kommu
zierenden Zylindern AF und DI der Fig. 361 die Oberflächen FG und
behufs Gleichgewicht in dieselbe Horizontale fallen müssen, da nur dan

der horizontalen Niveauschicht $ACBD$ überall derselbe Druck stattfinden wird. Man kann dies auch aus der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes an der Hand der gleiche Form und Dimensionen aufweisenden Fig. 354 demonstrieren, indem offenbar die dort auf die Flüssigkeitsoberflächen drückenden Gewichte der beiden Kolben mit den auf ihnen ruhenden Lasten, die sich zueinander behufs Gleichgewicht wie die Querschnitte der beiden Zylinder verhalten müßten, durch Wassersäulen mit diesen Querschnitten und gleicher Höhe GC und HB ersetzt werden können.

Auf das Gesetz der kommunizierenden Röhren gründet sich die Wasserwage oder Kanalwage, wie sie in ihrer Anwendung zum Nivellieren im

Fig. 362.



Felde die Fig. 362 darstellt. Wie wir später sehen werden, dürfen aber dabei nicht ganz enge Röhren verwendet werden, da bei ihnen noch andere Kräfte als die Schwere zur Geltung kommen.

Haben wir in kommunizierenden Röhren statt einer Flüssigkeit deren zwei, welche sich nicht mischen, wie dies in Fig. 363 dargestellt ist, so müssen sich, damit Gleichgewicht stattfindet, die Höhen der Flüssigkeitssäulen in beiden Schenkeln über der Trennungsfläche umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten. In der durch die Berührungsfläche B gelegten Horizontalebene durch beide Schenkel BA muß nämlich überall derselbe Druck stattfinden. Der Druck in BF bei B ist aber: $h \cdot d$, und in AE ist er bei A: $h' d'$; wenn d und d' die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten darstellen und h und h' die Höhen BF und AE; sollen diese Drucke gleich sein, so muß also in der Tat sein:

$$\frac{h}{h'} = \frac{d'}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hätten wir z. B. in der Röhre BF Wasser und in AE Quecksilber, so müßte sein:

$$\frac{h}{h'} = 13{,}6,$$

Fig. 363.

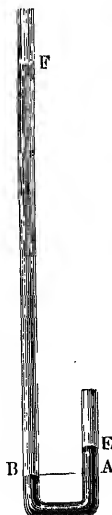
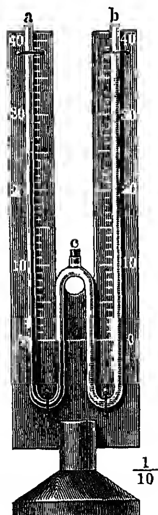


Fig. 364.

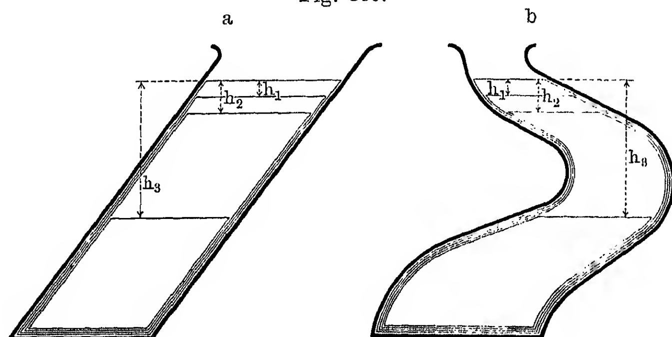


da die Dichtigkeit d' des Quecksilbers 13,6 mal größer ist als die des Wassers d.

Sind die beiden Flüssigkeiten mischbar, so kann man sich Prüfung dieses Gesetzes des in Fig. 364 dargestellten Apparates bedie bei welchem die beiden Flüssigkeiten in getrennten kommunizierenden Röh a und b sich befinden, deren kürzere Schenkel bei c vereinigt sind und eine durch einen Kork oder besser durch einen Hahn verschließbare Öffn besitzen. Man komprimiert von da aus mit einer Handluftpumpe oder ei Kautschukball oder auch bloß mit dem Munde durch einen angesetz Kautschukschlauch die Luft in diesen kurzen Schenkeln, wodurch die Flüs keiten in den beiden äußeren Schenkeln verschieden gehoben wird. Eine Teil längs dieser Schenkel a und b läßt dann die Höhe der Flüssigkeitssäulen ü den Niveaus der Flüssigkeiten in den kürzeren abmessen, wodurch ma Anbetracht des gleichen Druckes auf die letzteren unmittelbar die Gleichung verifizieren oder auch, wie wir später noch erörtern werden, das Verhäl von $\frac{d'}{d}$ bestimmen kann, wenn es nicht bereits bekannt ist.

§ 121. Bodendruck. Hydrostatisches Paradoxon. Die Betra tung über die Zunahme des Druckes in einer Flüssigkeit, die sich in ein Gefäße befindet, mit der Tiefe unter der Oberfläche entsprechend dem Gewic der Flüssigkeitssäule von der betrachteten Stelle bis zur Oberfläche und ü

Fig. 365.



den Verlauf der Niveauschichten längs der Wände gilt nicht bloß für gerades zylindrisches Gefäß, wie es in Fig. 360 angenommen wurde, sond auch für beliebig gestaltete Gefäße wie in der Fig. 365 a und b. Innerh der Niveauschichten, die mit ihrer oberen horizontalen Begrenzung in Tiefen h_1, h_2, h_3 unter der Oberfläche sich befinden, wird bis zur nächs Niveauschicht je auf die Flächeneinheit in jeder Richtung eine Kraft a geübt, die dem Gewichte von vertikalen Flüssigkeitssäulen von diesen Höh und der Flächeneinheit als Basis entspricht, wobei es offenbar ganz glei gültig ist, ob die Vertikale der betreffenden Niveauschicht direkt bis zur Ob fläche der Flüssigkeit reiche oder nicht, da sich ja der Druck von Horizont schicht zu Horizontalschicht fortpflanzt und wächst.

Für die unterste Schicht unmittelbar über dem Boden wird also Druck senkrecht auf die Flächen auch dem Gewichte einer vertikalen Wass säule vom Boden bis zur Oberfläche der Flüssigkeit entsprechen oh Rücksicht darauf, wie das Gefäß über diesem Boden geformt sei, und w folglich der ganze horizontale Boden eine Kraft auszuhalten haben,

infach dem Gewichte einer vertikalen Flüssigkeitssäule über ihm bis zur)berfläche der Flüssigkeit im Gefäße gleichkommt, ob nun das Gefäß zylinlrisch ist, sich nach oben verengt oder erweitert oder irgend eine Gestalt hat.

Bezeichnet Q den Querschnitt des horizontalen Bodens, H die Höhe der 'lüssigkeit im Gefäße über ihm und d ihre Dichte, d. h. die Masse in der Volumeneinheit, so ist somit die auf den Boden ausgeübte Kraft P im absouten Maße gegeben durch:

$$P = Q . H . d . g \text{ [1]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Drücken wir Q in Quadratcentimetern und H in Centimetern aus und nessen wir P nach Grammgewicht, so erhalten wir, wenn reines Wasser im Gefäße ist:

$$P = Q . H.$$

Die Verwechselung dieser Kraft mit dem Gewichte des ganzen Gefäßnhalts, der bei Verengerung des Gefäßes oberhalb des Bodens kleiner und bei Erweiterung desselben größer wird, hat jedenfalls lazu geführt, obiger Eigenschaft des Bodendruckes len Namen hydrostatisches Paradoxon beizuegen. Pascal hat denn auch einen besonderen Apparat angegeben, um lie Richtigkeit obiger Gleichung durch das Experinent zu beweisen.

Fig. 366.

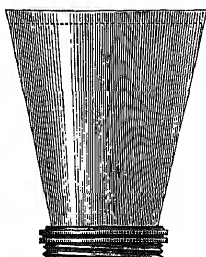
Fig. 366 stellt einen Apparat dieser Art dar.

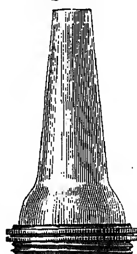
Die untere Öffnung eines Messingringes r, welcher genau 0,798 dm inneren Durchmesser hat, und dessen unterer genau horizontal stehender Rand vollkommen eben abgeschliffen sein muß, wird durch eine Messingplatte p geschlossen, welche mittels eines Drahtes an den einen Arm einer Wage angehängt ist. In die Wagschale auf der anderen Seite der Wage wird ein Gewicht l gelegt, welches genau der Platte p das Gleichgewicht hält. Bei c befindet sich eine Vorrichtung, mittels deren man die Platte p etwas heben oder senken kann, und welche erlaubt, ihre Höhe so zu regulieren, daß sie gerade die Öffnung des Ringes r schließt, wenn der Wagbalken horizontal steht.

In den Ring r ist nun zunächst ein zylindrisches Gefäß A eingeschraubt, welches gleichen Durchmesser mit dem Ringe hat und dessen Boden durch

[1]) Die Kraft P wird oft auch als „Bodendruck" bezeichnet. Darunter ist aber nicht der Druck auf die Flächeneinheit, sondern der Gesamtdruck zu verstehen (siehe die Anmerkung S. 354).

die Platte p gebildet wird. Der Inhalt dieses Gefäßes vom Boden bis einer 2 dm über dem Boden befindlichen Marke beträgt: $0{,}798^2 . \pi . 2$ o gerade 1 dm³, das diesen Raum ausfüllende Wasser hat also das Gewicht


Fig. 367.


Fig. 368.

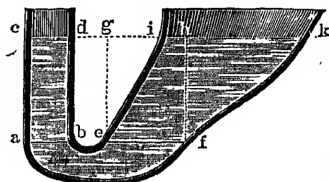
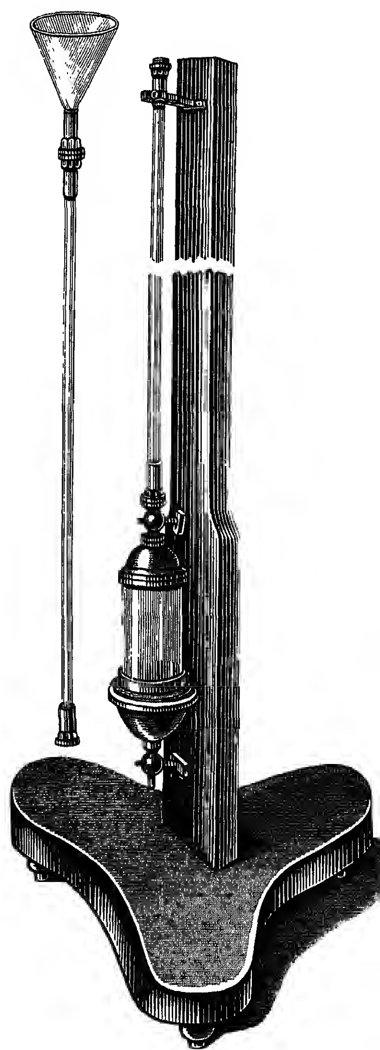


Fig. 369.


Fig. 370.

1 kg. Legt man demnach ein Kilogrammstück P auf die Wagschale rechts, so wird gerade Gleichgewicht bestehen, wenn das Gefäß A bis zur Marke mit Wasser gefüllt ist; jedes fernere Zuschütten von Wasser bewirkt ein Niederdrücken der Bodenplatte p, infolgedessen ein Teil des Wassers aus A in das Gefäß B ausfließt (dessen Durchmesser in unserer Fi der Raumersparnis wegen zu klein gezeichnet ist).

Schraubt man nun in den Ring r statt des zylindrischen Gefäßes A oben verengte Gefäß Fig. 368, oder das oben erweiterte Gefäß Fig. 367, muß man dieselben wieder genau 2 dm hoch mit Wasser füllen, wenn Druck auf den Boden derselbe bleiben, jedes fernere Zugießen von Wa also ein Abdrücken der Bodenplatte p bewirken soll.

Es bedarf nach dem Vorigen keiner näheren Begründung mehr, wa auch in dem durch Fig. 369 dargestellten Falle, d. h. bei unregelmäßig

definiert: Kristall ist jeder chemisch homogene Körper, welcher be Abwesenheit eines durch äußere oder innere Spannungen hervor gerufenen Zwanges anisotrop ist, d. h. nach verschiedenen Rich tungen verschiedene physikalische Eigenschaften besitzt.

Der Ausschluß der Spannungen ist notwendig, um z. B. Glaskörpe welche durch Druck anisotrop geworden sind, von der Definition des Kristall auszuschließen. Da es nach Lehmanns Entdeckung auch „fließende Kr stalle" gibt, so ist der Ausdruck „fest" wegzulassen. Wenn also auch di Begrenzung eines wirklichen Kristalls, d. h. seine Gestalt nicht zu seine wesentlichen Merkmalen gehört, so ist sie doch von großer Wichtigkeit, un zwar schon deshalb, weil sie in gesetzmäßigem Zusammenhange zu seine inneren Struktur steht.

Jedem kristallisierenden Stoffe kommt eine ihm eigentüm liche Kristallform zu. Zwar zeigt ein und derselbe chemische Sto nach Umständen verschiedene Kristallform; so z. B. kristallisiert der Schwef je nach Umständen in verschiedenen Kristallsystemen. In der Natur finde er sich in schönen gelben Oktaedern des rhombischen Systems, die auch au seiner Lösung in Schwefelkohlenstoff erhalten werden (α-Schwefel, rhombische Schwefel). Läßt man geschmolzenen Schwefel allmählich erkalten, so erhä man ihn in langen schiefen Prismen des monoklinen Kristallsystems (β-Schwefe monosymmetrischer Schwefel), welche aber allmählich einer Umwandlung i die andere Modifikation unterliegen, indem sie in ein Aggregat von kleine Kristallen des rhombischen Systems zerfallen, wobei die früher beobachte durchscheinende Bernsteinfarbe in die eigentliche gelbe Schwefelfarbe übe geht. Die Erscheinung, Enantiotropie genannt, kommt bei vielen Substanze vor. Vom physikalischen Standpunkte sind aber diese Modifikatione nicht als derselbe Stoff aufzufassen; derselbe chemische Stoff kann also a verschiedenartiger physikalischer Stoff auftreten, deren jedem dann sei besondere Kristallform und Kristallstruktur zukommt [1]).

Das Charakteristische der Kristallform liegt nicht in der Form d Begrenzungsflächen, sondern nur in der Richtung dieser Flächen. Wer der Kristall wächst, so verschieben sich die Begrenzungsebenen parallel sich selbst nach außen; es kommt aber lediglich auf die äußeren Bedingung (Materialzufuhr) an, ob diese oder jene Fläche mehr Materialzuwachs erfäh Die wirklichen Kristalle haben daher nur selten jene ideale Form, bei welch eine gleichmäßige Ausbildung aller Begrenzungsflächen angenommen wi Die Figur der begrenzenden Flächen wird durch die Parallelverschiebu derselben und die Durchschneidung mit den Nachbarflächen in mannigfalti ster Weise verändert, so daß die Kristallform für den Ungeübten kau wiederzuerkennen ist. Eines bleibt aber strenge erhalten: nämlich d Richtung der Ebenen und infolgedessen die Größe der Kantenwinkel, welc die Ebenen einschließen. So z. B. wird aus der Kristallform des Bergk

[1]) O. Lehmann (Zeitschr. f. Kristallogr. 18, 457) hält das Vorkommen ei und derselben chemischen Substanz in mehreren Kristallformen für unmöglic demnach müssen z. B. die Modifikationen des Schwefels als verschiedene chemisc Substanzen bezeichnet werden. Derselbe Autor geht sogar so weit, verschiede Aggregatzustände einer und derselben chemischen Substanz für unmöglich erklären. Eis, Wasser, Wasserdampf sind ihm daher chemisch verschiedene Sto was mit der bisherigen Nomenklatur nicht übereinstimmt.

talteter kommunizierender Röhre, der oben für zylindrische Röhren aufgestellte Satz doch gilt, also auch hier die Niveaus der Flüssigkeit in beiden Schenkeln *cd* und *ik* in dieselbe horizontale Ebene fallen werden.

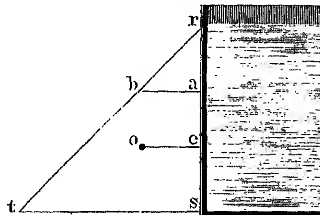
Auf den Satz über den Bodendruck gründet sich die Realsche Presse, die in Fig. 370 dargestellt ist[1]) und bezweckt, Wasser oder andere Flüssigkeiten unter hohem Drucke zur Extraktion von Säften aus Pflanzenteilen durchzutreiben, die zwischen zwei Drahtsiebe im unteren weiteren Teile des Apparates eingelagert sind. Da der Druck auf das Sieb nur von der Höhe der Wassersäule über ihnen abhängt, so genügt zur Erhöhung desselben, auf den oberen Teil des Apparates eine lange, enge, also nicht viel Flüssigkeit fassende Röhre aufzuschrauben und diese mittels des Trichters am oberen Ende mit Wasser zu füllen.

§ 122. Seitendruck. Die Niveauschichten in den Figuren 360 und 365 a und b lassen auch unmittelbar auf den Seitendruck schließen, der von der Flüssigkeit auf die Gefäßwände ausgeübt wird. So ist z. B. nach den letzteren Figuren der Druck der Wand in der Tiefe h_2 unter der Oberfläche entsprechend der betreffenden Niveauschicht:

$$p_2 = h_2 d g,$$

und zwar ist derselbe stets senkrecht zur Wandfläche gerichtet, da die Niveauschicht an dieser hin verläuft. Dieser Seitendruck, den irgend ein Punkt *a* des vertikalen, mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes in Fig. 371 auszuhalten hat, läßt sich durch Zeichnung anschaulich machen. Man ziehe in *a* eine horizontale Linie und mache ihre Länge *ab* gleich der Tiefe von *a* unter dem Wasserspiegel, so kann die Linie *ab* den Druck repräsentieren, den der Punkt *a* auszuhalten hat. Macht man dieselbe Konstruktion für mehrere Punkte der vertikalen Linie *rs*, so werden die Endpunkte aller der horizontalen Drucklinien in die Linie *rt* fallen. Es folgt daraus, daß der Gesamtdruck, welchen die Linie *rs* der vertikalen Gefäßwand auszuhalten hat, durch den Flächenraum des Dreiecks *rst* repräsentiert ist.

Fig. 371.



Somit hat man, wenn P die gesamte Kraft auf die Seitenwand darstellt, diese eine Breite B hat und die Höhe der Flüssigkeitsoberfläche über dem Boden H ist:

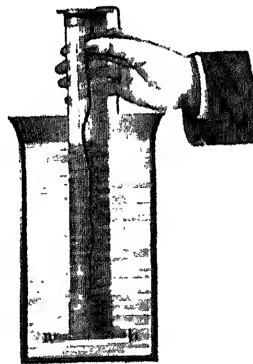
$$P = \frac{H^2}{2} \cdot B \cdot d \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Der Angriffspunkt dieser Resultierenden aller elementaren Pressungen, welche das Wandstück auszuhalten hat, heißt Mittelpunkt des Druckes. Er liegt immer tiefer als der Schwerpunkt des Wandstückes, weil ja die Stärke des Druckes nach unten wächst. Der Mittelpunkt des Druckes für die vertikale Linie *rs* ist leicht zu ermitteln; denn es ist offenbar derjenige Punkt *e*, in welchem die Linie *rs* von derjenigen horizontalen Linie getroffen wird, die durch den Schwerpunkt *o* des Dreiecks *rst* geht. Es liegt also der

[1]) Entnommen aus Fricks Physikalische Technik, 6. Aufl., von O. Lehmann, , 225.

Mittelpunkt des Druckes P auf der vertikalen Mittellinie der Wand, und zwar ist seine Höhe über dem Boden ein Drittel der Höhe, in welcher sich die Flüssigkeitsoberfläche über dem Boden befindet [1].

§ 123. Druck im Inneren der Flüssigkeiten. Archimedisches Prinzip. Jedes Teilchen einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit muß von allen Seiten her einen vollkommen gleichen Druck aushalten. Gegen die untere Seite einer sehr dünnen horizontalen Wasserschicht wirkt also ein ebenso großer Druck von unten her, wie der ist, welcher von oben her auf ihr lastet. Daß im Inneren der Flüssigkeit ein solcher nach oben wirkender Druck wirklich vorhanden ist, läßt sich leicht durch den Versuch zeigen.



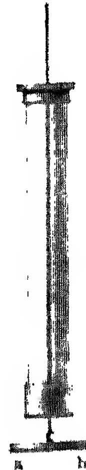


Fig. 372.

Das untere Ende einer an beiden Enden offenen weiten Glasröhre, Fig. 372, ist mit einer Messingfassung versehen, deren Rand eben abgeschliffen ist. ab ist eine dünne Metallscheibe, welche in der Mitte einen Haken hat, vermittels dessen man sie an einer durch die Röhre hindurchgehenden Schnur anziehen kann, so daß, wenn man den Faden anzieht, die Scheibe die untere Öffnung der Röhre vollkommen verschließt. In dieser Weise verschlossen, wird die Röhre in Wasser eingetaucht. Dann ist es nicht mehr nötig, den Faden anzuziehen, um das Herunterfallen der Scheibe zu verhindern, weil sie durch die Flüssigkeit nach oben gedrückt wird. Gießt man Wasser in die Röhre, so wird die Metallscheibe durch ihr eigenes Gewicht fallen, sobald, oder richtiger, bevor das Niveau des Wassers in der Röhre dem äußeren gleich geworden ist, denn nun erleidet die Metallscheibe durch die Flüssigkeit gleichen Druck nach unten und nach oben.

Auf dem erwähnten Drucke beruht das

Archimedische Prinzip [2]. Dasselbe lautet: **Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper erleidet infolge des Druckes der ersteren eine nach aufwärts gerichtete Kraft, welche der Größe nach gleich ist dem Gewichte der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmasse.** Diese Kraft heißt der **Auftrieb**. Da diese Kraft dem Gewichte des Körpers entgegen gerichtet ist, so kommt nur die Differenz beider Kräfte zur Wirkung. Man pflegt daher das Archimedische Prinzip auch so auszudrücken: **Jeder Körper verliert beim Eintauchen in eine Flüssigkeit scheinbar so viel von seinem Gewichte, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt.** Ein wirklicher „Gewichtsverlust" findet nicht statt, denn das wirkliche Gewicht, d. i. die Anziehungskraft der Erde auf den Körper, erleidet durch sein Eintauchen keine Verminderung.

---

[1]) Über Apparate für Seitendruck und Bodendruck vgl. A. Höfler, Zeitschr. für phys. u. chem. Unterricht 16, 257; A. Hartwich, ebenda S. 275.

[2]) Über die Entdeckung dieses Prinzips durch Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) berichtet Vitruv, „De architectura", lib. 9.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes durch eine einfache Betrachtung überzeugen. Irgend ein gerades Prisma sei in eine Flüssigkeit eingetaucht, wie dies Fig. 373 darstellt. Da in jeder Niveauschicht die Drucke ringsum senkrecht gegen die vertikalen Seitenwände des Prismas gerichtet sind, so werden sich offenbar die Flüssigkeitsdrucke auf die Seitenwände des Prismas gegenseitig aufheben, so daß im horizontalen Sinne kein Kraftüberschuß an irgend einer Stelle übrig bleibt. Dagegen ist dies für die obere und untere Fläche des Prismas nicht der Fall. Die Kraft von unten wird sein: $p' = h' q d . g$, wenn d die Dichtigkeit der Flüssigkeit und q den Querschnitt des Prismas darstellt, und die Kraft von oben ist: $p = h . q . d . g$; es ist somit ein Kraftüberschuß D von unten über den von oben:

Fig. 373.

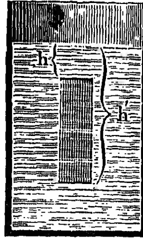
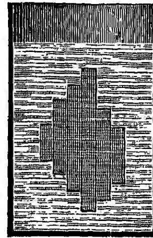


Fig. 374.

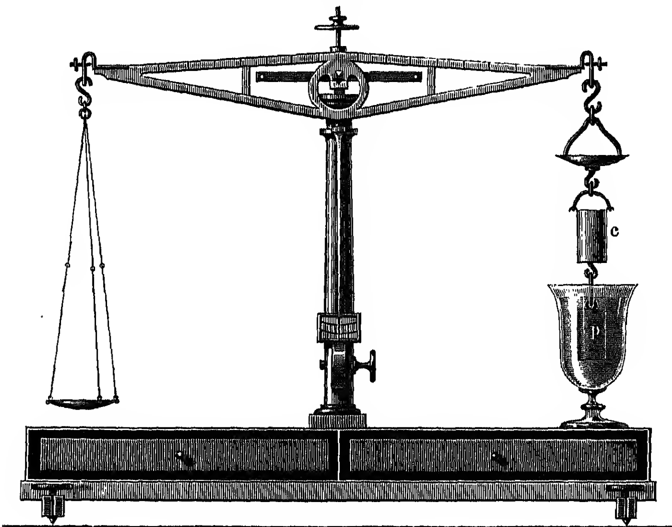


$$D = p' - p = (h' - h) q . d . g.$$

Nun ist $(h' - h) q$ nichts anderes als das Volumen des Prismas, und es stellt daher D in der Tat das Gewicht einer dem Volumen des Prismas gleichen Flüssigkeitsmasse dar.

Nehmen wir statt eines einzelnen Prismas ein Bündel von mehreren wie dies Fig. 374 darstellt, so ist klar, daß jedes einzelne Prisma durch das Eintauchen in die Flüssigkeit von seinem Gewichte scheinbar so viel verliert, als ein gleiches Volumen der Flüssigkeit wiegt, folglich ist auch der scheinbare Gewichtsverlust, welchen der ganze aus mehreren Prismen zusammengesetzte Körper erleidet, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsmasse, deren Volumen dem Gesamtvolumen aller Prismen gleich ist. Da man sich aber einen jeden Körper in eine Menge solcher vertikal stehender Prismen von

Fig. 375.



sehr kleinem Querschnitt zerlegt denken kann, so läßt sich unser Schluß auf jeden beliebigen Körper ausdehnen, und es ist also damit die Richtigkeit des Archimedischen Prinzips für jeden beliebig geformten Körper bewiesen.

Von der Wahrheit des Archimedischen Prinzips kann man sich übrigens auch durch den Versuch überzeugen. An der einen Schale einer Wage, Fig. 375, ist ein hohler Zylinder *c* angehängt, an welchem wieder ein massiver Zylinder *p* hängt, der ganz genau in die Höhlung des oberen hineinpaßt, wie man dies Fig. 376 sieht, in welcher der Zylinder *p* teilweise in *c* steckend in größerem Maßstabe dargestellt ist. Auf die andere Wagschale legt man so viele Gewichte, daß das Gleichgewicht hergestellt ist. Taucht man nun

Fig. 376.

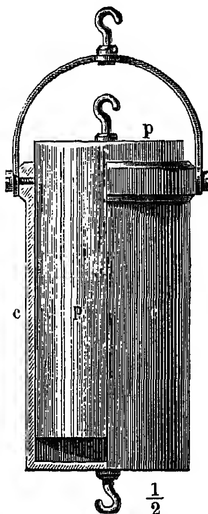
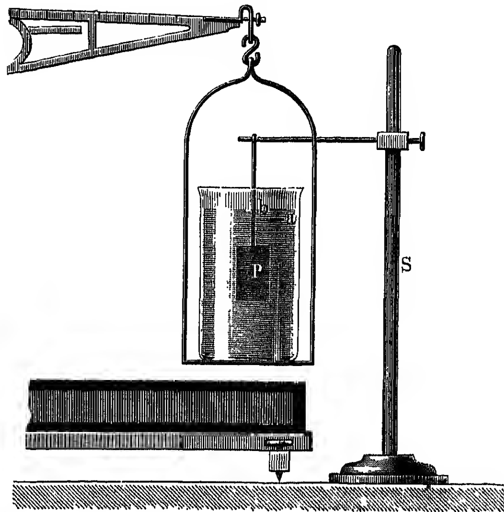


Fig. 377.



aber den Zylinder *p* in Wasser, so verliert er dadurch scheinbar einen Teil seines Gewichtes, das Gleichgewicht ist also gestört; um es wiederherzustellen, braucht man nur den Zylinder *c* voll Wasser zu gießen, was offenbar zeigt, daß *p* durch das Eintauchen in Wasser gerade so viel an Gewicht scheinbar verloren hat, als das Wasser wiegt, welches den Zylinder *c* ausfüllt. Das Volumen des in *c* befindlichen Wassers ist aber dem Volumen des Wassers gleich, welches der Zylinder *p* aus der Stelle treibt; mithin ist der scheinbare Gewichtsverlust von *p* gleich dem Gewichte des aus der Stelle vertriebenen Wassers.

Eine lehrreiche Modifikation des beschriebenen Experimentes ist folgende. Auf die rechtsseitige Schale der Wage wird ein Gefäß mit Wasser gesetzt, Fig. 377, und dieses durch Gewichte auf der anderen Schale ins Gleichgewicht gebracht. Der Stand des Wasserspiegels wird durch eine angeklebte Marke *a* bezeichnet. Hierauf wird ein an dem horizontalen Arme eines festen Stativs *S* aufgehängter Körper *P* in das Wasser eingesenkt. Die Schale sinkt, und es ist eine Anzahl von Gewichtsstücken auf der anderen Schale zuzulegen, damit das Gleichgewicht wiederhergestellt wird. Der Wasserspiegel reicht jetzt bis *b*, wo eine zweite Marke angebracht wird.

Nimmt man nun den eingehängten Körper wieder fort, so steigt die Schale wieder und kommt erst ins Gleichgewicht, wenn so viel Wasser zugegossen wird, bis dessen Spiegel wieder an die Marke *b* reicht.

Noch vollkommener wird diese Umkehr des Experimentes erreicht, wenn man am festen Stativ die Vereinigung beider Körper (wie in Fig. 375 bei der Wagschale) aufhängt und den massiven unteren Zylinder *p* wie dort in das Gefäß auf der Wagschale eintaucht. Es steigt dann auch das Wasser in diesem von *a* bis *b*; statt aber auf die andere Wagschale zur Herstellung des Gleichgewichtes Gewichte aufzulegen, saugt man mit einer Pipette Wasser aus dem Gefäße auf und läßt es in den oberen hohlen Zylinder *c* laufen. Ist dieser auf diese Weise eben bis zum Rande mit Wasser aus dem Glase gefüllt, so wird wieder Gleichgewicht an der Wage eingetreten sein.

Wie man sieht, unterscheidet sich das Experiment vom vorigen wesentlich nur dadurch, daß diesmal der eingetauchte Körper unbeweglich, dagegen die Flüssigkeit samt dem Gefäße beweglich ist, während es früher umgekehrt war.

Der „Auftrieb" kann also je nach Umständen auch als „Niedertrieb" wirken; er stellt eben eine Kraft vor, welche, wie eine zusammengedrückte Spiralfeder, nach beiden Seiten wirkt, den eingetauchten Körper nach oben, die umgebende Flüssigkeit samt dem Gefäße nach unten voneinander zu entfernen strebt.

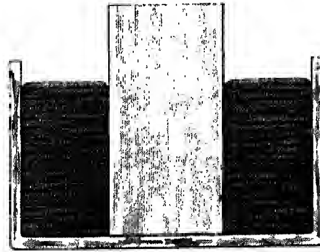
Es ist hier noch die Frage zu untersuchen, wo der Angriffspunkt des Auftriebes gelegen ist. Man findet darüber meistens die Angabe, derselbe befinde sich in dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmasse (in ihrer Lage, bevor sie verdrängt wurde). Dies ist nicht richtig ausgedrückt. Fürs erste ist zu bedenken, daß die Definition des Schwerpunktes fester Körper, wie sie im § 63 abgeleitet wurde, sich nicht ohne weiteres auf Flüssigkeiten übertragen läßt. Man denkt sich unter dem Schwerpunkte einer Flüssigkeitsmasse den Punkt, welcher der Schwerpunkt eines festen homogenen Körpers von gleicher Form, Größe und Lage wäre, oder mit anderen Worten, man denkt sich die Flüssigkeit zu einem festen Körper erstarrt und nimmt den Schwerpunkt des letzteren für den der Flüssigkeit. Der Auftrieb wirkt aber nicht auf diesen so definierten Schwerpunkt, er wirkt in Wirklichkeit, wie schon aus den obigen Erörterungen hervorgeht, an allen Punkten der nach unten gerichteten Oberfläche des eingetauchten Körpers. Daß dem so sei, läßt sich durch das Experiment nachweisen. Man stelle, Fig. 378, einen Glaskörper mit abgeschliffener ebener Basis und senkrechten Seitenwänden auf den ebengeschliffenen Boden eines Gefäßes und fülle dasselbe mit Quecksilber [1]). Der Glaskörper steigt nicht empor, es sei denn, daß wir ihn von der Unterlage abheben, so daß Quecksilber unter seine Basis eindringen kann. Macht man denselben Versuch mit einem prismatischen Holzstücke in Wasser, so steigt das Holzstück allerdings in die Höhe, weil immer eine wenn auch dünne Schicht Wasser unter seiner Basis vorhanden ist, welche den Druck des Wassers fortpflanzt.

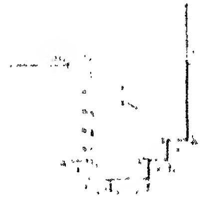
Wenn es also zweifellos sicher ist, daß der Auftrieb an allen Punkten der Unterfläche des eingetauchten Körpers angreift, so läßt sich doch zeigen, daß die Resultierende aller dieser Auftriebskräfte denselben Effekt hat, wie wenn

[1]) Statt dessen kann auch ein Holzprisma mit auf die Basis aufgekitteter Spiegelglasplatte und eine Glasschale mit auf den Boden aufgekitteter Glasplatte dienen.

sie direkt im Schwerpunkte einer homogenen Masse wirkte, die man sich die Stelle des eingetauchten Teiles des Körpers gesetzt denkt.

Wir denken uns wiederum den eingetauchten Körper (Fig. 379) unendlich kleine vertikale Prismen *abnm* und alle diese Prismen durch h zontale Schnitte in elementare Prismen von verschwindend kleiner Höhe get DerGesamtauftrieb setzt sich dann zusammen aus den Auftrieben auf die Flä *ab*, *cd*, *de* usf. Der Auftrieb auf *ab* ist gleich dem Gewicht einer Flüs keitssäule *abmn*. Es ändert sich nichts in dem Effekt, wenn wir diese K


Fig. 378.


Fig. 379.

in fünf gleiche Teilkräfte teilen, deren je eine in dem Schwerpunkte s_1, s_2 der elementaren Prismen angreift. Denken wir uns eine solche Verteil für alle Prismen durchgeführt, so tritt an Stelle des an der Unterseite Körpers wirkenden Auftriebes die Summe aller in den Schwerpunkten elementaren Prismen wirkenden Auftriebe. Diese müssen sich aber ebe zu einer Resultierenden vereinigen, die durch den gemeinsamen Schwerpun geht, wie dies bei der Schwere der Fall ist. Wir kommen demnach zu d Schlusse: **Der Auftrieb wirkt zunächst nur auf jene Oberflach teile des eingetauchten Körpers, deren Horizontalprojektion einen von Null verschiedenen Flächenraum haben, und zw positiv (nach aufwärts) an der Unterseite, negativ (d. h. abwärts) der Oberseite des eingetauchten Körpers oder Körperteiles.** I **Effekt ist aber derartig, als fiele der Angriffspunkt des gesam Auftriebes in den Schwerpunkt eines homogenen festen Körpe den wir uns an Stelle des eingetauchten Körpers denken.** Die Schwerpunkt pflegt man abkürzungsweise als den „Schwerpunkt der v drängten Flüssigkeit" zu bezeichnen; zweckmäßiger nennt man ihn „**Mitt punkt des Auftriebes**".

§ 124. Bedingungen des Gleichgewichtes schwimmender u schwebender Körper. Bezeichnen wir mit G das Gewicht eines Körp mit W den scheinbaren Gewichtsverlust, welchen er durch Untertauchen in Wasser erleidet, so ist die Kraft K, welche ihn im Wasser noch niedertre

$$K = G - W \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Ist $G > W$, d. h. ist der Körper schwerer als die verdrängte Wass masse, so hat K einen positiven Wert, der Körper wird, sich selbst überlas untersinken.

Ist $G < W$, d. h. ist der Körper leichter als die durch ihn verdrän Wassermasse, so wird K negativ, der Körper sinkt nicht mehr unter, sond er steigt infolge des überwiegenden Auftriebes in die Höhe, bis ein Teil d selben über die Oberfläche des Wassers hervorragt, bis er **schwimmt**.

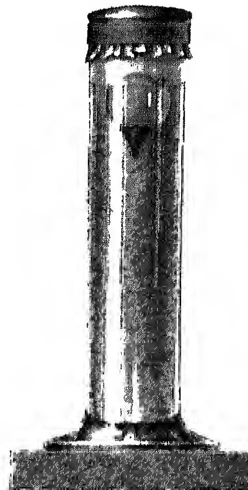
Das (wirkliche) Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewichte der durch den untergetauchten Teil verdrängten Flüssigkeit.

Wenn $G = W$, so ist $K = 0$; ein Körper, dessen Gewicht genau gleich dem eines gleichen Volumens Wasser ist, wird, in Wasser untergetaucht, weder sinken noch steigen, er wird schweben.

Einen in Wasser schwebenden Körper könnte man etwa dadurch herstellen, daß man in eine Kugel von weißem Wachs einige Schrotkörner von passender Größe einknetet. Ein so hergestellter, in Wasser schwebender Körper wird in Weingeist untersinken, in Salzwasser aber schwimmen.

Ein solches Schweben läßt sich auch leicht mit Hilfe eines Apparates, Fig. 380, hervorbringen; die hohle Glaskugel l ist zum Teil mit Luft, zum Teil mit Wasser gefüllt und hat unten eine kleine Öffnung; sie schwimmt auf dem Wasser eines Glascylinders, welcher oben mit einer Blase oder einer Kautschukmembrane verschlossen ist. Drückt man auf die Blase, so wird etwas mehr Wasser in die Kugel l hineingepreßt, sie wird schwerer und sinkt nieder; wenn der Druck nachläßt, dehnt sich die Luft in der Kugel l wieder aus und treibt etwas Wasser aus, die Kugel wird leichter und steigt; es ist nun leicht, den Druck so zu regulieren, daß die Kugel gerade im Wasser schwebt, ohne zu sinken oder zu steigen. Statt der hohlen Glaskugel hat man dem eingetauchten Körper manchmal die Form einer hohlen menschlichen Gestalt oder gar eines Teufelchens mit seitwärts gebogenem Schwanze gegeben. Dient der letztere als Ausströmungsöffnung für das Wasser, so tritt außer der Hebung und Senkung auch noch eine Reaktionswirkung ein, welche die Gestalt um ihre Vertikalachse drehen macht (Cartesianischer Taucher).

Fig. 380.



Die Gleichung (1) spricht die Bedingungen aus, unter welchen ein fester Körper in einer Flüssigkeit untersinkt, schwimmt oder schwebt. Damit aber der Körper mit Stabilität schwimme oder schwebe, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

Auf einen schwebenden oder schwimmenden Körper wirken zwei Kräfte in entgegengesetzter Richtung; sein Gewicht, im Schwerpunkte des Körpers angreifend, zieht ihn nach unten; der **Auftrieb** hebt ihn nach oben, die Resultierende aller den Auftrieb bewirkenden Kräfte geht vertikal durch den oben definierten Mittelpunkt des Auftriebes. Soll demnach Gleichgewicht herrschen, so müssen jedenfalls diese beiden Punkte (Schwerpunkt des Körpers s und Mittelpunkt des Auftriebes a) in einer Vertikalen liegen. Beim schwebenden Korper gelten dann für die Art des Gleichgewichtes dieselben Regeln wie bei einem frei aufgehängten Körper, man hat nur an Stelle des Aufhängepunktes den Mittelpunkt des Auftriebes zu setzen.

Ist also der Schwerpunkt im Mittelpunkte des Auftriebes gelegen (was jedenfalls bei homogenen Körpern der Fall ist, aber auch sonst der Fall sein

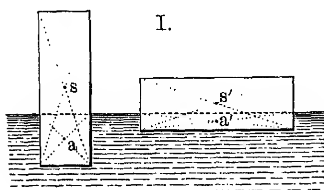
kann), so herrscht **indifferentes** Gleichgewicht; ist der Schwerpunkt s üb
a, so ist labiles, ist s unter a, so ist stabiles Gleichgewicht gegeben.

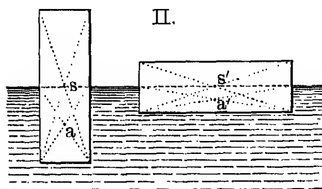
Nicht so einfach liegt die Sache bei den **schwimmenden** Körpern. I
kann der Schwerpunkt s über dem Mittelpunkte des Auftriebes a liegen un
dennoch stabiles Gleichgewicht herrschen. Auch nimmt der Schwerpun
des schwimmenden Körpers nicht immer die tiefste Lage an, die wir ih
geben könnten.

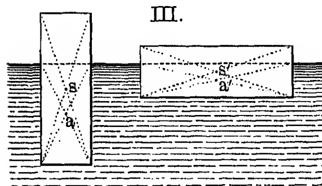
Man beachte, um dies einzusehen, die Figuren 381 I, II und III.

Das homogene Prisma in Fig. 381 I habe die Dichte $d = {}^1/_3$. Es sin
daher in Wasser mit einem Drittel seines Volumens ein, während zwei Dritt

Fig. 381.







desselben herausragen. Sein Schwerpun
ist in s, der Mittelpunkt des Auftriebes in
In der aufrechten Lage ist es im **labile**
Gleichgewichte, es schlägt daher um un
schwimmt erst **stabil**, wenn es sich in d
flachste Lage begeben hat. In diesem Fal
trifft die Regel der aufgehängten Körper z
daß der Schwerpunkt die tiefste Lage au
sucht.

Das homogene Prisma in Fig. 381
habe die Dichte $d = {}^1/_2$. Sein Schwe
punkt s kommt dann in den Wasserspieg
zu liegen und bleibt daselbst bei allen Lage
Trotzdem schwimmt der Körper nicht i
indifferenten Gleichgewicht; auch hier i
dasselbe in der aufgerichteten Lage lab
und erst in der flachen Lage stabil, obwo
bei der letzteren der Schwerpunkt nicht tief
zu liegen kommt.

Das homogene Prisma in Fig. 381 I
habe eine Dichte $d = {}^2/_3$. Auch dies
schwimmt aufrecht labil, beim Umschlag
in die stabile flache Lage **erhöht** sich die
mal sogar der Schwerpunkt des schwimme
den Körpers. Die Lage des Schwerpunkt
allein ist also für die Stabilität nicht en
scheidend. In allen drei Fällen hat der Mittelpunkt des Auftriebes in d
stabilen Lage die höchste Stellung. Trotzdem würde man irren, wenn ma
diesen Umstand als die einzige Bedingung für die Stabilität ansehen würd
Beachten wir, um dies einzusehen, den Fall, daß wir an dem Prisma d
Fig. 381 III links unter Beibehaltung des Gewichtes den Schwerpunkt s küns
lich unter a hinunter verlegt hätten. Das entstandene nunmehr inhomoger
Prisma würde dann in aufrechter Lage stabil schwimmen, obwohl beim Übe
gange in die flache Lage der Mittelpunkt des Auftriebes ansteigen würde.

Die Bedingung für die Stabilität des schwimmenden Körpers ist die, da
**in der gegebenen Lage der gemeinsame Schwerpunkt des ganze
Systems „Körper und Flüssigkeit" eine tiefere Lage habe als i
allen unmittelbar benachbarten Lagen.** Wir können dies auch

gegebenen Lage ein relatives oder absolutes Minimum sein müsse. Es ist leicht, dies einzusehen. Beim Anblick der Fig. 381 erkennen wir sofort, daß erstens das Niveau der Flüssigkeit, auch wenn sie begrenzt ist, in allen Lagen des Körpers dasselbe bleiben muß, da immer gleich viel davon verdrängt wird; daß ferner der Schwerpunkt einer der Masse des Körpers gleichen Flüssigkeitsmasse ebenso viel sinkt, als der Mittelpunkt des Auftriebes steigt. Geht der Körper mit der Masse M mit seinem Schwerpunkte aus der Lage s in die Lage s' über, so geht gleichzeitig eine Flüssigkeitsmasse M mit dem Schwerpunkte in a' in die Lage a über. Ist nun die Höhendifferenz zwischen s und $s' = h_s$, jene zwischen a' und $a = h_a$, so ist $Mg(h_s + h_a)$ die Abnahme der potentiellen Energie. Diese Abnahme wird am größten, die potentielle Energie am kleinsten, wenn s' die tiefst möglichste, a' die höchst möglichste Lage angenommen hat, also dann, wenn der Abstand $s'a'$ am kleinsten geworden ist. Dabei ist derselbe positiv zu rechnen, solange s' über a' liegt, ein negativer Wert, wobei s' unter a' liegt, gilt als kleiner [1].

Bei schwimmenden Körpern, welche um eine vertikale Ebene symmetrisch sind, läßt sich die Bedingung des stabilen Gleichgewichtes mit Hilfe eines Punktes formulieren, den man das Metazentrum nennt. Denken wir uns in Fig. 382 einen solchen Körper, z. B. einen Schiffsrumpf, bei welchem Schwerpunkt s und Auftriebsmittelpunkt a die angegebene Lage haben. Geben wir dem Körper eine geringe Neigung, so bleibt der Schwerpunkt in der Mittellinie, der Punkt a rückt aber zur Seite heraus. Ziehen wir durch a eine neue Vertikale, so schneidet sie die Mittellinie in einem Punkte m, welcher das Metazentrum für diese Lage genannt wird. Wir können uns nun den Angriff des Auftriebes in diesen Punkt verlegt denken, und es ist dann klar, daß die ursprüngliche Lage eine stabile sein wird, wenn das Metazentrum m über den Schwerpunkt s zu liegen kommt, daß dagegen eine labile Lage vorhanden ist, wenn m unterhalb s zu liegen kommt. Ob bei einer gegebenen Form und Lage des Körpers die angegebenen Bedingungen der Stabilität zutreffen, darüber läßt sich keine einfache allgemeine Regel geben. Nur wenn der Schwerpunkt unter dem Mittelpunkte des Auftriebes

Fig. 382.

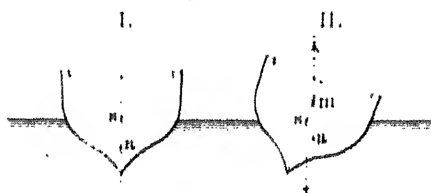
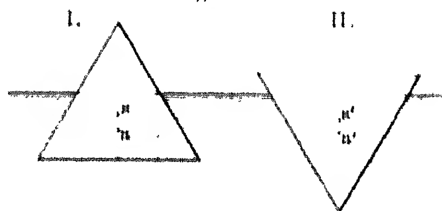


Fig. 383.



[1]) Duhamel formuliert in seiner analytischen Mechanik Bd. II, S. 212 bis 219 die Bedingung für stabiles Gleichgewicht folgendermaßen: Stabiles Gleichgewicht herrscht erstens immer, wenn der Schwerpunkt des Körpers unter dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt; zweitens aber auch dann, wenn er zwar oberhalb liegt, sobald die Entfernung der beiden Punkte weniger beträgt als das kleinste der Trägheitsmomente der Schnittfläche des Körpers mit der Flüssigkeitsfläche in bezug auf die durch seinen Schwerpunkt gezogene Gerade, dividiert durch das untergetauchte Volum.

liegt, ist unbedingt Stabilität vorhanden. Bei Schiffen erreicht man dies du Einlagerung von schwerem Ballast in die untersten Schiffsräume.

Ein Körper kann mehrere stabile Lagen beim Schwimmen annehm die durch labile Zwischenlagen ineinander übergeführt werden können. z. B. hat ein homogenes Prisma mit regulär dreieckigem Querschnitt d solche unter sich gleiche stabile Lagen, die durch Fig. 383 II dargestellt si während die Zwischenlagen Fig. 383 I nicht stabil sind. Die Dichte dessell ist zu drei Viertel angenommen. Die geometrische Konstruktion der Pun s und a ist aus den Figuren ersichtlich. Beim Übergange aus der labi Lage I in die stabile Lage II sinkt sowohl a als s, weil aber s mehr si als a, so vermindert sich die Höhe von s über a, und da sie kleiner ist in allen Nachbarlagen, so schwimmt der Körper in der Lage II stabil.

§ 125. Genauere Festsetzung der Begriffe: Dichte, spezifisc Gewicht und normales spezifisches Gewicht. Im § 36 (1) wurde die Dichte d die Definition gegeben:

$$d = \frac{M}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

was in Worten ausgedrückt heißt:

Die Dichte ist gleich der Masse in der Volumeinheit.

Für das Gewicht eines Körpers P von der Masse M, d. h. für die Kr womit derselbe zur Erde gezogen wird, gilt

$$P = Mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

worin g die Beschleunigung der Schwere an dem gegebenen Orte bedeu Setzt man für M den Wert aus der Gleichung (1), so kommt:

$$P = V.d.g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Bezeichnen wir mit P' das Gewicht eines anderen Körpers von gleich Volumen V, aber anderer Dichte d' an demselben Orte, so ist:

$$P' = Vd'g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

woraus folgt:

$$\frac{P}{P'} = \frac{d}{d'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

d. h. die Gewichte gleicher Volumina verschiedener Körper v halten sich am gleichen Orte wie ihre Dichten.

Setzt man die Dichte d' des Vergleichskörpers $= 1$, so ist:

$$\frac{P}{P'} = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man nennt dann $\frac{P}{P'}$ das spezifische Gewicht, welches demnach ur der ausgesprochenen Bedingung der Größe nach mit der Dichte zusamm fällt. Spezifisches Gewicht ist also eine Verhältniszahl, näml das Verhältnis zwischen dem Gewichte eines Körpers und dem Gewichte ei gleichen Volumens jenes Körpers, den man als Vergleichskörper gewählt l Das spezifische Gewicht ist demnach in seiner Größe nur hängig von der Wahl des Einheitskörpers, dagegen unabhän von dem angewendeten Maß- und Gewichtssystem. Mißt man z die Volumina nach Cubikzollen und die Gewichte nach Pfunden, so erl man dasselbe spezifische Gewicht, wie wenn man die Volumina nach Cul centimetern und die Gewichte nach Grammen rechnet.

stalles Fig. 1 die Form Fig. 2, die dreieckige Pyramidenfläche wird zu einer sechseckigen, die viereckige Säulenfläche g wird zu einem Achteck; dagegen beträgt der Winkel zwischen zwei benachbarten Pyramidenflächen stets $= 133^0 39'$, der Winkel zwischen zwei benachbarten Säulenflächen stets gleich 120^0 usw.

Wenn man die Kristallformen beschreibt oder zeichnet, so sieht man in der Regel von solchen Unregelmäßigkeiten ab und denkt sich vielmehr alle Flächen gleichmäßig ausgebildet. Wir wollen einen solchen Kristall als einen idealen bezeichnen, die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf diese idealen Formen.

Die Untersuchung der Symmetriegesetze der Kristalle und die Beschreibung ihrer Formen ist Sache einer eigenen Wissenschaft, der Kristallographie. Wegen des innigen Zusammenhanges, den die physikalischen Eigenschaften mit diesen Symmetriegesetzen zeigen, sind wir genötigt, um das Verständnis zu ermöglichen, die wichtigsten Grundzüge dieser Gesetze in den folgenden Paragraphen in Kürze darzustellen.

Fig. 1.

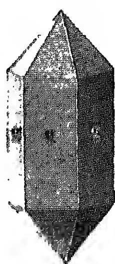


Fig. 2.

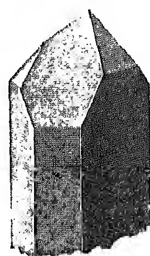
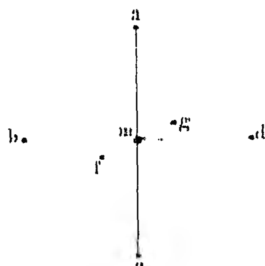


Fig. 3.



§ 10. Kristallsysteme. In jedem Kristalle kann man gewisse Richtungen unterscheiden, gegen welche die einzelnen Flächen eine symmetrische Lage haben, und welche, auch wenn diese Flächen künstlich entfernt würden, durch das physikalische Verhalten des Kristalls definiert sind. Diese Richtungen heißen Achsen. Diese Achsen sind daher nicht bestimmte gerade Linien, denn jede damit parallele Linie kann ebenfalls als dieselbe Achse angesehen werden. In dem Kristall Fig. 1 ist die Gerade, welche die Spitzen der Pyramiden verbindet, eine solche Achse, aber auch jede der damit parallelen Seitenkanten kann als Achse gelten. Da ferner die Achsen nur Richtungen sind, so haben sie auch keine bestimmte absolute Länge. Wohl aber kommt man zu dem Begriffe einer relativen Achsenlänge auf folgende Weise. Man denkt sich zunächst die sämtlichen Achsen in einem Punkte sich kreuzend, wie Fig. 3 in m zeigt. Jede der den Kristall begrenzenden Ebenen schneidet dann im allgemeinen jede der drei Achsen in Punkten, deren Abstände vom dem Kreuzungspunkte für dieselbe Substanz ein konstantes Verhältnis haben. Diese Verhältniszahlen a, b, c werden als Achsenlängen bezeichnet. Liegt eine Fläche einer Achse parallel, so ist die zugehörige Achsenlänge $= \infty$.

Die gegenseitige Lage (Neigung) und das Größenverhältnis der Achsen ist für verschiedene Kristalle verschieden; man hat demnach sechs verschiedene Kristallsysteme zu unterscheiden[1]).

[1]) Die neueren Lehrbücher der Kristallographie, z. B. von P. Groth, leiten aus den Symmetrieverhältnissen 32 verschiedene Klassen ab, von denen aus prak-

Die Zahl, die man für die Dichte erhält, ist dagegen vom Maß- und Gewichtssystem abhängig.

Im ursprünglich französischen, nun internationalen Maß- und Gewichtssystem hat man das Wasser von 4⁰ als Vergleichskörper gewählt, und es war die Absicht, das System so zu gestalten, daß bei Wahl desselben das spezifische Gewicht und die Dichte stets durch dieselbe Maßzahl ausgedrückt werden. Dies wäre gelungen, wenn es möglich gewesen wäre, die Masseneinheit Kilogramm genau gleich der Masse der Volumeinheit, d. i. eines Cubikdecimeters Wasser zu machen; denn dann wäre die Dichte des Wassers von $4^0 = \frac{\text{Masse}}{\text{Volum}} = 1$ und sein spezifisches Gewicht $= \frac{\text{Gewicht}}{\text{Gewicht}}$ eo ipso $= 1$ zu setzen, folglich würden dann auch die Dichten aller anderen Körper mit ihren spezifischen Gewichten genau übereinstimmen.

Wie im § 34 mitgeteilt wurde, ist jedoch das Kilogramm um ungefähr 40 Milligramm zu groß geraten, da nach diesem gemessen 1 Cubikdecimeter Wasser von 4^0 nur 0,999 60 Kilogramm wiegt. Wählt man demnach Cubikdecimeter oder Cubikcentimeter zur Einheit des Volumens, so ist die Dichte des Wassers von 4^0 nicht $= 1$, sondern $= 0{,}99960$. Das spezifische Gewicht dieses Wassers muß aber seiner Definition nach $= 1$ sein. Um diesem Übelstande abzuhelfen, hat man eine andere Volumeinheit, das Liter, angenommen und als dasjenige Volumen definiert, welches, mit Wasser von 4^0 erfüllt, genau die Masse eines Kilogramms haben soll. Wählt man diese Volumeinheit und das Kilogramm zur Berechnung der Dichte, so wird natürlich die Dichte des Wassers von $4^0 = 1$ und fällt mit dem spezifischen Gewichte zusammen, sowie auch für alle übrigen Körper diese Werte zusammenfallen.

Da dies jedenfalls zweckmäßig ist und überdies der Unterschied zwischen beiden Messungsweisen kleiner ist als $^1/_{25\,000}$, also bei allen gewöhnlichen Messungen vollständig innerhalb der Fehlergrenzen zu liegen kommt, so werden wir von nun an, wo nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, stets stillschweigend das Liter zur Volumeinheit wählen und demnach Dichte und spezifisches Gewicht, wenn auch nicht der Definition nach, wohl aber der Größe nach als zusammenfallend ansehen.

Das spezifische Gewicht ist in beträchtlichem Maße abhängig von der Temperatur des Körpers und auch ein wenig von dem Drucke, unter dem er steht. Der letztere Einfluß ist allerdings bei den festen und flüssigen Körpern so gering, daß er meist vernachlässigt werden kann. Streng genommen wäre er ebenfalls zu berücksichtigen, und es hat deshalb auch die internationale Kommission 1880 festgesetzt, daß als Verhältniskörper Wasser von 4^0 unter Normaldruck, d. i. unter einem Drucke gleich dem einer Quecksilbersäule von 0^0, 760 mm Höhe unter 45^0 Breite, im Meeresniveau zu gelten habe [1]).

Gibt man das spezifische Gewicht eines Körpers für irgend eine Temperatur an, so bezieht man es doch auf Wasser von 4^0, nicht aber auf Wasser von derselben Temperatur [2]).

Als normales spezifisches Gewicht oder Normaldichte bezeichnet man das spezifische Gewicht des Körpers bei 0^0 und Normaldruck.

---

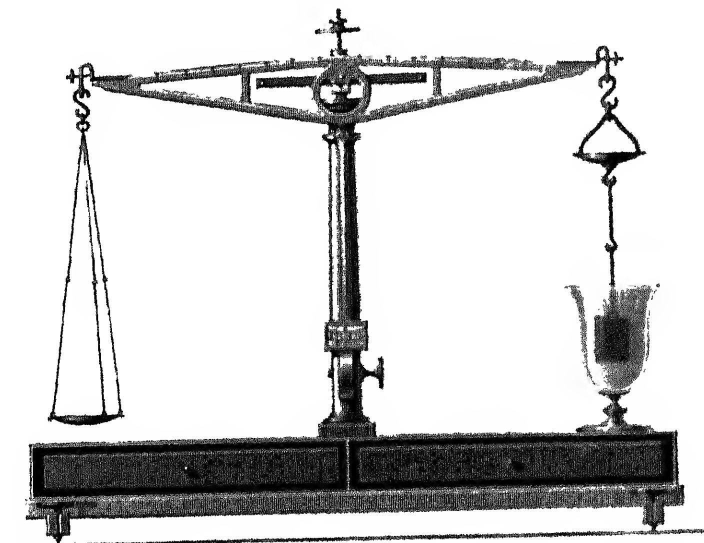
[1]) Siehe die Anmerkung S. 96.

[2]) Der in neuerer Zeit aufgetauchte Vorschlag, Wasser von 15^0 als Vergleichsflüssigkeit zu wählen, ist nicht zu empfehlen.

§ 126. Bestimmung des spezifischen Gewichts mit der Wag

Die Bestimmung des spezifischen Gewichts hat sich auf die Gleichung (§ 125 zu stützen. Die Ermittelung des Gewichts P eines festen Körpers m der Wage hat keine Schwierigkeit; mußte man aber zur Ermittelung von das Volumen desselben bestimmen, so würde man dabei behufs Erlangu genügender Genauigkeit im allgemeinen auf große Schwierigkeiten stoße Glücklicherweise erlaubt das Archimedische Prinzip, die Größe P' ebenfa bequem und genau genug mit der Wage zu bestimmen. Taucht man nä lich den Körper, nachdem sein absolutes Gewicht in der Luft bestimmt i in ein untergestelltes Gefäß mit reinem Wasser ein, so erhält er nach jen Prinzip einen Auftrieb so groß, als das Gewicht des von ihm verdrängt Wassers beträgt, und wir erhalten somit unmittelbar das Gewicht eines gleich Volumens Wasser, wenn wir durch Auflegen von Gewichten auf die treffende Wagschale wieder das Gleichgewicht derselben herstellen.

Fig. 384.



Um diese Bestimmung mittels einer Wage leicht ausführen zu kön wird an derselben eine kleine Veränderung angebracht, wodurch sie in sogenannte **hydrostatische Wage** umgewandelt wird, wie dies Fig. anzeigt. Man hängt nämlich statt der einen Wagschale eine andere welche nicht so weit herabreicht und an welcher sich unten ein Hak befindet. An dieses wird der **feste Körper**, dessen spezifisches Gev zu ermitteln ist, mittels eines möglichst feinen Drahtes (Platindraht) feiner als in der Figur gezeichnet ist) angehängt. Ist dies geschehen bestimmt man durch Auflegen von Gewichten auf die andere Wagschale absolute Gewicht P des Körpers. Taucht man ihn nun in Wasser ein muß man auf der Wagschale darüber ein Gewicht P' auflegen, um das Gl gewicht der Wage wiederherzustellen; P' ist also der scheinbare Gewi verlust, welchen der Körper beim Eintauchen in das Wasser erleidet, fol

$$s = \frac{P}{P'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

sein spezifisches Gewicht. Ist der Körper in Wasser löslich, so nimmt man statt des Wassers eine andere Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewicht s', in welcher sich der Körper nicht löst. Heißen wir den jetzigen Gewichtsverlust P'', so ist jetzt das spezifische Gewicht des Körpers:

$$s = s' \frac{P}{P''} \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

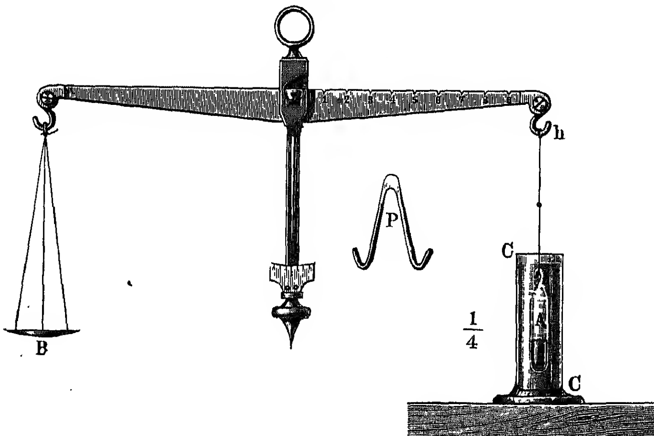
Da $s' = \frac{P''}{P'}$ zu setzen ist, so ist in der Tat wieder:

$$s = \frac{P}{P'}.$$

Sinkt der Körper in der Flüssigkeit nicht unter, so befestigt man ihn an einen schwereren Körper (Metallklemme), dessen Gewichtsverlust für sich allein bestimmt wurde, und zieht letzteren von dem Gesamtgewichtsverlust ab.

Soll das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten bestimmt werden, so kann dies wieder mit derselben hydrostatischen Wage geschehen, indem man sich auf den Satz stützt, daß der scheinbare Gewichtsverlust, welchen ein und derselbe Körper in verschiedenen Flüssigkeiten erleidet, dem spezifischen Gewichte derselben proportional ist. Nachdem wir hiernach bei obigem Versuch zur Bestimmung von s den Gewichtsverlust des rechts an der kleinen Wagschale hängenden Körpers in reinem Wasser P' bestimmt haben,

Fig. 385.



wird statt Wasser in das Glasgefäß die zu untersuchende Flüssigkeit gegossen und der neue Gewichtsverlust P'' durch Auflegen von Gewichten auf diese Schale bis zu neuem Einstehen der Wage ermittelt. Da die P' und P'' zukommenden Volumina gleich sind, so ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit s' gegeben durch:

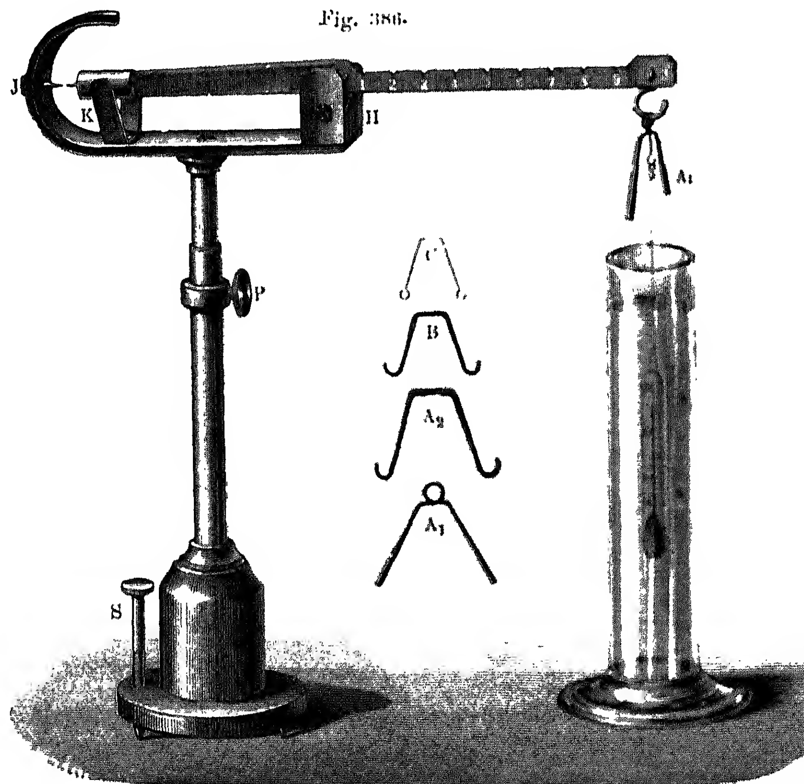
$$s' = \frac{P'}{P''} \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

Zur raschen Ausführung einer solchen Bestimmung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten eignet sich die Mohrsche Wage, die in Fig. 385 dargestellt ist. An dem einen Arme der Wage hängt mittels eines feinen Platindrahtes das Senkgläschen A, ein oben und unten geschlossenes, zum

Teil mit Quecksilber gefülltes Glasröhrchen, welches durch die Wagschale genau äquilibriert ist. Der Arm der Wage, an welchem A hängt, ist in ze gleiche Teile geteilt. In der Nebenfigur ist in vergrößertem Maßstabe du P die Form der zu dieser Wage gehörigen, aus Messingdraht verfertig Gewichte dargestellt, nämlich zwei, die wir mit P bezeichnen wollen und de jedes genau so viel wiegt wie der Gewichtsverlust v des Senkgläschens A Wasser beträgt, und zwei kleine Häkchen p und p', welche $^1/_{10}\,v$ und $^1/_{1}$ wiegen. Soll nun das spezifische Gewicht irgend einer Flüssigkeit ermit werden, so wird dieselbe in das Glasgefäß C eingegossen, in welches Senkgläschen A herabhängt, und dann die Gewichtshaken so angehängt, der Wagebalken bei ganz untergetauchtem Senkgläschen vollkommen ho zontal steht.

Bei einem derartigen Versuche mit Äther mußte man z. B. den gro Haken P bei 7, den Haken p bei 2 und den Haken p' bei 4 anhangen: I

Fig. 386.



Gewicht des Äthers, welcher durch das Senkgläschen verdrängt wird, betr also: $0{,}7\,v + 0{,}02\,v + 0{,}004\,v$ oder $0{,}724\,v$; das Gewicht eines gleic Volumens Wasser ist v, also 0,724 das spezifische Gewicht des Äthers.

Als englische Schwefelsäure in das Glas C eingegossen war, mußte n zur Herstellung des Gleichgewichts anhängen: eines der Gewichte P be eines bei 8, das Gewicht p bei 4, das Gewicht p' bei 7, das spezifische wicht der Flüssigkeit war also gleich 1,847.

Eine recht bequeme Form wurde der Mohrschen Wage von Georg Westphahl in Celle gegeben. Dieselbe ist in der Fig. 386 dargestellt. Der am Haken h hängende Senkkörper besteht hier aus einem kleinen Quecksilberthermometer, welches zugleich die Temperatur der Flüssigkeit angibt. Ihm hält das Gegengewicht K am anderen Arme der Wage das Gleichgewicht, welcher Arm mit seiner Spitze zugleich als Zeiger dient, indem diese beim Gleichgewicht der Spitze J am Halter der Wage mit Drehungsachse bei H gegenüberstehen soll. Das Gewicht A, wie oben P, ist gleich dem Gewicht des vom Senkkörper verdrängten reinen Wassers bei 15° C und ist zum Anhängen am Haken h bestimmt, um bei Einfüllung von Wasser ins Gefäß den Auftrieb desselben gerade zu kompensieren, also die Wage wieder ins Gleichgewicht zu bringen; A_2 ist ein gleich großes Gewicht wie A_1 aber zum Aufsetzen auf den Wagearm bestimmt, ebenso wie die Reitergewichte $B = 0{,}1\,A$ und $C = 0{,}01\,A$.

Hat man beim Eintauchen des Thermometersenkkörpers in eine andere Flüssigkeit als Wasser die drei Reiter A_2, B und C in den Entfernungen a, b und c bzw. in den 0,1 des ganzen Wagearmes entsprechenden Lücken desselben eingehängt, um Gleichgewicht herzustellen, so ist das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gegeben durch:

$$P'' = \frac{a}{10} A + \frac{b}{10} \frac{A}{10} + \frac{c}{10} \frac{A}{100} = 0,\, a.b.c.A,$$

wo an Stelle der Buchstaben a, b, c unmittelbar die Zahlen der Lücken als Dezimalbruch zu setzen sind, in welche die Reiter A, B, C eingehängt worden sind. Nun ist das Gewicht eines gleichen Volumens verdrängten Wassers P' unserer Voraussetzung gemäß gleich A, also ist das spezifische Gewicht s' der Flüssigkeit ohne weiteres als Dezimalbruch gegeben durch:

$$s' = \frac{P''}{A} = 0,\, abc.$$

Die Bestimmung des spezifischen Gewichts fester und flüssiger Körper in der angeführten Weise mittels der hydrostatischen Wage liefert weitaus die genauesten Resultate, doch muß zu dem Ende noch auf zwei Umstände Rücksicht genommen werden. Erstlich muß der Draht, an welchem der zu untersuchende Körper oder das Senkglas aufgehängt ist, möglichst fein sein, damit das von ihm verdrängte Flüssigkeitsvolumen neben dem vom Körper verdrängten zu vernachlässigen ist, und damit auch die von ihm durch Kapillarität gehobene Flüssigkeitsmasse unbedeutend genug sei.

Ferner ist darauf zu achten, daß der eingetauchte Körper frei von anhängenden Luftbläschen sei, da sonst sein spezifisches Gewicht zu klein erhalten wird.

Da die Temperatur des Wassers bei den Bestimmungen des spezifischen Gewichts selten gerade genau 4° C betragen wird, vielmehr zweckmäßig nahe der Umgebungstemperatur gewählt wird, damit sie sich während des Versuches nicht ändere, so ist das direkt erhaltene Resultat noch einer Korrektion zu unterwerfen.

Es sei bei der Bestimmung des spezifischen Gewichtes eines festen Körpers sein absolutes Gewicht $= P$[1]), der Auftrieb in Wasser von der Tempe-

[1]) Von dem Gewichtsverlust in Luft und der darauf bezüglichen Korrektion kann erst an späterer Stelle die Rede sein.

ratur t sei A_t. Die Dichte des Wassers (oder der an dessen Stelle gewähl Eintauchflüssigkeit) bei t^0 sei d_t; den Auftrieb, den der Körper ohne Än rung seines Volumens in Wasser von 4^0 erhalten hätte, bezeichnen wir A_4. Zunächst ist:

$$A_4 = \frac{A_t}{d_t},$$

daraus ergibt sich das spezifische Gewicht des Körpers bei t^0:

$$s_t = \frac{P}{A_4} = \frac{P}{A_t} d_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man hat also das rohe Resultat mit der Dichte des Wassers oder üb haupt der Eintauchflüssigkeit bei t^0 zu multiplizieren.

Genaue Tabellen über die Dichten des Wassers bei verschiedenen Tem raturen werden wir in der Wärmelehre bringen.

Soll auch das normale spezifische Gewicht des Körpers, das he sein spezifisches Gewicht bei 0^0, berechnet werden, so muß noch durch e besondere Untersuchung seine Temperaturausdehnung ermittelt und das V hältnis $\frac{s_0}{s_t}$ bekannt sein. Man findet dann:

$$s_0 = \frac{P}{A_t} \cdot d_t \frac{s_0}{s_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Handelt es sich um die Bestimmung des spezifischen Gewichts ei Flüssigkeit, so ist sehr darauf zu achten, daß die Auftriebe in der Flüssigk und im Wasser bei derselben Temperatur t bestimmt werden, da sonst au noch die Ausdehnung des Senkkörpers bekannt sein und berücksicht werden muß.

Angenommen, diese beiden Auftriebe seien im Wasser A_t, in der unt suchten Flüssigkeit A'_t. Es ist dann der Auftrieb in Wasser von 4^0:

$$A_4 = \frac{A_t}{d_t}$$

und das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bei t^0:

$$s_t = \frac{A'_t}{A_4} = \frac{A'_t}{A_t} d_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

Man hat also hier das rohe Resultat mit der Dichte des Wassers bei zu multiplizieren. Die Berechnung des normalen spezifischen Gewichts erfordert wiederum eine besondere Untersuchung der Ausdehnung zwisch 0^0 und t^0; kennt man das Verhältnis $\frac{s_0}{s_t}$, so kann man s_0 berechnen nac

$$s_0 = \frac{A'_t}{A_t} d_t \cdot \frac{s_0}{s_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

§ 127. Konstantes Gefäß, Pyknometer. Eine andere Methode, d spezifische Gewicht sowohl fester als flüssiger Körper mit der Wage zu b stimmen, besteht in der Anwendung des **konstanten Gefäßes oder Pykn meters**, d. h. eines Glasgefäßes von ganz bestimmten bzw. scharf abz grenzendem Volumen. Die einfachste Form des Pyknometers besteht a

einem Gläschen mit nicht zu enger Öffnung, deren Rand eben abgeschliffen ist und die durch eine aufgelegte, ebenfalls eben abgeschliffene Glasplatte verschlossen werden kann, so daß dadurch ein bestimmtes Volumen abgegrenzt wird. Eine andere einfache Form des Pyknometers stellt Fig. 387

Fig. 387.

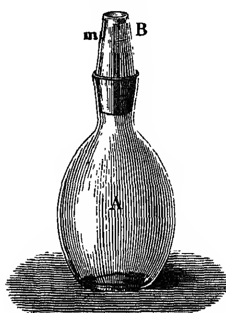


Fig. 388.

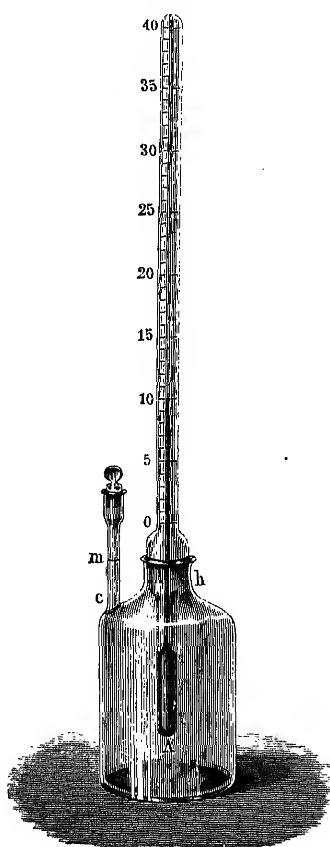
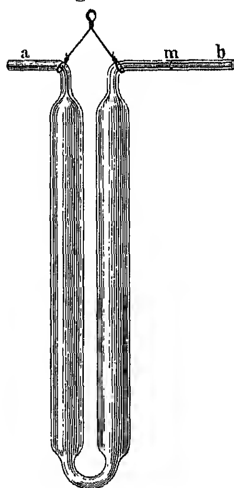


Fig. 389.



dar, wo ein in den Hals des Gefäßes *A* eingeschliffener Stöpsel *B* das Volumen abgrenzt, indem letzterer durchbohrt und außen mit einer Marke *m* versehen ist. Durch Anlegen von Fließpapier an die Öffnung der Bohrung wird die Flüssigkeit im Gefäß so weit entfernt, daß sie eben bis zur Marke *m* reicht.

Vollkommener ist das in Fig. 388 abgebildete Pyknometer, bei welchem zur unmittelbaren Bestimmung der Temperatur der Flüssigkeit im Gefäß *A* ein Thermometer als Stöpsel in den Hals *h* desselben eingesetzt ist und die das Volumen abgrenzende Marke *m* an einer seitlichen kapillaren, am Ende mit Stöpselchen versehenen Röhre *c* angebracht ist.

Sind nur Flüssigkeiten auf ihr spezifisches Gewicht zu untersuchen, so eignet sich dazu besonders das in Fig. 389 abgebildete Sprengelsche Pyknometer, wo das Ende *a* des kapillaren Rohres die eine und die Marke *m* an dem etwas weiteren Rohre *b* die andere Abgrenzung des zu fixierenden Volumens darstellen. Die Art und Weise der Füllung dieses Pyknometers zeigt die Fig. 390 an.

Die beiden Kapillarröhren, von denen auch die eine enger als die andere mit Marke versehene ist, können zur Verhütung von Verdunstung der Flüssig-

Fig. 390.

Fig. 391.

keit während des Wägens mit aufgeschliffenen Glashütchen verschlossen werden. Für die Füllung kann auf die weitere Röhre ein rechtwinkelig umgebogenes Glasrohr (siehe die Nebenfigur) aufgeschoben werden, das in die einzufüllende Flüssigkeit eingetaucht wird.

Zur Bestimmung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten wird das Pyknometer in trockenem Zustande zuerst leer gewogen; sein Gewicht sei dann P_1'; darauf füllt man es mit reinem (destilliertem) Wasser bis zu der Marke an, wägt es wieder, wobei man als Gewicht des Ganzen P_2' finde; endlich soll eine dritte Wägung erfolgen, nachdem man die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt hat (daß das Pyknometer vorher ganz getrocknet werden muß, etwa durch einen durchgeleiteten warmen Luftstrom, ist selbstverständlich); dieses dritte erhaltene Gewicht sei P_3'; dann ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit s':

$$s' = \frac{P_3' - P_1'}{P_2' - P_1'} \quad \text{. . . . . (1)}$$

Die Gewichte P_1' und P_2' können offenbar für ein bestimmtes Gefäß ein für allemal bestimmt werden, so daß dann eine einzige Wägung P_3' mit der zu untersuchenden Flüssigkeit zur Ermittelung ihres spezifischen Gewichts genügt.

Um das spezifische Gewicht s eines festen Körpers, der in Pulverform oder wenigstens in kleinen Stücken vorhanden ist, zu ermitteln, wägt man zuerst eine gewisse Menge des Körpers, die genügt, das Pyknometer zum größeren Teil zu füllen, in der Luft ab; es sei dies Gewicht P_1, sodann wiegt man das mit destilliertem Wasser gefüllte Pyknometer ab, es sei dieses Ge-

wicht entsprechend wie oben P_2; endlich macht man eine dritte Wägung, nachdem man die fragliche Menge des Körpers in das Pyknometer gebracht und dasselbe wieder bis zur Marke mit destilliertem Wasser gefüllt hat; dieses Gewicht sei P_3; dann ist offenbar:

$$s = \frac{P_1}{P_1 + P_2 - P_3} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

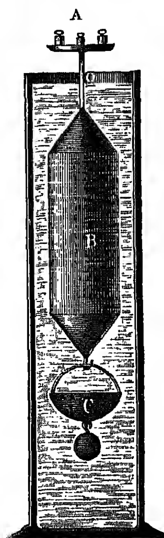
Ist wieder ein für allemal P_2 für das fragliche Instrument bestimmt, so sind nur zwei Wägungen nötig, um s zu finden. Die Korrektionen wegen der Temperaturen sind in ähnlicher Weise wie bei den hydrostatischen Wägungen an den unmittelbar erhaltenen Resultaten anzubringen.

Wir gehen nun dazu über, die weniger genauen, aber bequemen und oft ausreichenden Methoden zu betrachten.

§ 128. **Gewichtsaräometer.** Zur Bestimmung des spezifischen Gewichts fester Körper kann statt der Wage das Nicholsonsche Aräometer angewendet werden, welches in Fig. 392 abgebildet ist.

An einem hohlen Körper B von Messingblech ist unten ein Sieb C angehängt, oben aber ein feines Stäbchen angebracht, welches einen Teller trägt, auf den man kleinere Körper und Gewichte legen kann. In Wasser eingetaucht, schwimmt das Instrument, und zwar aufrecht, weil dafür gesorgt ist, daß sein Schwerpunkt genügend tief liegt. Das Instrument ist so eingerichtet, daß der oberste Teil des Körpers B noch aus dem Wasser herausragt. Legt man nun den Körper, dessen spezifisches Gewicht man bestimmen will, etwa einen Kristall, auf den Teller, so sinkt das Instrument weiter ein, und durch ferneres Auflegen von Tariergewichten kann man es leicht dahin bringen, dass es genau bis zu einem Punkte O eingesenkt ist, welchen man auf irgend eine Weise (gewöhnlich durch einen Feilstrich) auf dem Stäbchen markiert hat. Man nimmt nun den Kristall weg und legt statt dessen so viel Gewichte auf, bis das Instrument wieder genau bis O einsinkt. Auf diese Weise erhält man das absolute Gewicht des Körpers. Es betrage P Milligramm.

Fig. 392.



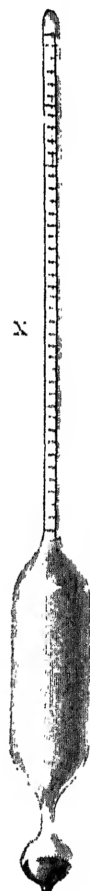
Nun werden die P Milligramm wieder weggenommen und der Kristall in das Sieb gelegt. Das Instrument würde nun wieder bis O einsinken, wenn der in das Sieb C gelegte Körper nicht durch das Eintauchen im Wasser scheinbar an Gewicht verlöre. Man wird also auf den Teller noch Gewichte, P' Milligramme, auflegen müssen, damit das Instrument wieder bis zur Marke eingetaucht ist. Man hat auf diese Weise das absolute Gewicht des Körpers P und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser P' ermittelt; das gesuchte spezifische Gewicht ist also:

$$s = \frac{P}{P'} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Auch das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten kann man mit dem Nicholsonschen Aräometer bestimmen. Da das Instrument stets so weit einsinkt, daß sein Gewicht samt den Gewichten auf dem Teller dem Gewichte

der verdrängten Flüssigkeitsmasse gleich ist, so kann man mit Hilfe d Instrumentes ausmitteln, wie viel ein bestimmtes Volumen der Flüssi wiegt. Dazu ist aber nötig, daß man das Gewicht des Instrumentes s kennt; wir wollen es mit P' bezeichnen. Wenn es, in Wasser eingetau bis O einsinken soll, so muß noch Gewicht zugelegt werden. Bezeichnen dies Zulagegewicht mit P'', so ist $P' + P''$ das Gewicht der verdrän Wassermasse. Taucht man nun das Instrument in die zu untersuch Flüssigkeit, so wird man irgend ein anderes Gewicht P''' anstatt P'' aufl müssen, um ein Einsinken bis O zu bewerkstelligen; P''' wird größer als P'', wenn die Flüssigkeit schwerer, kleiner als P'', wenn sie leichte als Wasser. Das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist $P' + P'''$, wäh $P' + P''$ das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist, spezifische Gewicht der fraglichen Flüssigkeit ist also

Fig. 393.



$$s = \frac{P' + P'''}{P' + P''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Dieses Aräometer ist um so empfindlicher, je dünner Stäbchen im Vergleich zum Volumen des Körpers B ist.

§ 129. Skalenaräometer. Mit Hilfe des Nicholsons Aräometers kann man das spezifische Gewicht einer Flüssig aus der Vergleichung der absoluten Gewichte gleicher Volu. ableiten. Der Gebrauch der Skalenaräometer aber gründet darauf, daß bei gleichem Gewichte zweier Flüssigkeitsmassen Volumina sich umgekehrt verhalten wie die spezifischen wichte. Es stellt Fig. 393 ein Skalenaräometer dar. In der besteht dasselbe aus einer zylindrischen Glasröhre, welche u erweitert ist, wie man in der Abbildung sieht. In der unt Kugel befindet sich etwas Blei oder Quecksilber, wodurch bezweckt wird, daß das Instrument aufrecht schwimmt. zweckmäßiger enthält das Instrument ein Thermometer, de Kugel den nötigen Ballast liefert, wie Fig. 398 zeigt. De wir uns das Instrument in Wasser schwimmend, so ist das wicht des verdrängten Wassers dem Gewichte des Instrume gleich. Bringen wir es in eine andere Flüssigkeit, so wir tiefer oder weniger tief einsinken, je nachdem die Flüssig leichter oder schwerer ist als Wasser.

Man begreift nun wohl, daß, wenn die Röhre zweckm geteilt ist, man aus einer einzigen Ablesung das spezifische wicht einer Flüssigkeit ermitteln kann. Die verschiedenen A meter unterscheiden sich durch die Art der Teilung, welch dem Ende auf der zylindrischen Röhre angebracht ist. Wir trachten zunächst das seiner Skala nach einfachste Instru dieser Art, nämlich das

Volumeter von Gay-Lussac. Es bezeichne V das Volumen des A meters bis zu dem Punkte der Röhre, bis zu welchem es in destilliertem W einsinkt. Denken wir uns jetzt die zylindrische Röhre mit einer Skala sehen, von welcher jedem Teile das Volumen $\frac{V}{n}$ zukomme und deren

1. Das reguläre System mit drei zueinander rechtwinkeligen und gleichen Achsen.

Fig. 3 stellt das Achsensystem des regulären Systems dar. Die drei Achsen schneiden sich in dem Punkte m, und zwar steht jede derselben

Fig. 4.

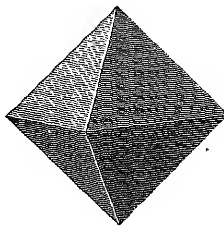


Fig. 5.

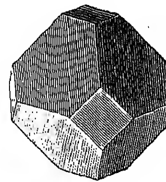
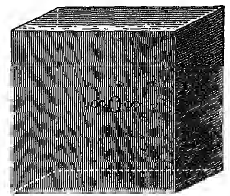


Fig. 6.



rechtwinkelig auf der Ebene der beiden anderen. Zwei dieser Achsen, a und $b\,d$, erscheinen in unserer Figur unverkürzt, dagegen erscheint die dritte von vorn nach hinten gerichtete Achse $f\,g$ verkürzt. In der Wirklichkeit ist $mf = ma = mb$.

Denken wir uns in jede der acht körperlichen Ecken des Achsenkreuzes Fig. 3, eine Fläche gelegt, welche gegen alle drei Achsen gleich geneigt ist also eine Fläche durch die Punkte a, f und d; eine zweite durch f, d und c

Fig. 7.

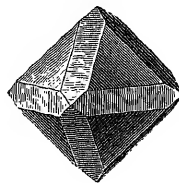
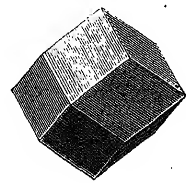


Fig. 8.



eine dritte durch f, b und a usw., so entsteht das Oktaeder, Fig. 4, welches man als die Grundgestalt des regulären Systems betrachtet, weil man von ihm leicht alle anderen Gestalten dieses Systems ableiten kann.

Diese Kristallform wird nach Weiss durch das Symbol $a : a : a$ bezeichnet womit angedeutet wird, daß jede Achse durch jede Fläche im gleichen Abstande a geschnitten wird. Naumann schrieb dafür O (Oktaeder), Miller (111).

Wird jedes Oktaedereck durch eine Fläche abgestumpft, welche auf der entsprechenden Achse rechtwinkelig steht, so entsteht der Körper Fig. 5 Denken wir uns die Abstumpfungsflächen bis zur gegenseitigen Durchschneidung ausgedehnt, so erhält man den Würfel Fig. 6.

An dem Würfel sind wieder alle Ecken unter sich gleich; ebenso sind alle Kanten gleichartig, und jede Modifikation eines Ecks oder einer Kante findet sich in derselben Weise auch an den übrigen.

Von den Würfelflächen schneidet jede je eine Achse im Abstande a, die beiden anderen im Abstande ∞, das Symbol ist demnach nach Weiss $a : \infty : \infty$, nach Naumann $\infty O \infty$, nach Miller (100).

tischen Erwägungen durch Zusammenlegung eine beschränktere Zahl von Kristallsystemen gebildet werden. Wir folgen, ebenfalls aus praktischen Gründen, der herkömmlichen Einteilung.

tauchende Volumen $V \pm n \frac{V}{a}$. Da sich die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten umgekehrt wie die eintauchenden Volumina des Aräometers verhalten, so ist also das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, in welcher das Aräometer bis zum Skalenteil $\pm n$ einsinkt, gegeben durch:

$$s' = \frac{V}{V \pm n \frac{V}{a}} = \frac{a}{a \pm n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Gewöhnlich macht man jeden Teil des Aräometers gleich $\frac{V}{100}$ oder also $a = 100$, so daß dann ist:

$$s' = \frac{100}{100 \pm n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1\,a)$$

Der letzten Gleichung entsprechend wird der Skalenpunkt, bis zu welchem das Aräometer in Wasser einsinkt, der sogenannte Wasserpunkt, nicht mit Null, sondern mit 100 bezeichnet und die Bezifferung von da aus nach oben wachsend, nach unten zu abnehmend angebracht. Würde also beispielsweise das Aräometer bis zum Teilstrich 125, d. h. 100 + 25 in einer Flüssigkeit einsinken, so wäre ihr spezifisches Gewicht nach obiger Gleichung:

$$s' = \frac{100}{125} = 0{,}800.$$

Dagegen würde dasselbe für eine Flüssigkeit, in welcher das Aräometer beim Teilstrich 80, d. h. 100 — 20 stehen bleibt, sein:

$$s' = \frac{100}{80} = 1{,}250.$$

Die Genauigkeit eines solchen Instrumentes ist um so größer, je größer die Entfernung eines Teilstriches von dem anderen, je dünner also die Röhre im Vergleich zu dem Volumen des ganzen Instrumentes ist. Damit jedoch die Röhre nicht gar zu lang wird, macht man kein Volumeter, welches für alle Flüssigkeiten anwendbar ist, sondern solche, welche entweder nur für leichtere oder nur für schwerere Flüssigkeiten gebraucht werden können. Bei den ersteren findet sich der mit 100 bezeichnete Wasserpunkt nahe am unteren, bei den letzteren aber nahe am oberen Ende der Röhre.

Sind die Teile am Volumeter so groß, daß man noch 0,1 eines Skalenteiles beim Eintauchen in die Flüssigkeit sicher schätzen kann, oder bringt man eine feinere Teilung an, bei der jeder Teil gleich $0{,}001 \,.\, V$ ist, so kann man mittels desselben das spezifische Gewicht bis zur dritten Decimale genau bestimmen.

Bevor man die Teilung aufträgt, hat man erst durch Vermehrung oder Verminderung der Quecksilbermasse in der Kugel das Instrument so zu regulieren, daß es in Wasser bis zu einem entweder nahe am unteren oder oberen Ende der Röhre gelegenen Punkte einsinkt. Ist dies geschehen, so hat man einen zweiten Punkt der Skala zu bestimmen, und dies geschieht auf folgende Art:

Baumé[1]) ermittelte an den für leichtere Flüssigkeiten bestimmten Aräometern außer dem Wasserpunkte noch einen zweiten fixen Punkt dadurch, daß er das Instrument in eine Lösung von 1 Gewichtsteil Kochsalz in 9 Gewichtsteilen Wasser tauchte. Den Raum zwischen diesen beiden Punkten teilte er in 10 gleiche Teile, die er Grade nannte; die Teilung ist noch über den Wasserpunkt hinaus um 40° fortgesetzt. Der Wasserpunkt ist mit 10 bezeichnet, und die Grade werden nach oben gezählt.

Für schwere Flüssigkeiten wurde der zweite feste Punkt durch Eintauchen in eine Lösung von 15 Tln. Kochsalz in 85 Tln. Wasser bestimmt, der Zwischenraum zwischen diesem und dem mit Null bezeichneten Wasserpunkte in 15° geteilt und die Teilung nach unten fortgesetzt. Man sieht wohl, daß man durch ein solches Instrument direkt weder das spezifische Gewicht, noch den Gehalt einer Flüssigkeit erfährt.

Es wäre daher wohl zu wünschen, daß diese und die unten noch aufgeführten willkürlichen Aräometerskalen außer Gebrauch gesetzt und an Stelle der Angabe in Graden immer die Angabe der spezifischen Gewichte selbst treten möchte.

Cartier brachte an der Baumé schen Skala eine unwesentliche Veränderung an, er machte nämlich die Grade etwas größer, so daß 15 seiner Grade gleich 16 Baumé schen sind. Wenn er dadurch auch nichts genützt hat, so hat er doch wenigstens seinen Namen verewigt, denn so wertlos seine Skala auch ist, so ist sie doch ungemein verbreitet.

Das Aräometer von Beck hat den Wasserpunkt zu seinem Nullpunkte, den nach oben gezählten 30. Grad beim spezifischen Gewicht 0,85.

Die folgende Tabelle gibt an, welche spezifischen Gewichte den in der ersten Kolumne angegebenen Gradzahlen der Baumé schen, Cartier schen und Beck schen Skala entsprechen.

Aräometer für leichtere Flüssigkeiten.

Grade	Baumé	Cartier	Beck
0	—	—	1,000
10	1,000	—	0,944
20	0,933	0,934	0,895
30	0,875	0,871	0,850
40	0,824	0,815	0,809
50	0,778	—	0,773

Aräometer für schwerere Flüssigkeiten.

Grade	Baumé	Beck	Grade	Baumé	Beck
0	1,000	1,000	40	1,400	1,308
10	0,077	1,062	50	1,555	1,417
20	1,167	1,133	60	1,750	1,545
30	1,273	1,214	70	2,000	1,700

[1]) Eléments de Pharmacie, 8. édition, p. 341 (1797). Die Angaben dieses Instruments wurden 1873 von Berthelot, Coulier und Almeida verifiziert. Die Schreibweise Beaumé ist nicht richtig.

§ 131. Aräometer für besondere Flüssigkeiten. Im praktischen Leben ist es meistens nicht direkt der Zweck, das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit zu erfahren, sondern man will den Konzentrationsgrad einer Salzlösung, die Mischungsverhältnisse einer Flüssigkeit mit einer anderen kennen lernen. Diese stehen nun freilich mit dem spezifischen Gewicht in genauer Beziehung, so daß, wenn man mit Hilfe des Aräometers das spezifische Gewicht einer Flussigkeit ausgemittelt hat, man daraus auch auf die Natur der Flüssigkeit schließen kann. Man hat jedoch für solche Flüssigkeiten, welche in der Praxis häufig vorkommen, besondere Aräometer konstruiert, welche unmittelbar die Mischungsverhältnisse angeben. Wir wollen hier nur eines der wichtigsten, nämlich das Alkoholometer, näher betrachten.

Fig. 396.



Das Alkoholometer dient zur Bestimmung des Alkoholgehaltes einer Mischung von Wasser und Alkohol (Weingeist).

Das normale spezifische Gewicht des reinen Alkohols ist nach Mendelejeff[1]) bezogen auf Wasser von 4° $d_{0°/4°} = 0{,}80625$; eine Mischung von Wasser und absolutem Alkohol wird also ein spezifisches Gewicht haben, welches zwischen 1 und 0,80625 fällt und sich mehr der einen oder der anderen Grenze nähert, je nachdem die Mischung mehr Wasser oder Alkohol enthält. Das spezifische Gewicht der Mischung weicht jedoch von dem arithmetischen Mittel ab, welches man aus den Mischungsverhältnissen berechnet.

Der Grund dieser Abweichung liegt darin, daß, wenn man Wasser und Alkohol mischt, eine Kontraktion stattfindet, die wir erst durch einen Versuch anschaulich machen wollen.

Man gieße eine Glasröhre, Fig. 396, welche ungefähr eine Länge von 80 cm hat, halb voll Wasser und fülle die andere Hälfte mit hochgradigem Weingeist (für Vorlesungen ist gefärbter Weingeist zu empfehlen) bis zu einer Marke an, so werden sich die Flüssigkeiten nicht sofort mischen; der Weingeist schwimmt auf dem Wasser. Nachdem das offene Ende durch einen Korkstöpsel fest verschlossen worden ist, so daß durchaus keine Flüssigkeit entweichen kann, kehrt man die Röhre um, und nun wird durch das Sinken des Wassers alsbald eine Mischung der Flüssigkeiten vor sich gehen. Hat die Mischung vollständig stattgefunden, so sieht man, daß die Flüssigkeit nicht mehr bis zur Marke reicht, sondern ungefähr 3 cm tiefer steht.

100 Maßteile	Wasser	+	0 Maßteile	Alkohol	geben	100	Maßteile
90	"	"	10	"	"	"	99,4	"
80	"	"	20	"	"	"	98,2	"
70	"	"	30	"	"	"	97,2	"
60	"	"	40	"	"	"	96,6	"
50	"	"	50	"	"	"	96,3	"
40	"	"	60	"	"	"	96,6	"
30	"	"	70	"	"	"	96,9	"
20	"	"	80	"	"	"	97,4	"
10	"	"	90	"	"	"	98,3	"
0	"	"	100	"	"	"	100	"

[1]) Pogg. Ann. 138 (1869).

Aus diesen Angaben folgt, daß das spezifische Gewicht einer Mischung von Wasser und Weingeist stets größer sein muß als das berechnete arithmetische Mittel.

Aus der folgenden Tabelle ersieht man, wie viel Maßteile Wasser man zu den in der ersten Kolumne angegebenen Maßteilen Alkohol schütten muß, um 100 Maßteile Mischung zu erhalten. Das spezifische Gewicht der so erhaltenen Mischungen ist in der letzten Kolumne angegeben.

Fig. 398. Fig. 397.

100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0

Maßteile Alkohol	Maßteile Wasser	Spezifisches Gewicht der Mischung
100	0,00	0,794 [1]
90	11,94	0,834
80	22,87	0,864
70	33,14	0,891
60	[illegible]	0,914
50	53,74	0,935
40	63,45	0,952
30	72,72	0,966
20	81,72	0,976
10	90,72	0,987
0	100	1,000



Wenn man nun an einer Aräometerröhre diejenigen Punkte markiert, welche den spezifischen Gewichten 0,794, 0,834 ... 0,976, 0,987 und 1 entsprechen, und sie mit den Zahlen 100, 90, 80 ... 20, 10, 0 bezeichnet, wenn man ferner, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, den Raum zwischen je zweien dieser Punkte in 10 gleiche Teile teilt, so erhält man ein Prozent-Aräometer für Weingeist, d. h. ein Aräometer, an welchem man unmittelbar ablesen kann, wie viel Volumprozente Alkohol in einer Mischung von Wasser und Weingeist sich befinden. Solche Alkoholometer wurden in Frankreich nach Gay-Lussacs, in Deutschland nach Tralles' Angaben ausgeführt, und es ist gesetzlich bestimmt, daß der Alkoholgehalt des der Besteuerung unterworfenen Branntweins, Weingeistes usw. mit Hilfe dieses Instruments ermittelt werden soll. Beistehende Skala, Fig. 397, zeigt die Hauptabteilungen eines solchen Alkoholometers in ihrem richtigen Verhältnis. Man sieht, wie sich erwarten ließ, daß die Abteilungen ungleiche Größe haben. Die Skala des Alkoholometers von Tralles bezog sich (wie die obige Tabelle) auf eine Temperatur von 60° F = 12 4/9° R = 15,56° C und auf Wasser von derselben Temperatur. Für andere Temperaturen des Alkohols ist aus den diesbezüglich berechneten Tabellen (enthalten in der Tabellensammlung von Landolt u. Bornstein) eine Korrektion anzubringen. Es gibt auch Instrumente, bei denen, wie in beistehender Fig. 398 ange-

[1]) Diese spezifischen Gewichte beziehen sich auf Alkohol von 15,56° C, verglichen mit Wasser von derselben Temperatur, bedeuten also $d_{\frac{15,56}{15,56}}$.

deutet, ein Thermometer angebracht und diese Korrektion gleich neben der Temperaturskala aufgetragen ist. Doch gilt sie dann nur für Alkohol zwischen 94 und 100 Proz.

Das Volumeter oder Densimeter kann das Alkoholometer recht gut ersetzen, wenn man nur eine Tabelle zur Hand hat, in welcher der Alkoholgehalt angegeben ist, welcher den verschiedenen spezifischen Gewichten entspricht.

Begreiflicherweise kann man das Alkoholometer einzig und allein zu dem angegebenen Zwecke verwenden, für jede andere Flüssigkeit ist es völlig unbrauchbar. Auf ähnliche Weise, wie das Alkoholometer, hat man auch Aräometer konstruiert, welche den Gehalt einer Säure, einer Salzlösung usw. angeben sollen. Weil jedoch ein solches Instrument nur für eine einzige spezielle Flüssigkeit brauchbar ist, so wendet man besser ein für allemal das Volumeter oder ein Densimeter an und sucht den Gehalt, welcher dem beobachteten spezifischen Gewichte entspricht, in Tabellen, welche eigens zu diesem Zwecke berechnet worden sind.

So gibt z. B. die folgende Tabelle das spezifische Gewicht einer Mischung an, welches der in der zweiten Kolumne angegebenen Anzahl von Gewichtsprozenten Schwefelsäurehydrat (SO_4H_2) in 100 Teilen der Mischung entspricht.

Hat man z. B. mit Hilfe des Volumeters oder des Densimeters gefunden, daß das spezifische Gewicht eines Gemisches von Wasser und Schwefelsäure 1,20 ist, so ersehen wir aus der Tabelle (welche übrigens nur für eine Temperatur von 15° C genau richtig ist), daß es 27,32 Proz. Schwefelsäurehydrat und 22,30 Proz. Schwefelsäureanhydrid enthält.

Auszug aus der Tabelle nach Lunge und Isler (Zeitschr. f. angewandte Chemie 1890).

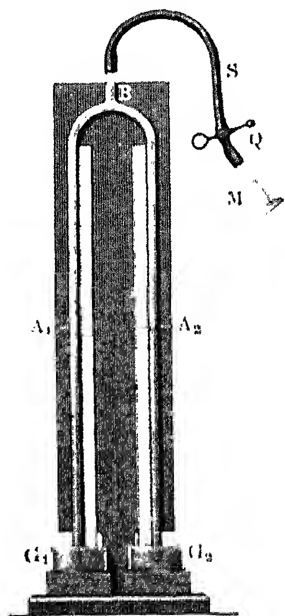
	Spezifisches Gewicht	Gewichtsprozente an	
	$d_{15^0 4^0}$	SO_4H_2	SO_3
	1,0	0,09	0,07
	1,1	14,35	11,71
	1,2	27,32	22,30
	1,3	39,19	31,99
	1,4	50,11	40,91
	1,5	59,70	48,73
	1,6	68,51	55,93
	1,7	77,17	63,00
	1,8	86,90	70,94
	1,82	90,05	73,51
	1,83	92,10	75,19
	1,84	95,60	78,04
Dichtemaximum	1,8415	97,70	79,76
	1,84	99,20	80,98
	1,8385	99,95	81,59

In die Klasse der Prozentaräometer gehört auch die sogenannte **Mostwage**, welche dazu dient, den Zuckergehalt des Traubenmostes zu ermitteln. Das spezifische Gewicht des Mostes nimmt mit seinem Gehalt an (Trauben-)

Zucker zu. Der Punkt der Skala, bis zu welchem das Instrument in eine Lösung einsinkt, welche 20 Proz. Traubenzucker (d. h. 20 g Zucker in 100 Most) enthält, ist mit 100, der Punkt, welcher einer Lösung von 12 Pro Zucker entspricht, ist mit 60 bezeichnet. Der Zwischenraum zwischen diese beiden Punkten, von welchen der eine nahe am oberen, der andere nahe a unteren Ende der Skala liegt, ist in 40 Grade geteilt. Je 5° der Mostwag entsprechen also einem Zuckergehalt von 1 Proz. Ein Most, in welchem d Instrument bis zu 80° einsinkt, enthält also $\frac{80}{5} = 16$ Proz. Traubenzucke

§ 132. Weitere weniger genaue Methoden zur Ermittelung de spezifischen Gewichts. Eine einfache Methode zur Bestimmung des spez fischen Gewichts fester und flüssiger Körper besteht darin, daß man d absolute Gewicht einer abgegrenzten Masse derselben bestimmt — es sei di P — und darauf das Volumen V dieser Masse durch Eingießen der Flüssi keit in einen graduierten Zylinder mißt, b ziehungsweise durch Einsenken des festen Körpe in einen solchen, der teilweise bereits mit Wass gefüllt ist, aus dem Steigen des Wasserniveau auf dessen Volumen schließt. Das spezifisch Gewicht ist dann $s = \frac{P}{V}$, wenn wir P in Gra men, V in Cubikcentimetern angeben.

Fig. 399.



Schwimmmethode. Hat man eine Rei von Probekörpern (zugeschmolzene Glaskugel von stufenweise verschiedenem mittleren spez fischen Gewicht zur Verfügung, so erkennt ma die Dichte einer Flüssigkeit daran, daß ei Anzahl von Kugeln in ihr untersinken, d leichteren dagegen schwimmen. Die gesuch Dichte liegt dann zwischen zwei Grenzen, d durch die leichteste untergesunkene und d schwerste schwimmende Kugel gegeben si Umgekehrt bestimmt man das spezifische G wicht von festen Körpern, von denen nur se kleine Mengen zur Verfügung stehen, inde man sie in eine Reihe von Flüssigkeiten m stufenweise steigendem spezifischen Gewicht eintaucht und beobachtet, welchen sie eben noch schwebend bleiben. Leider ist die Auswahl der Flüssi keiten mit größerem spezifischen Gewicht eine sehr beschränkte und reic nur bis zum spez. Gewicht = 4 [1].

Hydrometer von Alexander. In § 120 haben wir bereits dur Fig. 364 einen Apparat kennen gelernt, um das Verhältnis der Höhen ve schiedener Flüssigkeiten über einem gemeinsamen Niveau in kommunizierend Röhren zu demonstrieren. Alexander hat dieses Gesetz in seinem Hydr meter, das Fig. 399 darstellt, benutzt, um das spezifische Gewicht ein

[1]) Siehe E. Cohen: Neues Jahrb. f. Mineralogie 1883, Bd. II, S. 87; Rose busch: Mikroskopische Physiographie 1885, S. 224.

Flüssigkeit zu bestimmen. Die kommunizierenden Röhren A_1 und A_2 tauchen mit ihren offenen unteren Enden in zwei Gefäße G_1 und G_2, von denen das eine Wasser, das andere die zu untersuchende Flüssigkeit enthält. Oben sind beide Röhren verbunden und münden in das Rohr B aus. Saugt man am Mundstück M, das durch einen Kautschukschlauch S mit B verbunden ist, nach Lüftung des Quetschhahns Q, so steigen die Flüssigkeiten in den Schenkeln A_1 und A_2, und es verhalten sich dann die an den Teilungen abgelesenen Höhen der beiderlei gehobenen Säulen umgekehrt wie die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten.

§ 133. **Tabellen der spezifischen Gewichte** einer Reihe von festen Körpern und Flüssigkeiten.

Tabelle der spezifischen Gewichte einiger fester Körper (bei 0 Grad).

Platin (gewalzt)		21,10
Gold	gemünzt	19,32
	geschmolzen	19,25
Iridium		22,25
Wolfram		17,60
Blei, gewalzt		11,38
Palladium		11,30
Silber		10,53
Wismut		9,80
Kupfer	gehammert	8,88
	gegossen	7,79
	zu Draht gezogen	8,78
Cadmium, gegossen		8,56
Molybdän		8,61
Messing		8,39
Arsen		5,71
Nickel		8,28
Stahl		7,82
Kobalt		8,1 bis 9,5
Eisen	geschmiedet	7,79
	gegossen	7,21
Bleiglanz		7,76
Zinn		7,29
Zink		7,15
Antimon bei 4°		6,70
Tellur		6,11
Jod		4,95
Schwerspat		4,43
Diamant		3,52
Flintglas		3,78 bis 3,20
Flußspat		3,15
Aluminium bei 4°		2,58
Bouteillenglas		2,60
Spiegelglas		2,37
Turmalin (grün)		3,15
Marmor		2,84
Smaragd		2,77
Bergkristall		2,68
Porzellan		2,49 bis 2,14
Gips (kristallisiert)		2,31
Schwefel (natürlich)		2,03
Elfenbein		1,92
Alabaster		1,87
Graphit		1,8 bis 2,4
Anthracit		1,80
Phosphor		1,83
Magnesium		1,74
Bernstein		1,08
Wachs, weißes		0,97
Natrium		0,98
Kalium bei 0°		0,86
Lithium		0,59
Ebenholz		1,23
Eichenholz (alt)		1,17
Buchsbaumholz		1,33
Ahornholz	frisch	0,90
	trocken	0,65
Buchenholz	frisch	0,98
	trocken	0,59
Edeltanne	frisch	0,89
	trocken	0,45
Erlenholz	frisch	0,86
	trocken	0,50
Eschenholz	frisch	0,90
	trocken	0,64
Hainbuchenholz	frisch	0,94
	trocken	0,77
Lindenholz	frisch	0,82
	trocken	0,44
Mahagoniholz		1,06
Nußbaumholz		0,68
Zypressenholz		0,60
Zedernholz		0,56
Pappelholz		0,38
Kork		0,24

Spezifisches Gewicht einiger Flüssigkeiten
(bei 0 Grad, wo nichts weiter bemerkt ist).

Destilliertes Wasser	0,99987	60proz. Säure	1,…
Quecksilber	13,59593	70 „ „	1,…
Brom	3,15	80 „ „	1,4…
Schwefelsäure (englische)	1,848	90 „ „	1,4…
Verdünnte Schwefelsäure nach Delezenne bei 15° C.:		100 „ „	1,5…
10proz. Säure	1,066	Chloroform	1,4…
20 „ „	1,138	Schwefelkohlenstoff	1,2…
30 „ „	1,215	Glycerin	1,2…
40 „ „	1,297	Milch	1,0…
50 „ „	1,387	Meerwasser	1,0…
60 „ „	1,486	Wein: Malaga	1,0…
70 „ „	1,595	„ Rhein	0,9…
80 „ „	1,709	Öle: Citronenöl	0,8…
90 „ „	1,805	„ Leinöl	0,9…
100 „ „	1,840	„ Mohnöl	0,9…
Verdünnte Salpetersäure:		„ Olivenöl	0,9…
10proz. Säure	1,054	„ Terpentinöl	0,8…
20 „ „	1,111	Benzol $C_{12}H_6$	0,8…
30 „ „	1,171	Steinöl (Petroleum)	0,8…
40 „ „	1,234	Alkohol, absoluter	0,7…
50 „ „	1,295	Schwefeläther	0,7…
		Valyl (C…H…)	0,6…

Es mögen hier zum Vergleich noch die Zahlenwerte für das spezifisc… Gewicht einiger Gase Platz finden, obgleich wir die Methoden, nach welch… es bestimmt wird, erst später besprechen können.

Spezifisches Gewicht einiger Gase
(bei 0 Grad und beim Normalluftdruck[1]) ebenfalls bezogen auf Wasser bei 4° C…

Chlorgas	0,00322	Atmosphärische Luft	0,0012…
Kohlensäure	0,00198	Stickstoff	0,0012…
Sauerstoff	0,00143	Wasserstoff	0,0000…

§ 134. Ausfluß der Flüssigkeiten, Torricellis Theorem. Die B… wegungserscheinungen der Flüssigkeiten unter der Einwirkung der Schwe… und analoger äußerer Kräfte sind erheblich verwickelter als bei den fest… Körpern, weil eben die Teilchen gegeneinander verschiebbar sind und nur d… Volumen der ganzen Masse etwas Unveränderliches darstellt. Die näch… liegende Bewegung dieser Art entsteht beim Abfluß einer Flüssigkeit a… einem Gefäß. Macht man in der Seitenwand oder am Boden eines m… Flüssigkeit gefüllten oben offenen Gefäßes eine Öffnung, welche im Verglei… mit den Dimensionen des Gefäßes klein ist, so strömt die Flüssigkeit m… einer Geschwindigkeit aus, welche um so größer ist, je tiefer sich die Öffnun… unter dem Spiegel der Flüssigkeit befindet. Der Zusammenhang zwisch…

[1]) Siehe § 34, Anmerkung 1, S. 16.

sflußgeschwindigkeit und Druckhöhe läßt sich am einfachsten auf folgende eise ausdrücken: Die Ausflußgeschwindigkeit ist gerade so groß e die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper er- ngen würde, wenn er von dem Spiegel der Flüssigkeit bis zur sflußöffnung herabfiele.

Dieser Satz ist unter dem Namen des Torricellischen Theorems be- nnt. Er läßt sich durch folgende Schlußweise ableiten.

Wenn die Flüssigkeitsschicht $abcd$, Fig. 400, welche sich unmittelbar er der Öffnung ab befindet, frei herabfiele, ohne durch die über ihr lastende üssigkeit beschleunigt zu sein, würde sie die Öffnung mit rjenigen Geschwindigkeit ver- sen, welche der Höhe ac ent- richt, die wir mit h bezeichnen llen. Diese Geschwindigkeit $v' = \sqrt{2gh}$. Nun aber ist die sströmende Schicht nicht bloß rch ihre eigene Schwere be- leunigt, sondern durch die Schwere der ganzen auf ihr lastenden Flüssig- t. Die beschleunigende Kraft g verhält sich demnach zur beschleunigenden aft g', welche die flüssigen Teilchen wirklich austreibt, wie ac zu af oder h zu H, wenn die Druckhöhe mit H bezeichnet wird, d. h. $h : H = g : g'$, o ist die auf die ausfließende flüssige Schicht wirkende beschleunigende aft $g' = \frac{g}{h} H$. Wenn aber die beschleunigende Kraft, welche auf die sfließende Schicht wirkt, nicht g, sondern g' ist, so ist auch die Ausfluß- schwindigkeit $v = \sqrt{2 g' h}$, und wenn wir in diesen Wert von v den eben geleiteten Wert von g' setzen, so erhalten wir für die Ausflußgeschwindig it den Wert:

Fig. 400.

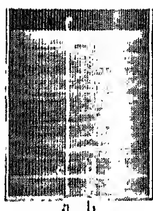
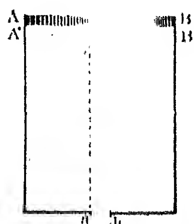


Fig. 401.



$$v = \sqrt{2gH} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Dies ist aber dieselbe Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn eine Höhe H durchfällt.

Wir wollen diesen Satz auch noch aus dem Gesetze der Erhaltung der ergie ableiten. Das Gefäß, Fig. 401, habe den Querschnitt Q, die Öffnung Boden den Querschnitt q, die Höhe der Flüssigkeit betrage H. Während s Ausfließens müssen sich offenbar die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit rkehrt verhalten wie ihre Querschnitte. Ist also die Geschwindigkeit durch Öffnung am Boden gleich v, so ist die Geschwindigkeit innerhalb des Ge- ßes $v_1 = v \frac{q}{Q}$. Ist nun ein kleiner Teil der Flüssigkeit von der Masse entsprechend der in dem Raume $A'B'BA$ enthaltenen, ausgeflossen, so es ebenso, als wäre die Masse m um die Höhe H gesunken, was einer beit (Energie) von der Größe mgH entspricht. Andererseits ist lebendige aft erzeugt worden, nämlich die des ausfließenden Strahles und die der wegung der Flüssigkeit im Gefäße. Die letztere ist nun sehr klein, wenn v_1 r klein ist, also wenn die Öffnung q sehr klein ist im Verhältnis zu Q; ist daher nur die lebendige Kraft des ausgeflossenen Teiles allein in

Rechnung zu ziehen. Dieselbe beträgt $\frac{mv^2}{2}$. Soll keine Energie verloren gehen, so muß $mgH = \frac{mv^2}{2}$, also $v = \sqrt{2gH}$ sein.

Aus dem Torricellischen Theorem folgt unmittelbar:

1. Die Ausflußgeschwindigkeit hängt nur von der Tiefe der Öffnung unter dem Niveau, aber nicht von der Natur der Flüssigkeit ab, da in Gleichung (1) der Wert des spezifischen Gewichtes der Flüssigkeit gar nicht vorkommt. Bei gleichen Druckhöhen muß also Wasser und Quecksilber gleich schnell ausfließen. Jede Quecksilberschicht wird zwar durch einen Druck ausgetrieben, welcher 13,6 mal so groß ist als beim Wasser, dagegen ist aber auch die Masse eines Quecksilbervolumens, welches ausfließt, 13,6 mal größer als die eines gleich großen Wasservolumens.

2. Die Ausflußgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen. Aus einer Öffnung, welche 100 cm unter dem Wasserspiegel liegt, muß also die Flüssigkeit mit 10 mal größerer Geschwindigkeit ausfließen als aus einer anderen, welche nur 1 cm unter dem Niveau liegt.

§ 135. Apparate zu Versuchen über die Ausflußgeschwindigkeit.

Um das Torricellische Gesetz durch das Experiment zu prüfen, wendet man Gefäße an, deren Rauminhalt bedeutend ist im Vergleich zu der Größe der Öffnung. Die Öffnungen selbst müssen in ganz dünne Metallblättchen gemacht sein, welche man in die Seitenwand oder in den Boden des Gefäßes einsetzen kann; denn wenn die Öffnungen sich in einer dicken Wand befänden, so würde die Ausflußgeschwindigkeit zu sehr durch die Reibung an den Wänden der Öffnung vermindert werden.

Besonders zweckmäßig zu Versuchen über den Ausfluß von Flüssigkeiten ist der in Fig. 402 abgebildete, im wesentlichen nach Weisbach konstruierte Apparat. Die drei Ausflußöffnungen befinden sich 1, 4 und 9 dm unter einem im oberen Teile des Gefäßes angebrachten Merkzeichen, bis zu welchem es mit Wasser gefüllt wird. Der Verschluß der Ausflußöffnungen wird durch kleine, mit vulkanisiertem Kautschuk besetzte Kolben bewerkstelligt, welche man nach Belieben auf die Öffnung aufdrücken, wie es die mittlere Öffnung darstellt, oder von derselben zurückziehen kann, wie man es bei der obersten Öffnung sieht. Den Öffnungen gegenüber sind in der Wand Stopfbüchsen angebracht, durch welche die Stangen mit jenen Kolben zum Hin- und Herschieben hindurchgehen.

Statt der in unserer Figur dargestellten Ausflußöffnungen, aus welchen der Wasserstrahl in horizontaler Richtung hervorspringt, kann man auch kurze Röhren anschrauben, welche mit einer nach oben gerichteten Öffnung versehen sind, so daß man auch Versuche mit dem aufsteigenden Wasserstrahl anstellen kann.

Wenn man Ausflußversuche bei unveränderter Druckhöhe anstellen will, so muß man dafür sorgen, daß oben stets so viel Wasser in das Reservoir zufließen kann, als durch die Ausflußöffnung abfließt.

Ein anderer Apparat, welcher zu Versuchen über die Ausflußgeschwindigkeit dienen kann, ist das in Fig. 403 abgebildete Mariottesche Gefäß

gestumpften Kante und einer Achse parallel läuft, so entsteht der Körper Fig. 7. Wenn die Abstumpfungsflächen der Oktaederkanten bis zu ihrer gegenseitigen Durchschneidung wachsen, so entsteht das Rhombendodekaeder Fig. 8. Die Flächen desselben schneiden die Achsen in den Abständen $a\,a$ und ∞, daher die Symbole nach **Weiss** $a:a:\infty$, nach **Naumann** ∞O, nach **Miller** (110).

Damit wären nun alle Formen erschöpft, bei welchen nur Durchschneidungen in den Abständen

Fig. 10.

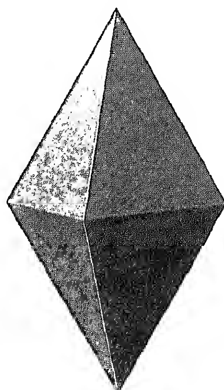


Fig. 9.

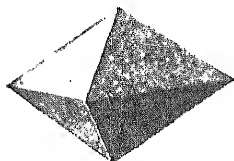
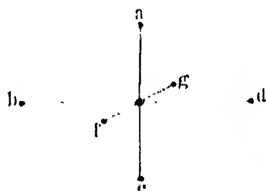


Fig. 11.



a oder ∞ vorkommen. Nach einem höchst merkwürdigen kristallographischen Gesetze kommen nun aber an demselben Achsensystem auch noch andere Formen vor, welche dadurch entstehen, daß an die Stelle der Länge a einfache ganze Multipla, z. B. $2a$, $3a$, treten. So entstehen das Tetrakishexaeder $a:na:\infty$, das Triakisoktaeder $a:a:na$, das Ikositetraeder $a:na:na$ und endlich die allgemeinste Form, das Hexakisoktaeder $a:na:ma$, wo überall n und m die ganzen Zahlen 2, 3 usw. (selten mehr als 3) bedeuten (Gesetz der rationalen Indices). Im regulären System kristallisieren Alaun, Kochsalz, Granat, Flußspat usw.

2. **Das quadratische System.** Die Grundform dieses Systems ist ein **Quadratoktaeder**, Fig. 9 und Fig. 10, d. h. ein Oktaeder, welches sich von dem regulären dadurch unterscheidet, daß zwei Achsen unter sich, aber nicht der dritten gleich sind. Die letztere ausgezeichnete Achse wollen wir die **Hauptachse** nennen und uns dieselbe immer vertikal gestellt denken.

Die Hauptachse steht zu den beiden anderen nicht in einem rationalen Verhältnis; sie ist bald größer, bald kleiner als die horizontalen Achsen: doch ist das Achsenverhältnis für Kristalle einer und derselben Substanz stets dasselbe. Fig. 11 stellt z. B. das Achsenkreuz dar, wie es den Kristallen des arseniksauren Kalis entspricht: die Achsen fg und hd sind einander gleich. Nimmt man die Länge dieser Achsen zur Einheit, so ist für dieses Salz die vertikale Achse ac gleich 0,66. Fig. 10 stellt die Grundform des Blutlaugensalzes dar, bei welchem die Hauptachse größer ist als die Nebenachsen; und zwar verhält sich hier die Hauptachse zu den Nebenachsen wie 1,77 zu 1.

Die vier horizontalen Kanten des Quadratoktaeders sind einander gleich, aber sie sind von den übrigen Kanten dieses Oktaeders verschieden; die vier horizontalen Kanten können deshalb abgestumpft sein, ohne daß es die anderen sind, und so entsteht die Kombination Fig. 12. Liegen die Abstumpfungsflächen der vier horizontalen Kanten der Hauptachse verhältnismäßig näher, so daß nur ein kleinerer Teil des Oktaeders bleibt, so nimmt

iariottesche Flasche). An einer großen Glasflasche mit vertikalen Wänden unten seitlich ein Tubulus angebracht und auf diesen eine Messingfassung t einer kurzen, weiten Messingröhre *r* aufgekittet. Die Rohre *r* dient zur ıfnahme der Ausflußöffnungen.

Damit der Ausfluß längere Zeit unter unverändertem Druck stattfinde, rd der Hals der Flasche mittels eines Korkes verschlossen, durch welchen

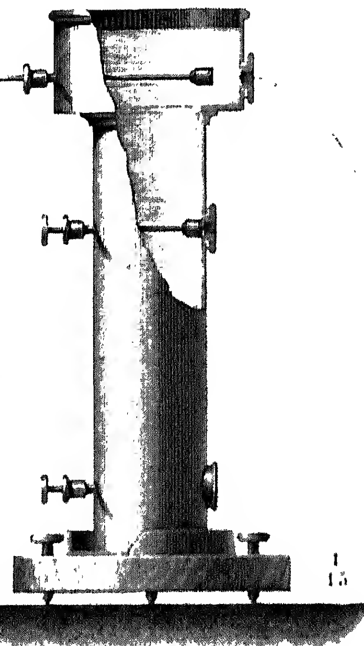


Fig. 402.

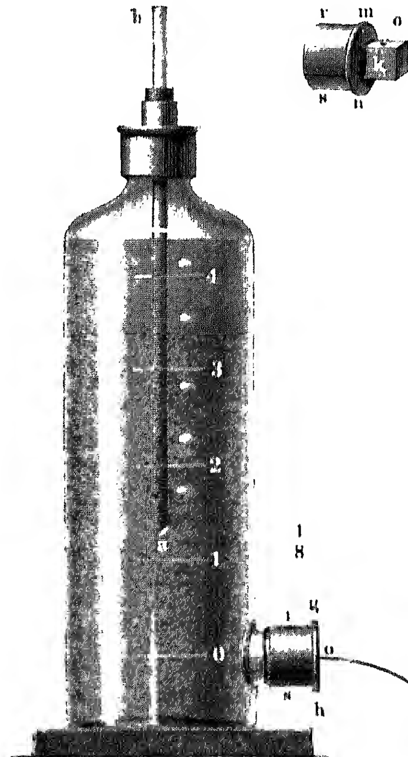


Fig. 403.

ne oben und unten offene Glasröhre hindurchgeht, deren untere Öffnung *a* ch unter dem Wasserspiegel befindet. In dem Maße nun, als unten Wasser sfließt, dringt die Luft durch die Glasröhre *ba* ein, indem fortwährend ıftblasen von *a* in den oberen Teil der Flasche aufsteigen; auf diese Weise t aber, wie später gezeigt werden wird, die ganze Wassermasse von *a* fwärts durch den Luftdruck äquilibriert, so daß nur die Höhe der Flüssigkeits-ule von *a* bis zur Ausflußöffnung herunter die Ausflußgeschwindigkeit bedingt.

Es ist nun auf der Flasche eine Teilung angebracht, deren Nullpunkt der Höhe der Ausflußöffnung liegt, während die folgenden Teilstriche 1, 3 usw. Decimeter über demselben angebracht sind. Der Ausfluß wird dann it einer Geschwindigkeit stattfinden, welche einer Druckhöhe von 1, 2, 3 er 4 dm entspricht, wenn man die Röhre so stellt, daß ihr unteres Ende ch in der Höhe des Teilstriches 1, 2, 3 oder 4 befindet.

Um einen Wasserstrahl vertikal in die Höhe springen zu lassen, kann an ein gebogenes kurzes Glasröhrchen mittels eines Korkes in *r* einsetzen,

wie es die Nebenfigur zeigt, oder, wenn die Reibung im engen Rohr vermieden werden soll, ein weiteres gebogenes Metallrohr anschrauben, welches oben mit horizontaler dünner Platte endigt, in welcher die Öffnung angebracht ist.

§ 136. Versuche über Ausflußgeschwindigkeit. Um das oben im § 134 entwickelte Gesetz durch den Versuch zu prüfen, scheint es am einfachsten, einen Wasserstrahl vertikal in die Höhe steigen zu lassen; denn wenn man das Wasser aus der Öffnung in dünner Wand vertikal nach oben ausströmen läßt, so sollte man erwarten, daß der Wasserstrahl vollkommen die Druckhöhe erreichen würde: hat man also in dem Apparate Fig. 403 die Röhre *ab* so hoch in die Höhe gezogen, daß ihr unteres Ende sich in der Höhe des Teilstriches 4 befindet, so müßte der vertikale Wasserstrahl bis zur Höhe dieses Teilstriches 4 steigen.

Der Versuch aber zeigt, daß der vertikale Wasserstrahl die theoretische Höhe nicht erreicht, woran jedoch nur die Bewegungshindernisse schuld sind; den wesentlichsten Einfluß übt aber das vom Gipfel wieder herabfallende Wasser aus, indem es das freie Aufsteigen des nachfolgenden Wassers hindert; deshalb steigt auch der Strahl augenblicklich höher, sobald man die Ausflußöffnung so wendet, daß der ausfließende Strahl einen ganz kleinen Winkel mit der Vertikalen macht, daß also das Wasser neben dem aufsteigenden Strahle herabfällt. In diesem Falle kann unter günstigen Umständen, das heißt wenn möglichst wenig Reibung stattfindet, der Strahl eine Höhe erreichen, welche 0,9 der Druckhöhe ist.

Eine bessere und in der Tat vollkommen genügende Übereinstimmung mit dem Gesetze erhält man, wenn man mit horizontal ausfließenden Wasserstrahlen experimentiert. Ein in horizontaler Richtung ausfließender Wasserstrahl beschreibt eine Parabel, deren Gestalt von der Ausflußgeschwindigkeit abhängt. Nach dem Torricellischen Gesetze ist nämlich die Ausflußgeschwindigkeit [Gleichung (1)]:

$$v = \sqrt{2\,gH},$$

wenn H die konstante Höhe der Flüssigkeit im Gefäße über der Ausflußöffnung darstellt. Die Wege, welche die Wasserteilchen in horizontaler Richtung in der Zeit t zurücklegen würden, wären also:

$$e_y = v\,.\,t = t\,.\,\sqrt{2\,gH}.$$

Unter der Einwirkung der Schwere werden sie aber zugleich wie beim horizontalen Wurf (§ 46) vertikal abwärts in der Zeit t die Wege

$$e_x = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

beschreiben. Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen t, so kommt:

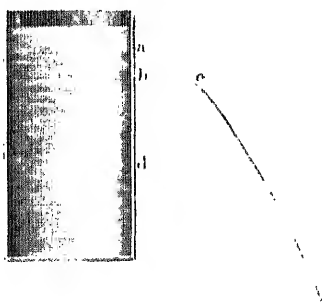
$$e_x = \frac{e_y^2}{4\,H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Dies ist aber wieder die Gleichung einer Parabel mit vertikaler Achse durch die Fläche der Öffnung, deren vertikale Abszissen e_x und deren horizontale Ordinaten e_y darstellen und wo $4\,H$ den Parameter der Parabel repräsentiert.

Die Richtigkeit der Formel (1) hat Michelotti durch Versuche im großen in der Nähe von Turin geprüft und gefunden, daß die beobachteten Werte des Parameters $4H$ nur um 0,99 kleiner waren als das Vierfache der wirklichen Druckhöhe H.

Zur Verdeutlichung fügen wir noch folgende Konstruktion der Kurve nach einem Zahlenbeispiel bei. Gesetzt, die Öffnung a in Fig. 404 befände sich 1 dm unter dem Wasserspiegel, so ist nach dem Torricellischen Gesetze die Ausflußgeschwindigkeit

Fig. 404.

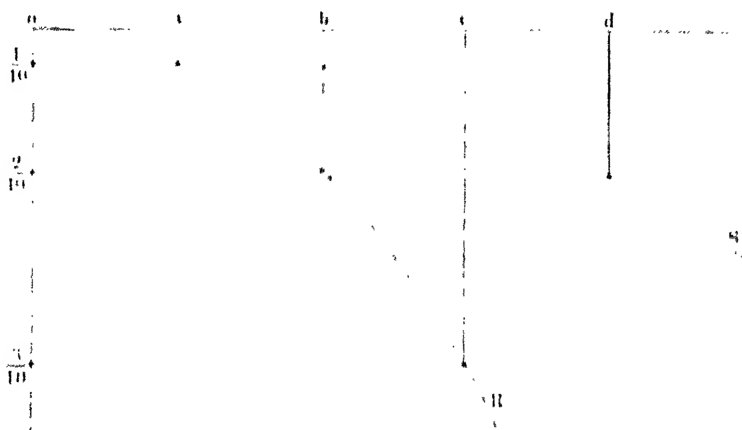


$$\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1} = 1{,}4 \text{ m}.$$

Wenn also ein Wasserteilchen in einem bestimmten Moment die Öffnung verläßt, so wird es nach einer Sekunde in horizontaler Richtung 1,4 m von derselben entfernt sein. Ein eben ausströmendes Wasserteilchen wird also nach $^2/_{10}$ Sekunde in horizontaler Richtung 0,28 m von der Öffnung entfernt sein; in $^2/_{10}$ Sekunde fällt es aber um $\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 0{,}196$ m herab. Wenn man demnach von der Öffnung a, Fig. 405, in vertikaler Richtung die Länge $ab = 0{,}196$ m herab mißt, so muß eine von b aus in horizontaler Richtung nach dem Wasserstrahle hin gezogene Linie bc denselben in einer Entfernung von 0,28 m treffen.

Aus einer Öffnung d, welche viermal so tief unter dem Wasserspiegel liegt als a, strömt der Wasserstrahl mit der doppelten Geschwindigkeit her-

Fig. 405.



vor. Wenn man also von d aus 0,196 m herabmißt und dann in horizontaler Richtung eine Linie gegen den Strahl hingezogen denkt, so muß sie denselben in einer Entfernung 2 . 0,28, also in einer Entfernung von 0,56 m treffen.

Daß der horizontal ausfließende Wasserstrahl in der Tat die dem Gesetz entsprechende Parabel beschreibt, davon überzeugt man sich am besten, wenn

man die Parabel auf Papier oder auf einem Brette konstruiert und sie dann dicht hinter den ausfließenden Strahl hält (s. § 49, Fig. 123). In Fig. 405 sind die Parabeln des horizontal ausfließenden Wasserstrahles R für eine Druckhöhe von 1 dm und S für eine Druckhöhe von 4 dm in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe konstruiert.

§ 137. **Ausflußmenge.** Die Wassermenge, welche aus einer Öffnung in einer gegebenen Zeit ausfließt, hängt offenbar von der Größe der Öffnung und der Ausflußgeschwindigkeit ab. Wenn alle Wasserteilchen die Öffnung mit der Geschwindigkeit passierten, welche, nach dem Torricellischen Theorem, der Druckhöhe entspricht, so würde die in einer Sekunde ausfließende Wassermenge einen Zylinder bilden, dessen Basis gleich der Öffnung und dessen Höhe gleich dem Wege ist, den ein Wasserteilchen vermöge seiner Geschwindigkeit in einer Sekunde zurücklegt. Dieser Weg ist nun aber die Ausflußgeschwindigkeit selbst, also nach § 134 $\sqrt{2gH}$, und wenn wir also den Querschnitt der Öffnung mit q bezeichnen, so ist die Ausflußmenge in einer Sekunde

$$m = q \cdot \sqrt{2gH} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Für eine Druckhöhe von 0,1 m, welcher eine Ausflußgeschwindigkeit von 140 cm entspricht, und eine Öffnung von 2 mm Durchmesser, welche also 0,0314 qcm Querschnitt hat, gibt die Rechnung eine Ausflußmenge von 4,4 cm³ pro Sekunde, also 264 cm³ pro Minute.

Stellt man den Versuch an, so findet man nur eine Ausflußmenge von 169 cm³.

Diese Differenz zwischen der sogenannten theoretischen und der beobachteten Ausflußmenge beweist unwiderleglich, daß nicht alle Wasserteilchen die Öffnung mit der Geschwindigkeit passieren, welche der Druckhöhe entspricht. In der Tat haben im Querschnitt der Öffnung nur die in der Mitte sich befindenden Wasserfäden diese Geschwindigkeit, während sie für die mehr nach dem Rande der Öffnung hin ausfließenden geringer ist, wie dies auch notwendig nach der folgenden Betrachtung sein muß.

In einem weiten Gefäße mit enger Öffnung kann die ganze flüssige Masse, mit Ausnahme der in der Nähe der Öffnung befindlichen Teile, als ruhend betrachtet werden. Die nacheinander ausströmenden Schichten beginnen also ihre Bewegung nicht zu gleicher Zeit, die vordersten haben bereits das Maximum der Geschwindigkeit erreicht, während die hintersten erst ihre Bewegung beginnen. Es würde dies ein Zerreißen der aufeinander folgenden Schichten zur Folge haben, wenn sich leere Räume bilden könnten. Weil dies aber nicht möglich ist, so ziehen sich die einzelnen Schichten mehr in die Länge, während ihr Durchmesser abnimmt; in dem Maße nun, als der Querschnitt der Schichten sich vermindert, müssen andere Wasserteilchen von den Seiten zufließen; da diese aber ihre Bewegung rechtwinkelig gegen die Öffnung erst später beginnen, so ist klar, daß sie mit einer geringeren Geschwindigkeit in der Öffnung selbst ankommen als die zentralen Wasserfäden.

Während also der Kern des ausfließenden Strahles in dem Moment, in welchem er die Öffnung verläßt, die der Druckhöhe entsprechende Geschwindigkeit hat, ist er von Wasserfäden umgeben, deren Geschwindigkeit um so

geringer ist, je näher sie dem Rande der Öffnung sind, und daraus folgt denn, daß die Ausflußmenge geringer sein muß, als wenn alle Teilchen die Öffnung mit der Geschwindigkeit des Kernstrahles verließen.

Die wahre Ausflußmenge M beträgt ungefähr 64 Proz. der sogenannten theoretischen. Die wahre Ausflußmenge ist also

$$M = c \cdot q \cdot \sqrt{2gH},$$

wo man für den konstanten Faktor c den Zahlenwert 0,64 zu setzen hat. Mit wachsender Druckhöhe nimmt der Zahlenwert des konstanten Faktors c etwas ab.

§ 138. Beschaffenheit des ausfließenden Strahles. Gleich nachdem der flüssige Strahl die Öffnung verlassen hat, beobachtet man eine auffallende Veränderung desselben; er zieht sich rasch zusammen; in einer Entfernung von der Öffnung, welche dem Halbmesser der Öffnung gleich ist, beträgt die Größe des Querschnittes des Strahles nur noch zwei Drittel vom Querschnitt der Öffnung selbst, so daß also an dieser Stelle der Durchmesser des Strahles ungefähr 0,8 vom Durchmesser der Öffnung ist.

Fig. 406.



Dieses Zusammenziehen des Strahles wird mit dem Namen der *Contractio venae* bezeichnet.

Man glaubte früher, daß von der bezeichneten Stelle an der Strahl sich wieder ausbreite; Savart hat aber gezeigt, daß ein solches Kontraktionsmaximum nur bei aufwärts gerichteten Strahlen stattfinde; bei anderen Strahlen nimmt die Zusammenziehung fortwährend, wenn auch kaum merklich, zu.

Die Fig. 406 stellt diese Kontraktion des Strahles dar; die Entfernung von der Öffnung ab bis zu der Stelle cd, von welcher an die fernere Zusammenziehung fast unmerklich wird, ist etwas größer als der Halbmesser der Öffnung selbst. cd ist ungefähr acht Zehntel der Länge ab.

Die Ursache der *Contractio venae* ist wohl keine andere als die, welche schon im Inneren des Gefäßes den Seitenzufluß der Wasserteilchen veranlaßt.

Verfolgen wir den flüssigen Strahl auf seinem Laufe weiter, so finden wir, daß er aus zwei wohl zu unterscheidenden Teilen besteht; der eine Teil, welche der Öffnung zunächst liegt, ist ruhig und durchsichtig wie ein massiver Glasstab, der andere entferntere Teil erscheint zerrissen und aus einer Reihe getrennter Tropfen bestehend.

Fig. 407 stellt einen flüssigen, von oben nach unten gerichteten Strahl dar, wie er dem Auge erscheint: an ist der klare Teil; in n beginnt der gestörte Teil des Strahles, welcher abwechselnd aus Bäuchen und Knoten besteht. Fig. 407a stellt den Strahl dar, wie er nach Savarts Untersuchungen wirklich ist. Der ganz gestörte Teil ist aus einer Reihe von Tropfen zusammengesetzt. Die Bäuche bestehen aus breiten, in horizontaler Richtung ausgedehnten Tropfen, die Knoten aber aus solchen, welche in vertikaler Richtung verlängert sind. Da aber die Knoten und Bäuche eine fixe Stellung haben, so muß ein und derselbe Tropfen abwechselnd breit und lang werden, je nachdem er sich an der Stelle eines Bauches oder Knotens befindet; jeder Tropfen muß also in regelmäßigen Perioden aus einer Gestalt in die andere

übergehen. Alle Tropfen scheinen gleiche Größe zu haben und denselben Veränderungen unterworfen zu sein. Zwischen je zweien dieser Tropfen scheint noch ein weit kleinerer sich zu befinden, wodurch die Bäuche ein röhrenartiges Ansehen erhalten.

Fig. 407. Fig. 407 a.

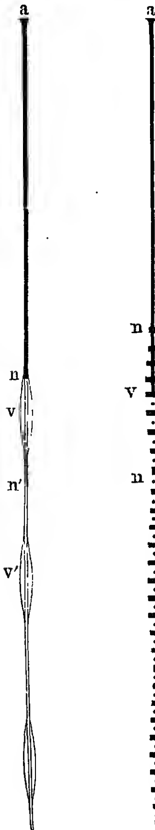


Fig. 408.

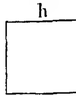


Fig. 409.

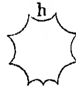
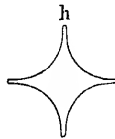


Fig. 410.



Die Gegenwart der Luft hat auf die Form und die Dimensionen des Strahles keinen Einfluß.

Wenn die Öffnungen nicht kreisförmig sind, so erleidet der Strahl sehr merwürdige Formveränderungen. Ein Strahl z. B., welcher aus einer quadratischen Öffnung in horizontaler Richtung hervorspringt, hat in verschiedenen Entfernungen von der Öffnung die Querschnitte Fig. 408, 409 und 410. Es rührt dies gewiß größtenteils daher, daß die Stelle, bis zu welcher hin die starke Kontraktion stattfindet, nicht für alle Teilchen in gleicher Entfernung von der Öffnung liegt, weil ja der Durchmesser der Öffnung nicht nach allen Richtungen derselbe ist.

§ 139. Einfluß der Ansatzröhren auf die Ausflußmenge. Wenn der Ausfluß nicht durch Öffnungen geschieht, welche in eine dünne Wand gemacht sind, sondern durch kurze Röhren, so finden merkwürdige Modifikationen statt, die wir jetzt näher betrachten wollen.

Wenn die kurze Ansatzröhre selbst die Gestalt des kontrahierten Strahles hat, so übt sie weiter keinen Einfluß auf die Ausströmung des Wassers aus.

Durch kurze zylindrische und nach außen konisch erweiterte Ansatzröhren fließt der Strahl entweder frei durch wie durch eine Öffnung, welche gleichen Durchmesser mit dem inneren Ende der Röhre hat, Fig. 411, und in diesem Falle übt die Röhre keinen Einfluß aus; oder das Wasser hängt

Fig. 411.

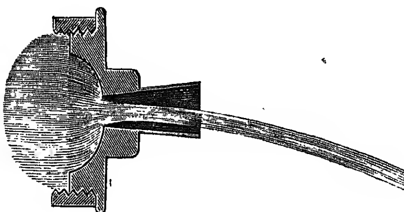
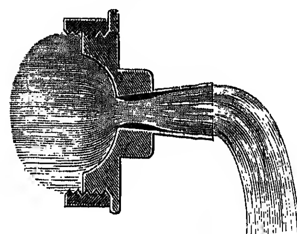


Fig. 412.



sich an die Wände der Röhre, so daß die Flüssigkeit die ganze Röhre ausfüllt und ein Strahl vom äußeren Durchmesser der Röhre ausfließt, Fig. 412;

in diesem Falle veranlaßt die Ansatzröhre eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit und eine Vermehrung der Ausflußmenge. Während eine Öffnung in dünner Wand 0,64 der theoretischen Ausflußmenge gibt, erhält man durch eine zylindrische Ansatzröhre 84 Proz., vorausgesetzt, daß die Länge der Röhre ihrem vierfachen Durchmesser gleich ist. Bei geringer Druckhöhe ist der Strahl stets anhängend, bei großer Druckhöhe hingegen ist er frei. Bei mittlerem Drucke kann man ihn nach Belieben bald frei, bald anhängend machen; ein geringes Hindernis stellt das Anhängen her, und oft reicht ein ganz schwacher Stoß hin, um den Strahl wieder frei zu machen.

Ein konisches, nach außen erweitertes Ansatzrohr bewirkt, im Falle es voll ausfließt, wie in Fig. 412, eine noch größere Vermehrung der Ausflußmenge als ein zylindrisches.

Es ist bereits bemerkt worden, daß die Vermehrung der Ausflußmenge von einer Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit begleitet ist. Der Grund davon ist leicht einzusehen. Die Adhäsion des Wassers an die Röhrenwände ist keine beschleunigende Kraft, sie kann die lebendige Kraft des ausfließenden Strahles nicht vermehren. Bezeichnen wir mit M die Ausflußmenge durch eine Öffnung in dünner Wand, durch v die entsprechende Geschwindigkeit, so ist $\frac{Mv^2}{2}$ die lebendige Kraft des Strahles. Wird nun die Ausflußmenge M vermehrt, indem sie M' wird, so muß doch die lebendige Kraft des ausfließenden Strahles unverändert bleiben, es ist also:

$$M\frac{v^2}{2} = M'\frac{v'^2}{2},$$

oder:

$$v'^2 = v^2\frac{M}{M'},$$

v' ist also kleiner als v.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, wie es kommt, daß Ansatzröhren die Ausflußmenge auf die erwähnte Weise vermehren und die Ausflußgeschwindigkeit dagegen vermindern.

Indem das Wasser in das Ansatzrohr einströmt, erleidet es eine Kontraktion, wie wenn es aus einer Öffnung in dünner Wand ausflösse; weiterhin aber, sobald einmal die Röhrenwände benetzt sind, bewirkt die Adhäsion an die Rohrenwände, daß sich die Ansatzröhre vollständig ausfüllt, und somit ist der Querschnitt des Strahles durch das Ansatzrohr vergrößert, er ist beim Austritt aus dem Rohre größer als an der Stelle der Kontraktion, wie man dies in Fig. 412 sieht.

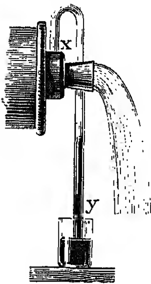
Wenn nun die Wasserteilchen, den ganzen Querschnitt der Röhre ausfüllend, dieselbe mit der Geschwindigkeit verließen, mit welcher sie die Stelle der größten Kontraktion passieren, so müßte notwendig ein Zerreißen der aufeinander folgenden Wasserschichten eintreten. Die Trennung der Wasserteilchen, also die Bildung von leeren Räumen, wird aber durch den Druck der Luft verhindert, welche den Eintritt der Wasserteilchen in das Rohr beschleunigt, dagegen aber auch den Ausfluß aus demselben verzögert. Durch den Druck der Luft werden die ausfließenden Wasserteilchen so viel zurückgehalten, daß dadurch ein voller Ausfluß möglich wird.

Daß der Luftdruck hier wirklich diese Rolle spielt, geht vorzüglich daraus hervor, daß, wenn der Versuch in einem luftleeren Raume stattfindet, der Ausfluß stets in der Fig. 411 dargestellten Weise vor sich geht, also die Ausflußmenge nicht vermehrt wird.

Macht man in die Seitenwand der Ansatzröhre da, wo die größte Kontraktion stattfindet, ein Loch, so wird durch diese Öffnung Luft eingesaugt, und der Strahl hört auf kontinuierlich zu sein.

Wenn in eine solche von obenher gemachte Seitenöffnung eine heberförmig gebogene Röhre xy, Fig. 413, eingesetzt wird, deren unteres Ende in ein Gefäß mit Wasser oder Quecksilber mündet, so wird durch das Bestreben des Wassers, in der Ansatzröhre einen luftleeren Raum zu bilden, die Flüssigkeit in der Röhre xy in die Höhe gesaugt. Dieses Phänomen des Saugens beweist ebenfalls den Einfluß des Luftdruckes auf die soeben betrachteten Erscheinungen. Da eine konische Ansatzröhre eine noch größere Ausflußmenge gibt als eine zylindrische, so muß sie auch ein stärkeres Saugen erzeugen, d. h. es wird in der Röhre xy unter übrigens gleichen Umständen durch ein konisches Ansatzrohr die aufgesaugte Flüssigkeitssäule zu einer größeren Höhe gehoben als durch ein zylindrisches.

Fig. 413.



Wir werden an späterer Stelle bei Beschreibung der Luftpumpen und der Gebläse Apparate kennen lernen, welche auf einem verwandten Prinzip beruhen.

§ 140. Reibungswiderstand in langen Röhren. Mit der nach der Gleichung $v = \sqrt{2gH}$ berechneten Geschwindigkeit fließt eine Flüssigkeit nur durch eine in dünner Wand angebrachte Öffnung aus; wenn dagegen der Ausfluß durch lange und verhältnismäßig enge Röhren geschieht, so findet ein Reibungswiderstand statt, welcher die Ausflußgeschwindigkeit erheblich vermindert. Aus diesbezüglichen Versuchen ergibt sich für dieselbe annähernd die Formel:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + b\frac{l}{d}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

worin l die Länge, d den Durchmesser der Röhre, und b eine mit der Geschwindigkeit v selbst veränderliche Größe bedeutet. Es ist nämlich nach Weisbach, wenn alle Größen in Meter gemessen werden:

$$v = 0{,}01439 + \frac{0{,}009471}{\sqrt{v}}.$$

Diese Formel für die Ausflußgeschwindigkeit gilt aber auch nur für den Fall, daß die Röhrenleitung überall gleich weit und ziemlich gerade, namentlich, daß kein besonderer Widerstand beim Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre zu überwinden ist.

Wenn das aus dem Gefäße, Fig. 414, durch die Röhre ac ausfließende Wasser auf seinem Wege keine Reibung zu überwinden hätte, wenn es bei c mit der Geschwindigkeit ausflösse, welche der vollen Druckhöhe entspricht,

so hätten die Röhrenwände keinerlei Druck auszuhalten. Infolge des zu überwindenden Reibungswiderstandes aber hat jede Stelle der Röhre einen Druck auszuhalten, welche dem Reibungswiderstande proportional ist, der auf dem Wege von der fraglichen Stelle bis zur Mündung c der Röhre noch zu überwinden ist.

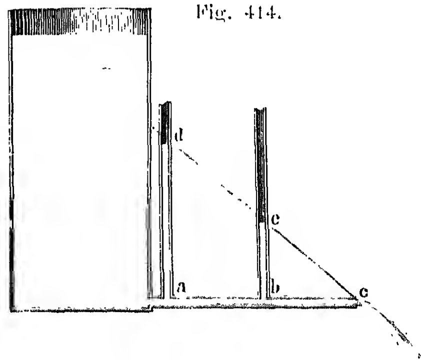


Fig. 414.

Wird in die Ausflußröhre bei a ein vertikales Glasrohr eingesetzt, so wird das Wasser in ihm bis zu einer Höhe ad aufsteigen. Der Druck der Wassersäule ad hält dem Reibungswiderstande das Gleichgewicht, welchen das durch die Röhre strömende Wasser auf dem Wege von a bis c noch zu überwinden hat.

Wird in der Mitte zwischen a und c, also bei b, eine vertikale Glasröhre eingesetzt, so wird in ihr das Wasser nur bis zu einer Höhe be steigen, welche $= \frac{1}{2} ad$ ist, weil der auf dem Wege von b bis c zu überwindende Widerstand nur die Hälfte von dem von a bis c zu überwindenden ist.

Wenn man überhaupt an irgend einer Stelle der Röhre ac eine vertikale Glasröhre einsetzt, so wird das Wasser in derselben so hoch steigen, daß der Gipfel der Wassersäule auf die gerade Linie dc fällt.

§ 141. Ausfluß durch Kapillarröhren. Um die Gesetze des Ausflusses von Flüssigkeiten durch Kapillarröhren zu untersuchen, wandte Poiseuille den Fig. 415 abgebildeten Apparat an. Die Kapillarröhre AB ist an eine weitere, mit einer kugelförmigen Erweiterung versehene Glasröhre angesetzt. Über und unter der Kugel sind die Marken M und N angebracht; das Volumen des Gefäßes zwischen M und N ist genau bestimmt. Nachdem der Apparat durch Saugen mit der Flüssigkeit gefüllt ist, wird das obere Ende desselben mit einem Reservoir verbunden, welches komprimierte Luft enthält, deren Druck durch ein Quecksilbermanometer gemessen wird. Man beobachtet die Zeit, welche erforderlich ist, damit unter konstantem Druck der Spiegel der Flüssigkeit von M bis N sinkt; wird alsdann der Versuch bei verschiedenem Druck wiederholt, so findet man, daß die Ausflußzeit für dieselbe Flüssigkeitsmenge dem Drucke umgekehrt proportional ist.

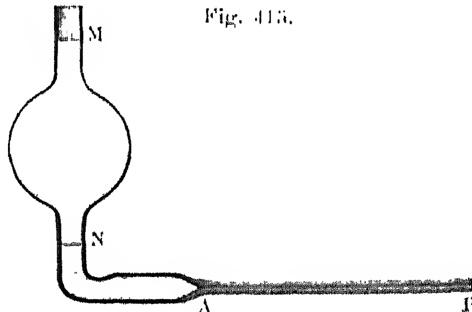


Fig. 415.

Aus seinen Versuchen mit diesem Apparate fand Poiseuille, daß die in einer gegebenen Zeit ausströmende Flüssigkeitsmenge Q direkt proportional dem Drucke p und der vierten Potenz des Durchmessers D, dagegen verkehrt proportional der Länge der Kapillarröhre sei. Sie läßt sich also durch die Formel

$$Q = N\frac{p \cdot D^4}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

ausdrücken, worin N einen konstanten Faktor bezeichnet, dessen Größe von einer Flüssigkeit zur anderen, sowie auch insbesondere mit der Temp tur ändert. Erhöhung der letzteren von 0 bis 60° steigert z. B. die Ausf menge des Wassers (nach Girards Versuchen) um mehr als das Dreifa

Während die Ausflußgeschwindigkeit der Flüssigkeiten aus Öffnun in dünnen Wänden nach dem Torricellischen Gesetze lediglich eine Fu tion des Druckes ist, erscheint dieses Gesetz beim Ausfluß durch Kapil röhren vollständig umgewandelt, indem hier die Molekularwirkungen zwis den Teilchen der Flüssigkeit und denen der Röhrenwand einen Einfluß winnen, welcher bei den Fällen, auf welche das Torricellische Gesetz p völlig verschwindet. Wir werden auf diesen Gegenstand an späterer St zurückkommen.

§ 142. Reaktion ausströmender Flüssigkeiten. Denken wir uns Gefäß, welches mit Wasser gefüllt ist, so bleibt alles in Ruhe, weil je

Fig. 416.

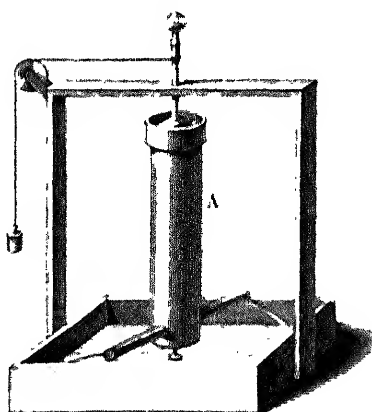
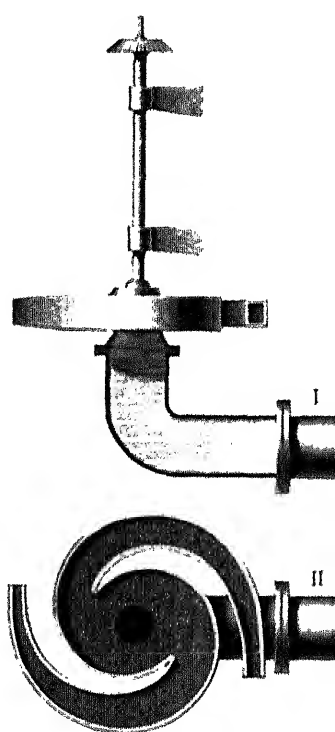


Fig. 416 I u. II



Seitendruck durch einen vollkommen gleichen, aber entgegengesetzten aufgehoben wird. Wenn man aber die Wand an irgend einer Stelle durchbohrt, so daß das Wasser hervorspringt, so ist der Druck an dieser Stelle offenbar weggenommen, während das der Öffnung diametral gegenüberliegende Wandstück noch gerade so stark gedrückt wird als vorher. Der Druck auf diejenige Gefäßwand, in welcher sich die Öffnung befindet, ist also geringer als der Druck, welchen die gegenüberstehende Wand aushält; mithin wird ganze Gefäß sich in einer Richtung bewegen müssen, welche der Richtu des ausfließenden Wasserstrahles entgegengesetzt ist, wenn diese Bewegu nicht durch Reibung oder auf irgend eine andere Weise verhindert wird. ist dies dem Rückstoße der Geschütze zu vergleichen. Man kann die be

diese Kombination den Habitus Fig. 13 an, welche die gewöhnliche Gestalt des arseniksauren Kalis darstellt.

Die vier Abstumpfungsflächen der horizontalen Kanten bilden zusammen eine quadratische Säule, und so sind Fig. 12 und Fig. 13 Kombinationen des Quadratoktaeders mit der quadratischen Säule.

Die sechs Ecken des Quadratoktaeders sind ebenfalls nicht gleichartig; die vier Ecken, in welchen die Nebenachsen endigen, sind unter sich gleich,

Fig. 12.

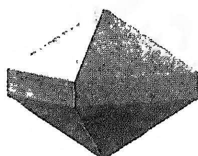


Fig. 13.

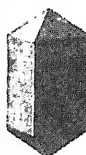
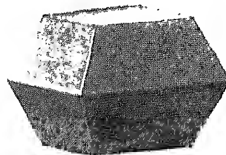


Fig. 14.



aber sie sind verschieden von dem Eck am oberen und unteren Ende der Hauptachse. Deshalb können das obere und das untere Eck des Quadratoktaeders allein abgestumpft sein, wie es Fig. 14 zeigt, welches die gewöhnliche Form des Blutlaugensalzes darstellt: bei anderen Kristallen dagegen sind die vier horizontalen Ecken abgestumpft, ohne daß es die Ecken der Hauptachse sind.

Ohne in eine weitere Betrachtung der Gestalten dieses Systems einzugehen, wird aus dem Gesagten schon klar der Grundcharakter desselben hervorgehen, welcher eben darin besteht, daß die vertikale Achse von den beiden anderen, unter sich gleichartigen ausgezeichnet ist.

Fig. 15.

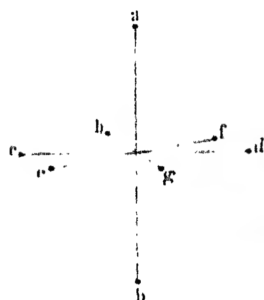


Fig. 16.

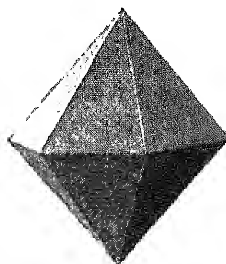


Fig. 17.

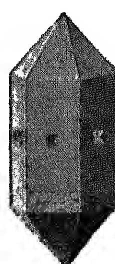
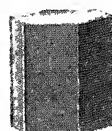


Fig. 18.



Auch in diesen, wie in den übrigen Systemen gilt das Gesetz der rationalen Indices. Die Abstände, in denen die Achsen geschnitten werden, sind also im allgemeinen ausgedrückt durch das Symbol $a : a : nc$, wobei c zu a irrational ist, dagegen n eine Zahl, z. B. $^1/_2$, $^1/_3$, 2 oder 3 ist, die zu 1 in einem einfachen rationalen Verhältnis steht. So ist z. B. für schwefelsaures Nickeloxydul $c = 1{,}888\,a$ und $c = 0{,}944\,a$, deren zugehörige Flächen miteinander in Kombination treten.

Im quadratischen System kristallisieren u. a.: Vesuvian, Honigstein, Blutlaugensalz, schwefelsaures Nickeloxyd, saures arseniksaures Kali usw.

3. Das **hexagonale System** mit vier Achsen (Fig. 15), von denen drei, nämlich cd, ef und hg, in einer Ebene liegend, einander gleich sind und einen Winkel von 60° miteinander machen, während die vierte aus-

Ausfließen des Wassers wirkende Reaktion durch einen Apparat anschaulich machen, welcher unter dem Namen des Segnerschen Wasserrades, Fig. 416, bekannt ist. Es besteht aus einem um eine vertikale Achse leicht drehbaren Gefäße A, an dessen unterem Ende sich zwei oder mehrere horizontale Röhren befinden, die alle (von der Mitte aus gesehen) auf derselben Seite mit kleinen Öffnungen versehen sind. Das Gefäß dreht sich nach der den ausströmenden Wasserstrahlen entgegengesetzten Richtung.

Die beschriebene Konstruktion hat die Nachteile, daß durch den Druck der großen Wassermenge auf die Spitze der Achse eine sehr große Reibung erzeugt wird und daß durch die scharf rechtwinklig umgebogenen Bahnen des Wassers viel lebendige Kraft verloren geht. Die Fig. 416 I und II zeigt in teilweisem Vertikal- und Horizontalschnitt die verbesserte Konstruktion des Althansschen Reaktionsrades, bei welchem das Wasser unter Druck von unten zugeführt und durch spiralförmig gebogene Röhren entleert wird. Dieser Apparat bildet auch den Übergang zu den eigentlichen Turbinen, welche das Prinzip der Reaktion in bestmöglicher Weise ausnutzen.

§ 143. Energie der Wassergefälle; Wassermotoren. Wenn eine Wassermasse M von der Höhe H herabsinkt, so wird dabei eine Energie verfügbar, deren Größe im absoluten Maßsystem durch MHg, im Gravitationsmaßsystem durch MH ausgedrückt wird. Im letzteren Falle wird M in Kilogramm, H in Metern gemessen, also das Produkt in Kilogrammetern erhalten. Da man die Arbeit eines Pferdes pro Sekunde auf 75 kgm veranschlagt, so ist ein Wassergefälle, welches pro Sekunde 75 kgm liefert, als äquivalent mit einer „Pferdekraft" anzusehen.

Diese Arbeit oder Energie kann man auf zweierlei Weise auf eine Maschine übertragen.

1. Indem man das Wasser die der Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit erlangen läßt und dann seine lebendige Kraft auf einen anderen Körper durch Stoß überträgt, wie dies z. B. bei den unterschlächtigen Wasserrädern, sowie bei der Turbine von Fourneyron, dem Peltonrade u. a. der Fall ist, oder

2. indem man das Wasser schon während seines Falles durch sein Gewicht einen Druck auf den zu bewegenden Körper ausüben läßt, so daß es die seiner Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit gar nicht erreicht und überhaupt mit bedeutend verminderter Beschleunigung niedergeht, wie dies z. B. bei oberschlächtigen Wasserrädern, bei gewöhnlichen Turbinen und bei Wassersäulenmaschinen der Fall ist. Hier wird die lebendige Kraft der fallenden Wassermasse gewissermaßen gleich im Moment ihrer Entstehung konsumiert.

Mag nun aber die Benutzung der lebendigen Kraft eines Wassergefälles auf die eine oder die andere Weise stattfinden, so wird es doch nie gelingen, den theoretischen Effekt, als welchen wir die Arbeit MH bezeichnen wollen, vollständig zu verwerten, und zwar deshalb schon nicht, weil im ersten der beiden oben betrachteten Fälle dem Wasser doch noch eine bestimmte Geschwindigkeit bleiben muß, mit welcher es abfließt, im zweiten Falle aber das Wasser doch nicht ohne alle Beschleunigung niedergehen kann. Außerdem aber geht noch ein großer Teil der lebendigen Kraft des Gefälles durch die Reibung des Wassers in den Kanälen, sowie durch Reibungswider-

stände in den zu bewegenden Maschinen verloren, so daß selbst mit den besten hydraulischen Maschinen kaum ein Nutzeffekt erzielt werden kann, welcher mehr als 70 Proz. des theoretischen Effektes beträgt.

Indem wir auf eine Beschreibung der übrigen Wassermotoren verzichten müssen[1]), wollen wir als Repräsentanten der ersten Klasse derselben, bei denen der Stoß des Wassers wirkt, das aus Amerika importierte Peltonrad, Fig. 417 a, b, beschreiben. Das Charakteristische desselben beruht in der Form der Schaufeln, welche in der Mitte, wie der Querschnitt Fig. 417 b

Fig. 417 a.

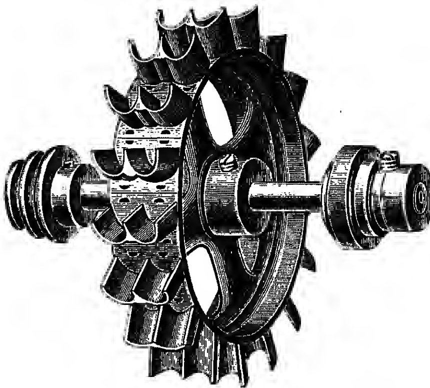
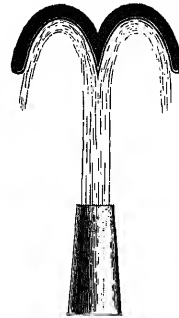


Fig. 417 b.



zeigt, durch eine scharfe Schneide in zwei zylindrische Hohlräume geteilt sind. Der aus einer Düse unter hohem Druck austretende Wasserstrahl wird durch diese Schneide in zwei Hälften zerschnitten, deren jede längs der hohlen und glatten Innenfläche der Schaufel entlang streicht und dabei seine lebendige Kraft mit nur geringem Reibungsverlust an die Schaufel abgibt. Dieser Motor empfiehlt sich bei hohem verfügbaren Wasserdruck insbesondere in den Fällen, wo, wie bei Dynamomaschinen, hohe Umdrehungsgeschwindigkeit erwünscht ist[2]).

Als Beispiel eines Motors, bei dem der Druck des Wassers ausgenutzt wird, wollen wir den Wassermotor von A. Schmidt in Zürich, der sich für das Kleingewerbe in Städten, wo Wasserleitungen mit hohem Druck zur Verfügung stehen, bewährt hat, in Kürze beschreiben.

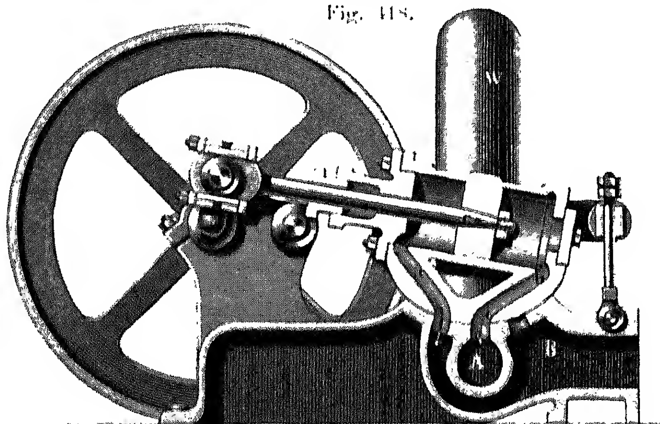
Die Maschine, Fig. 418, besteht aus einem oszillierenden Zylinder, dessen Kolben vom Druckwasser hin und her getrieben wird. Die Kolbenstange geht durch eine Stopfbüchse und steht mit der Kurbel in direkter Verbindung. Vermöge der rotierenden Bewegung der Kurbel wird der Zylinder durch die Kolbenstange in eine oszillierende Bewegung versetzt, deren Achse durch den Punkt c geht. An dem Zylinder ist unterhalb ein Bauch mit Zuführungskanälen und zylindrischer Schieberfläche angegossen, welche letztere sich in der Figur als ein von c aus beschriebenes Kreissegment darstellt. Die hohl gegossene Grundplatte B legt sich dicht schließend an die auf ihr hin und her gleitende Schieberfläche des Zylinders; sie enthält drei Kanäle,

[1]) Ausführlicheres findet man bei M. Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre 1.

[2]) Kleinere Peltonräder liefert die Firma H. Breuer u. Co. zu Höchst a. M.

wovon der mittlere A das Druckwasser abwechselnd dem Kanal a oder b zuführt, während seine beiden Seitenkanäle dasselbe bei B abströmen lassen. Man ersieht leicht aus der Figur, in welcher Weise durch die Bewegung des Kolbens das Oszillieren des Zylinders und hierdurch eine den jeweiligen Kolbenstellungen entsprechende Kommunikation der Kanäle hervorgebracht wird, durch welche dann das Druckwasser abwechselnd durch a und b zu- und abgeführt werden muß. Bei jeder Umdrehung des Schwungrades findet

Fig. 418.



zweimal, und zwar in den Momenten, wo der Kolben eine der äußersten Lagen angenommen, eine Absperrung sämtlicher Kanäle statt. Die Stöße, welche hierdurch entstehen würden, werden durch den Windkasten W unschädlich gemacht, indem die in seinem oberen Teile enthaltene Luft bei jeder Absperrung durch das eindringende Wasser komprimiert wird, um sich dann wieder auszudehnen.

Der Schmidtsche Wassermotor wird in 21 verschiedenen Größen ausgeführt, wovon bei einem Wasserdrucke von 20 m der kleinste bei einem Durchmesser des Zylinders = 4 cm und einem Wasserverbrauch von 40 Liter pro Minute etwa $^1/_6$ Pferdekraft entwickelt, während der größte von 30 cm Durchmesser und 2150 Liter Wasserverbrauch pro Minute eine Kraft von $7^1/_2$ Pferden liefert.

§ 144. Stoßheber oder hydraulischer Widder. Wenn eine in einem geschlossenen Kanale fließende Wassermenge durch plötzliches Verschließen der Ausflußmündung abgesperrt wird, so wird durch die lebendige Kraft der Wassermenge ein Stoß auf die Verschlußfläche, sowie auch auf die übrigen Wandungen des Kanals ausgeübt.

Montgolfier hat einen Apparat konstruiert, den er hydraulischen Widder oder Stoßheber nannte, bei welchem die Energie des stoßenden Wassers in sinnreicher Weise dazu benutzt wird, einen Bruchteil desselben auf eine größere Höhe zu heben, als die Höhe des Wasserspiegels in dem Gefäße ist, aus welchem der Kanal gespeist wird.

Bevor wir diesen Apparat selbst beschreiben, wollen wir einen einfachen Versuch angeben, welcher das jenem zugrunde liegende Prinzip zu demonstrieren gestattet.

Aus einem Wasserreservoir E, Fig. 419, ströme das Wasser durch e entsprechend langen Kanal A und fließe an der Mündung ab mit ei gewissen Geschwindigkeit aus. Schließt man nun plötzlich einen Teil Mündung ab, z.B. die untere Hälfte ac, durch eine vorgehaltene Platte o durch Daraufdrücken des Fing ab, so kann man sich vorstel daß dadurch die untere Hä des im Kanal fließenden Wass gehemmt, die obere Hälfte gegen nicht behindert werde, a zufließen. Die lebendige Kr der unteren Wasserhälfte geht aber nun auf die obere Hälfte über, di wird daher im Moment der Hemmung mit größerer Geschwindigkeit hera geschleudert.

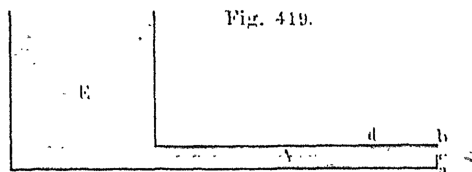


Fig. 419.

Diese größere Geschwindigkeit dauert aber nur so lange, bis die Ener des stoßenden Wassers übertragen ist; von da an stellt sich (nahezu) ursprüngliche Ausflußgeschwindigkeit wieder ein, während natürlich die Str stärke im Querschnitt des Kanals (ungefähr) auf die Hälfte gesunken Öffnet man nun wiederum die Mündung ab vollständig, so erlangt bald Wasser im Kanal die frühere Stromstärke wieder, und der Versuch ka wiederholt werden.

Wenn man überdies noch eine Öffnung an der Oberseite des Kanals et bei d anbringt, so wird im Moment des vollständigen Verschlusses der M dung ab die lebendige Kraft des Wassers dazu verwendet, einen Teil dessell durch die Öffnung bei d hinauszustoßen, und es wird dadurch ein Wass strahl hervorgebracht, der kurze Zeit hindurch weit über das Niveau vo emporreicht, welcher aber nacher, nachdem die Stoßwirkung vorüber ist, un diese Höhe herabsinkt.

Bei dem Apparate von Montgolfier handelt es sich nun darum, di abwechselnde Öffnen und Verschließen der Mündung ab selbsttätig zu v anlassen, und dann noch den intermittierenden Wasserstrahl durch Anw dung eines sogenannten Windkessels in einen kontinuierlich wirkenden u zuwandeln.

Fig. 420 zeigt einen solchen Stoßheber. Derselbe hat folgende Besta teile: Das Reservoir E, die Fallröhre A, den Kanal B, welcher möglic gerade und lang sein soll, die Ventile 1 und 2, den Windkessel C mit Steigröhre D. Das Wasser strömt zuerst durch die Öffnung des Ventil massenhaft aus und hebt, sobald es eine gewisse Geschwindigkeit erla hat, die Ventilklappe empor, wodurch die Öffnung abgesperrt wird. Der durch erzeugte Stoß auf die Röhrenwände trifft die Klappe des Ventils hebt dieselbe und drängt eine Quantität Wasser in den Kessel, in welch oberhalb der Mündung b des Rohres D ein Luftquantum abgesperrt wi welches seinerseits auf das Wasser rückwärts einen elastischen Druck aus durch welchen das Ventil 1 geschlossen und das eingedrungene Wasser das Rohr D gehoben wird.

Sobald die Stoßwirkung vorüber und das Wasser im Kanal AB zur Ru gekommen ist, fällt die Ventilklappe 2 wieder herab, der Ausfluß dasel beginnt von neuem, und so wiederholt sich der frühere Vorgang. Unter fo während abwechselndem Spiele der beiden Ventile wird durch das Rohr

Wasserstrahl auf eine Höhe emporgetrieben, welche das Gefälle vom Wasserspiegel in E bis zur Mündung bei 2 vielmal übersteigen kann. Würde keine Energie zur Bewegung der Klappen, zur Reibung usw. nebenbei nutzlos verbraucht werden, so würde sich die Steighöhe des Wassers zu seiner Fallhöhe verhalten wie die bei 2 ausfließende Menge desselben zu der emporgehobenen.

Fig. 420.

Es könnte also beispielsweise ein Fünftel der durch den Kanal fließenden Wassermenge um die fünffache Höhe des verfügbaren Gefälles gehoben werden. Dieser theoretische Effekt wird begreiflicherweise in der Praxis nie erreicht.

Der Stoß des Wassers, welcher in dem beschriebenen Apparate eine nützliche Anwendung findet, kann in ausgedehnten Wasserleitungen sehr schädlich werden und unter Umständen die Leitung zerstören. Man muß, um dies zu vermeiden, dafür sorgen, daß die Hähne nicht zu plötzlich geschlossen werden, oder besser durch miteingeschaltete Luftkessel die Stöße aufnehmen und unschädlich machen.

§ 145. *Stationäre Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flüssen.* Bei der Bewegung des Wassers in offenen Kanalen und Flußbetten treten analoge Reibungshindernisse durch die Wande wie in langen Röhren ein. Infolgedessen wird da im allgemeinen die Beschleunigung der Schwere ganz aufgehoben, so daß ein gleichförmiger, der Neigung des Flußbettes entsprechender Abfluß, der sogenannte stationare Zustand, zustande kommt. Dabei muß offenbar durch jeden Querschnitt des Gefäßes in der Zeiteinheit eine gleiche Flüssigkeitsmenge durchgehen, da sonst stellenweise eine Zusammenpressung, Stauung oder eine Dilatation derselben bzw. Zerreißen erfolgen würde. Heißen wir also V die Geschwindigkeit im Querschnitt R und v die Geschwindigkeit im Querschnitt q, so muß, damit das Volumen nicht verändert werde, sein:

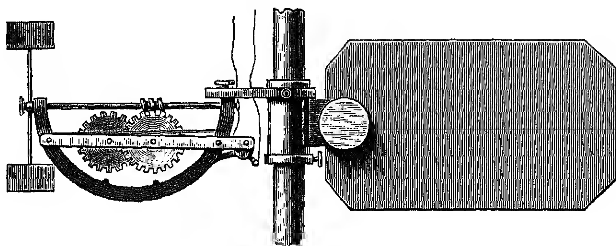
$$Q \cdot V = q \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

d. h. im kleinen Querschnitt wird die Geschwindigkeit entsprechend größer als im größeren Querschnitt sein müssen, daher der bekannte Satz: „Jede Stromenge ist auch eine Stromschnelle."

In den Kanälen sind noch analoge Berechnungen der Geschwindigkeit und damit der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließenden Wassermengen möglich wie bei den Röhren; bei unregelmäßigen Flußbetten dagegen sind die Geschwindigkeiten in irgend einem Querschnitte zu unregelmäßig

verteilt, um eine Berechnung derselben zu gestatten. Es bleibt dann zur Bestimmung der Durchflußmenge nichts anderes übrig, als das Profil des Flußbettes möglichst genau durch Messungen zu ermitteln und die Geschwindigkeiten an vielen Stellen desselben zu messen, um daraus eine mittlere Geschwindigkeit der Strömung abzuleiten. Hierzu bedient man sich zweckmäßig des Woltmannschen Strommessers, wie ihn Fig. 421 darstellt. An einer Stange ist mittels klemmbarer Hülse einerseits der Halter einer Achse mit Flügelrad und andererseits eine größere Platte befestigt, welch letztere als Fahne die Achse des Flügelrades stets parallel zur Stromrichtung einstellt. Da die Flügel schief gestellt sind, so wird das Rad durch den Stoß des Wassers umgedreht und sich um so rascher drehen, je stärker das

Fig. 421.



Wasser strömt. Um diese Umdrehungen zu zählen, ist an der Achse eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in das eine der beiden, am Rande geteilten Zahnräder eingreift, während das zweite die ganzen Umdrehungen des ersten angibt. Der Eingriff des ersten Zahnrades in die Schraube erfolgt aber erst, wenn man mittels der Schnur, die am Stabe nach oben läuft, durch Anziehen den Hebel hebt, in welchem die Radachsen sitzen. Man kann somit an jeder Stelle, wohin man den Strommesser bringt, durch Einschalten der Zahnräder während einer bestimmten Zeit, etwa 10 Minuten, aus den Ablesungen an ihnen vorher und nachher die Zahl der Umdrehungen des Flügelrades und damit nach den ausgeführten empirischen Konstantenbestimmungen des Instrumentes die Wassergeschwindigkeit an der betreffenden Stelle finden.

Einfacher in Herstellung und Benutzung, aber weniger genau ist die demselben Zwecke dienende Pitotsche Röhre, eine vertikale, oben offene, unten in horizontale Richtung umgebogene und mit einer trichterförmigen Mündung versehene Röhre aus Glas oder aus Blech mit Glasfenstern. Versenkt man diesen Apparat in das strömende Wasser mit der Mündung des Trichters gegen die Stromrichtung, so wird durch den Stoß des Wassers in der Röhre eine Niveaudifferenz hervorgebracht, aus welcher auf die Stromgeschwindigkeit geschlossen werden kann. Das Instrument wird empirisch geeicht.

§ 146. Wirbelbewegungen. Wenn Wasser aus einer zentralen Öffnung im Boden eines Gefäßes ausfließt, so bildet sich infolge der rascheren Bewegung der mittleren Teilchen gegen die Öffnung hin nicht bloß eine Vertiefung der Flüssigkeitsoberfläche, sondern zugleich eine drehende Bewegung der Flüssigkeitsfaden um die Achse der Öffnung, so daß ein Teilchen

von der Oberfläche nicht geradlinig oder in einfach gekrümmter Linie, sondern in einer sich verengenden Schraubenlinie gegen die Öffnung sich hinbewegt, wie es die Fig. 422 andeutet. Es entsteht so oft ein starker spiralförmiger Wirbel um die Öffnung. Ebenso beobachtet man horizontale

Fig. 422.

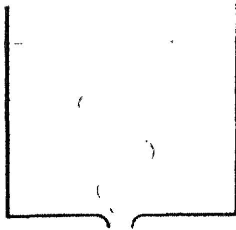


Fig. 423.

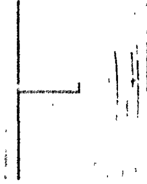
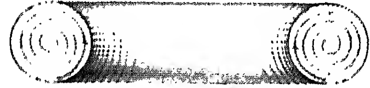


Fig. 424.



Wirbelbewegungen, wenn in einem Kanal oder Fluß durch eine vorstehende Wand, ein Brückenjoch oder dergleichen eine plötzliche Verkleinerung des Querschnittes erfolgt. Es bilden sich, besonders im toten Wasser hinter der Wand und oft auch vor ihr, Wirbel, wie dies Fig. 423 anzeigt. Es ist dies offenbar so zu erklären, daß vor der Wand ein Rückstoß des bewegten Wassers erfolgt und daß die hinter derselben in den geschützten Raum einbiegenden Wasserfäden die benachbarten weiteren Teilchen mitreißen und dadurch eine kleine Depression des Wasserspiegels in der Ecke veranlassen, welche eine Bewegung des äußeren Wassers dahin und damit dann auch die wirbelnde Bewegung zur Folge hat.

Eine besondere Art von Wirbelbewegung entsteht, wenn man einen Wasserstrahl rasch vorübergehend von unten in die Mitte eines mit Wasser gefüllten Gefäßes emporsteigen läßt. Ist der Wasserstrahl gefärbt, so bemerkt man zuerst die Bildung einer Scheibe, die sich in der Mitte konvex erhebt und dann, indem ihre Ränder nach innen sich umstülpen, nach und nach in einen horizontalen Wirbelring verwandelt, in welchem das Wasser auf der Innenseite von unten nach oben und außen kreist, wie Fig. 424 dies im Durchschnitt durch einen solchen Ring darstellt. Ähnliche Wirbelbewegungen finden auch bei den gasförmigen Körpern statt.

Sechstes Kapitel.

Mechanik gasförmiger Körper.

§ 147. Eigenschaften der gasförmigen Körper und nächste Folg rungen daraus. Der gasförmige Zustand der Korper hat nach § 8 r dem flüssigen die leichte Verschiebbarkeit der Teilchen gegeneinander geme dagegen tritt bei ihm an Stelle der ein bestimmtes Volumen des Ganz erhaltenden Zusammenhangskraft eine entgegengesetzte, die Teilchen a einandertreibende Kraft, die sogenannte Expansivkraft oder Spannkra der Gase.

Infolge der ersteren Eigenschaft gelten für die Gase dieselben Geset welche wir bei den Flüssigkeiten als Folge ihrer Verschiebbarkeit der Teilch kennen gelernt haben. Jeder Druck pflanzt sich im Inneren eines Ga ebenso wie dort nach allen Seiten mit gleicher Stärke fort, und wenn d Druck im Inneren eines Gasvolumens variiert, so müssen zur Erhaltung d Gleichgewichtes den verschiedenen Drucken ebenfalls geschlossene Nivea schichten entsprechen. Die Expansivkraft der Gase aber würde zu ein unbegrenzten Verflüchtigung derselben fuhren, wenn nicht äußere Krafte, v etwa die festen Wände eines Gefäßes, in das sie eingeschlossen sind, d verhindern. Im letzteren Falle haben die Gefäßwände einen der Expans kraft entsprechenden Druck auszuhalten.

Dieses Bestreben der Gase, sich auszudehnen, wird leicht durch folgend Versuch nachgewiesen. Man legt unter die Glocke der Luftpumpe eine n wenig Luft enthaltende und deshalb runzelige Tierblase, deren Öffnung f zugebunden ist. Nach einigen Kolbenzügen schon bläht sich die Blase a und ist endlich gerade so straff angespannt, als ob man mit aller Gew Luft hineingeblasen hätte. Läßt man die Luft wieder in den Rezipien hineintreten, so schrumpft die Blase wieder zusammen. Die in der Bl eingeschlossene Luft hat also wirklich ein Bestreben, sich auszudehnen, d nur durch die umgebende Luft Widerstand geleistet wird.

§ 148. Verzeichnis der wichtigsten Gase, ihrer Formel und ihr spezifischen Gewichte. So wie das Wasser als Hauptrepräsentant d flüssigen Körper, so erscheint die uns umgebende atmosphärische Lu als Hauptrepräsentant der gasförmigen Korper. Der chemischen Zusamm setzung nach ist diese Luft ein Gemisch von mehreren gasförmigen Körpe wovon Stickstoff und Sauerstoff die Hauptmenge ausmachen, während Wass dampf, Kohlendioxyd, Ammoniak, Argon und noch einige neu entdeckte E mente in geringerer Quantität beigemengt sind. Die vom Wasserdam dessen Menge sehr stark wechselt, befreite, also trockene Luft enthält Durchschnitt 0,03 Volumprozent Kohlendioxyd, 78,40 Volumprozent Stic

stoff, 20,94 Volumprozent Sauerstoff und 0,63 Volumprozent Argon, Krypton und Neon. Der Wasserdampf beträgt im Durchschnitt 1,3 Volumprozent.

Gasförmige Körper, welche nicht ein Gemenge darstellen, sondern nur ein Element oder eine chemische Verbindung von Elementen enthalten, heißen schlechtweg Gase. Wie man die Dichte der festen und flüssigen Körper auf die Dichte des Wassers als Einheit bezog, so hat man für gasförmige Körper die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft als Einheit gewählt und als spezifisches Gewicht derselben die Zahl bezeichnet, die angibt, um wievielmal schwerer oder leichter ein gewisses Volumen des Gases ist als ein gleiches Volumen Luft. Da aber die Dichtigkeit der Gase in noch höherem Grade als die der festen und flüssigen Körper von der Temperatur und dem Druck, unter dem sie stehen, abhängt, so hat man dieselbe beim Vergleich der Gewichte gleicher Volumina auch wieder bei 0° Temperatur und beim Normalluftdruck genommen.

Nun bezeichnet aber das spezifische Gewicht bei festen und flüssigen Körpern wegen der Beziehung auf die Dichte des Wassers als Einheit zugleich nach dem metrischen Maß- und Gewichtssystem das Gewicht von 1 cm^3 derselben in Grammen bzw. das absolute Gewicht der Volumseinheit derselben bei 0° und beim Normalluftdruck. Es dürfte daher besser sein, auch für Gase diese Definition des spezifischen Gewichtes beizubehalten, wie dies bereits in der Tabelle des § 133 geschehen ist.

Demgemäß werden wir im folgenden mit spezifischem Gewicht der Gase bezeichnen das absolute Gewicht der Volumseinheit derselben, gemessen bei 0° und dem Normalluftdruck, oder das Gewicht von 1 cm^3 bei obiger Temperatur und obigem Druck in Grammen; mit relativer Dichte, bezogen auf Luft als Einheit, bezeichnen wir die Zahl, die angibt, um wievielmal kleiner oder größer die Masse eines bestimmten Volumens des betreffenden Gases ist als die eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft, beide gemessen bei 0° und dem Normalluftdruck; mit relativer Dichte, bezogen auf Wasserstoff als Einheit, bezeichnen wir das Verhältnis der Dichte des betreffenden Gases zu demjenigen des Wasserstoffs, beide wiederum bei 0° und dem Normalluftdruck gemessen.

Zur Orientierung sind in der umstehenden Tabelle für eine Reihe von Gasen ihre chemische Formel, das entsprechende Molekulargewicht, ihr spezifisches Gewicht, die relative Dichte, bezogen auf Luft als Einheit, und die relative Dichte, bezogen auf Wasserstoff als Einheit, zusammengestellt (größtenteils entnommen dem Lehrbuch der anorganischen Chemie von H. Erdmann). Man wird bemerken, daß die relative Dichte, bezogen auf Wasserstoff, mit dem Molekulargewicht sehr nahe übereinstimmt (Gesetz von Avogadro).

Die Tabelle setzt voraus, daß man den Ausdruck „Gas" im weitesten Sinne nehme, nämlich auch solche Körper einbeziehe, welche unter gewöhnlichen Druck- und Temperaturverhältnissen bereits in den tropfbarflüssigen Zustand übergehen, wie dies z. B. mit Wasserdampf der Fall ist. In diesem Falle hat die in der Tabelle aufgeführte Dichte nur eine theoretische Bedeutung, welche in der Wärmelehre näher erörtert werden soll. Ebendaselbst werden wir auch den Unterschied zwischen „Gas" und „Dampf", soweit derselbe noch festgehalten werden kann, besprechen. Im gewöhnlichen Sprachgebrauche versteht man unter Gas meist nur einen solchen Körper.

Name des Gases	Chem. Formel des Moleküls	Molekulargewicht	Spez. Gewicht 1000, also Gramme pro Liter	Relative Dichte	
				Luft 1	Wasserstoff = 1
Acetylen	C_2H_2	25,84	1,171	0,9056	26,02
Ammoniak	NH_3	16,93	0,775	0,599	17,22
Arsenwasserstoff	AsH_3	77,45	3,487	2,697	77,50
Brom	Br_2	158,68	7,144	5,524	159,04
Bromwasserstoff	HBr	80,34	3,617	2,797	80,38
Chlor	Cl_2	70,36	3,168	2,450	70,40
Chlorwasserstoff	HCl	36,18	1,641	1,269	36,46
Grubengas	CH_4	15,92	0,726	0,559	16,06
Jodwasserstoff	HJ	126,89	5,776	4,440	127,58
Kohlenoxyd	CO	27,80	1,246	0,9672	27,80
Kohlenoxysulfid	COS	59,63	2,722	2,104	60,48
Kohlensäure	CO_2	43,68	1,921	1,529	44,00
Phosphorwasserstoff	PH_3	33,75	1,523	1,178	33,84
Sauerstoff	O_2	31,76	1,4292	1,1056	31,75
Schweflige Säure	SO_2	63,59	2,898	2,260	64,44
Schwefelwasserstoff	H_2S	33,83	1,526	1,180	33,90
Siliciumfluorid	$SiFl_4$	103,74	4,655	3,580	104,02
Stickstoff	N_2	27,86	1,2507	0,967	27,78
Stickstoffoxyd	NO	29,81	1,343	1,039	29,86
Stickstoffoxydul	N_2O	43,74	1,978	1,530	44,95
Wasserdampf	H_2O	17,88	0,8040	0,6218	17,88
Wasserstoff	H_2	2,00	0,09001	0,06956	2,00
Atmosphärische Luft	—	—	1,29930	1,0000	28,73

der unter den gewöhnlich herrschenden Druck- und Temperaturverhältnissen noch nicht flüssig wird. Permanente Gase nannte man bis zu Ende des Jahres 1877 jene wenigen Gase, welche bis dahin noch nicht in tropfbarflüssigen Zustand übergeführt worden waren.

§ 149. Gewicht der Luft, Luftdruck. Schon sehr früh, ja selbst schon vor Aristoteles, vermutete man, daß auch die Luft schwer sei. Aristoteles nahm eine Blase und wog sie im leeren und im aufgeblasenen Zustande. Er fand letztere etwas schwerer und schloß daraus, daß die Luft schwer sei. Er hat hierbei aus einem fehlerhaften Versuche eine Tatsache abgeleitet, die an sich richtig ist.

Ptolemäus fand bei Wiederholung des Versuches umgekehrt die aufgeblasene Blase leichter. Erst Syriacus (im 4. Jahrh. n. Chr.) fand, daß kein Gewichtsunterschied stattfindet. Der Fehler bei Aristoteles kann durch Eindringen von Feuchtigkeit oder Überspannung, jener bei Ptolemaus durch Temperaturänderung erklärt werden. Der fehlerfrei angestellte Versuch kann keine Gewichtsdifferenz ergeben, weil der Auftrieb der Luft gleich ist ihrem Gewichte. Erst Galilei hat 1640 bewiesen und sein Schüler Torricelli später durch schöne Versuche bestätigt, daß auch die Luft schwer sei. Durch folgenden Versuch läßt sich die Schwere der Luft direkt nach-

gezeichnete Achse, die Hauptachse, rechtwinkelig auf der Ebene der drei anderen steht und ihnen ungleich ist. Bezeichnen wir mit 1 die Länge der horizontalen Nebenachsen, so ist für Bergkristall die Länge der Hauptachse 1,1, für Kalkspat aber 0,83. In dieses System gehören die regulären sechsseitigen Pyramiden (Fig. 16), welche in gleicher Weise als die Grundgestalt dieses Systems betrachtet werden können wie die Oktaeder der übrigen Systeme. Wenn die horizontalen Kanten dieser Pyramiden durch Flächen abgestumpft werden, welche mit der Hauptachse parallel sind, so entsteht die Kombination Fig. 17.

Die Abstumpfungsflächen der horizontalen Kanten bilden zusammen eine reguläre, sechsseitige Säule, welche in Fig. 18 mit der geraden Endfläche, d. h. mit einer Fläche kombiniert ist, welche rechtwinkelig auf der Hauptachse steht.

4. Das rhombische System mit drei zueinander rechtwinkeligen, aber ungleichen Achsen. Denken wir uns eine dieser Achsen vertikal gestellt, so liegen die beiden anderen in einer horizontalen Ebene, doch sind hier die beiden horizontalen Achsen nicht gleich wie beim quadratischen System.

Fig. 19.



Fig. 20.

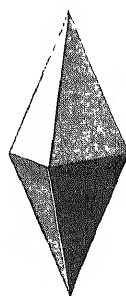


Fig. 19 stellt das Achsenkreuz des in dieses System gehörigen natürlichen Schwefels dar. Für dieses Mineral verhalten sich die Achsen *cd* : *ef* : *ab* wie 0,8 : 1 : 1,9. Fig. 20 stellt das rhombische Oktaeder dar, welches diesen Achsenverhältnissen entspricht.

An dem rhombischen Oktaeder, Fig. 20, sind nur immer je zwei diametral gegenüberliegende Ecken einander gleich, also das obere und untere, das vordere und hintere, das Eck rechts und das Eck links; wir haben also hier drei verschiedene Arten von Oktaederecken zu unterscheiden. Ebenso hat man am rhombischen Oktaeder dreierlei Kanten zu unterscheiden: die vier horizontalen Kanten, die vier Kanten, welche in der Ebene der vertikalen und der kleineren horizontalen Achse liegen, und endlich die Kanten, welche die vertikale Achse mit der größeren horizontalen verbinden.

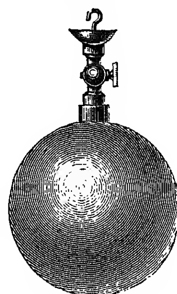
Werden die vier horizontalen Kanten des rhombischen Oktaeders durch Flächen abgestumpft, welche der Hauptachse parallel sind, so entsteht eine Kombination des rhombischen Oktaeders mit der geraden rhombischen Säule, Fig. 21. Die Gestalt des horizontalen Querschnittes, der Basis dieser Säule, hängt von dem Größenverhältnis der beiden horizontalen Achsen ab. In Fig. 22 stellt der Rhombus *cfde* die Basis der rhombischen Säule, wie sie den Achsenverhältnissen des Salpeters entspricht, unverkürzt dar.

Die größere Diagonale *ef* dieser Basis heißt die Makrodiagonale, die kleinere *cd* die Brachydiagonale.

Die vertikalen Kanten der rhombischen Säule sind einander nicht alle gleich: die vordere und hintere Kante der Säule, Fig. 21, welche durch die Makrodiagonale verbunden werden, sind spitzwinkelig, während die beiden Kanten rechts und links, welche rechtwinkelig auf den Enden der Brachydiagonale aufgesetzt erscheinen, stumpfwinkelige Kanten sind.

weisen: Auf den Hals eines Glasballons, Fig. 425, ist eine Messingfassung gekittet, die auf eine Luftpumpe (deren Einrichtung alsbald besprochen werden wird) aufgeschraubt werden kann. In dieser Fassung befindet sich ein Hahn, mittels dessen man den Ballon nach Belieben öffnen oder schließen kann. Ist der Ballon auf die Luftpumpe aufgeschraubt, so kann man ihn evakuieren und, nachdem der Hahn geschlossen worden ist, an den einen Arm einer Wage anhängen. Durch Auflegen von Gewicht auf der anderen Seite wird das Gleichgewicht hergestellt. Öffnet man nun den Hahn, so füllt sich der Ballon wieder mit Luft, das Gleichgewicht wird gestört, und die Wage neigt sich nach der Seite des Ballons hin. Auf der anderen Seite muß man von neuem Gewichte auflegen, um das Gleichgewicht wiederherzustellen, und zwar gerade so viel, als die Luft im Ballon wiegt. Für einen Ballon von 1 Liter Inhalt beträgt die Differenz der Gewichte ungefähr 1,2 g (bei 0^0 und dem Normalluftdruck, unter Voraussetzung, daß der Ballon ganz entleert worden, 1,293 g). 1 cbm Luft wiegt also ungefähr $1^1/_5$ kg. In einem Zimmer von 6 m Länge und Breite und 4 m Höhe sind demnach über 170 kg Luft enthalten.

Fig. 425.



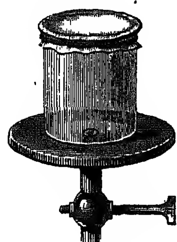
Würde man obigen Ballon schließlich noch mit Wasser statt mit Luft füllen und an die Wage hängen, so würde bei vorstehendem Volumen desselben gleich 1 Liter das Zulagegewicht auf der anderen Wagschale 1000 g zur Herstellung des Gleichgewichtes betragen müssen. Wenn also obiges Volumen Luft 1,293 g und dasselbe Volumen Wasser 1000 g wiegt, so ist das spezifische Gewicht der Luft:

$$\frac{1,293}{1000} = 0,001\,293.$$

In dieser Weise sind in der Tat die angeführten spezifischen Gewichte der Gase bestimmt worden, worauf wir der zu berücksichtigenden Druck- und Temperaturverhältnisse halber erst in der Wärmelehre näher werden eintreten können.

Nachdem gezeigt worden, daß auch die Gase wie die festen und flüssigen Körper schwer sind, d. h. von der Erde gegen ihren Mittelpunkt hin angezogen werden, so wird die die Erde umgebende Lufthülle, die Atmosphäre, gemäß den Betrachtungen des § 118, analog wie die teilweise Wasserhülle und die hypothetische feurigflüssige Erde, ebenfalls aus konzentrischen Niveauschichten mit dem Erdsphäroid bestehen, wo infolge des Druckes der oberen Schichten auf die unteren dieser Druck von außen gegen die Oberfläche der Erde hin von Schicht zu Schicht beständig zunimmt und damit auch die Dichtigkeit der Luft wächst. An der Erdoberfläche entsteht so ein erheblicher, dem Gewicht der ganzen Luftsäule bis zu den Grenzen der Atmosphäre entsprechender Druck, der in jeder Niveaufläche überall, also auch in den stets nur unvollkommen abgeschlossenen Räumen der Wohngebäude, derselbe ist. Von der Existenz dieses Druckes kann man sich z. B. durch folgenden Versuch überzeugen.

Fig. 426.



Man setze auf den Teller der Luftpumpe einen Glas- oder Metallzylin mit etwas dicken Wänden, welcher oben mit einer stark angespannten an dem Rande recht fest gebundenen Tierblase verschlossen ist. Die B erleidet von beiden Seiten gleichen Druck und bildet deshalb eine Eb Zieht man nun mittels der Luftpumpe die Luft aus dem Zylinder her so gewinnt der äußere Luftdruck das Übergewicht und drückt die Blase n innen, wie dies Fig. 426 darstellt. Je mehr man auspumpt, desto mehr nim die Krümmung der Blase zu, bis sie endlich in Stücke reißt, wobei heftiger Knall gehört wird. Dieser Knall wird durch das rasche Eindrin der Luft hervorgebracht.

§ 150. Erscheinungen, welche auf dem Luftdrucke beruhen. wollen hier zunächst noch einige Erscheinungen betrachten, welche sich du die Wirkung des Luftdrucks erklären lassen.

Taucht man das eine Ende einer Röhre in ein mit Wasser gefü Gefäß, so wird sich die Flüssigkeit in der Röhre, vorausgesetzt, daß dies

Fig. 427.

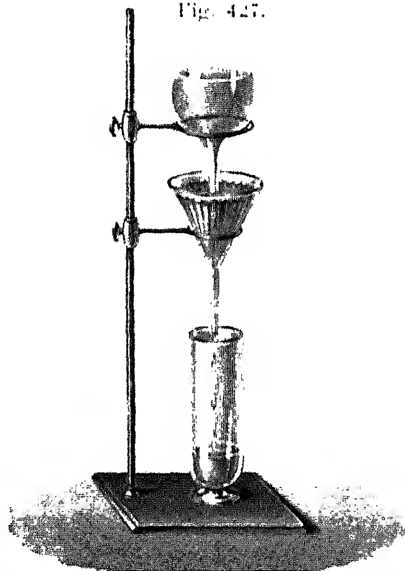
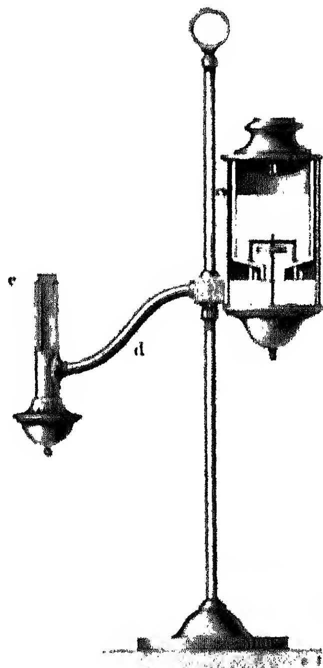


Fig. 428.



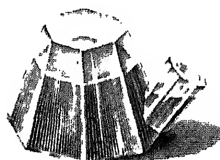
nicht zu eng ist, ebenso hoch stellen wie außerhalb, weil der Luftdruck in der Röhre gerade so auf das Niveau der Flüssigkeit wirkt wie außerhalb. Saugt man aber einen Teil der Luft aus der Röhre, so steigt die Flüssigkei ihr um so mehr, je länger man saugt. Durch dieses Saugen wird n lich der Luftdruck im Inneren der Röhre vermindert, während der au Luftdruck unverändert bleibt. Der Überschuß des äußeren Luftdrucks preßt die Flüssigkeit im Inneren der Röhre in die Höhe, bis das Gewicht gehobenen Wassersäule diesem Überschuß das Gleichgewicht hält.

Wenn man eine mit Wasser gefüllte, mit einem Kork geschlos Flasche umkehrt und den Hals in ein Becken mit Wasser taucht, so k man nun unter dem Wasser diesen Kork herausziehen, ohne daß das Wa

aus der Flasche ausfließt, weil es sozusagen durch den Luftdruck ge-
ragen wird.

Hebt man die Flasche langsam in die Höhe, bis die Mündung des Halses
über dem Spiegel des Wassers im Becken steht, so beginnt jetzt freilich das
Wasser auszulaufen, aber nicht etwa weil der Luftdruck zu wirken aufhörte,
ondern weil nun Luftblasen in die Flasche eindringen können. Darauf
gründen sich einige Vorrichtungen, um in Gefäßen,
aus welchen ein gleichförmiger Abfluß stattfindet,
tets ein nahezu unveränderliches Niveau zu erhalten,
wie dies z. B. bei dem Apparat Fig. 427 der Fall ist.
Durch das Filter des Trichters tropft beständig
Wasser in das untergesetzte Gefäß, infolgedessen sinkt
der Spiegel der Flüssigkeit im Trichter. Dieses Sinken
kann nur fortdauern, bis die untere Öffnung des in das
Wasser des Trichters eingetauchten und gleichfalls mit Wasser gefüllten
Ballons frei wird, denn nun dringt eine Luftblase in den Ballon ein, eine
hr entsprechende Quantität Wasser fließt aus, um die Öffnung des Ballons
wieder auf kurze Zeit zu schließen.

Fig. 429.



So kann aus dem unten offenen Ölgefäß *a* der Lampe, Fig. 428,
erst dann Öl ausfließen, wenn das äußere Niveau *bb* so weit gesunken ist,
daß die untere Öffnung des Ölgefäßes *a* für einen Augenblick frei wird.
Dahin gehört auch das Tintenfaß, Fig. 429. Aus dem Hauptgefäße kann

Fig. 430.



Fig. 431.

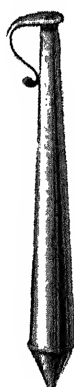
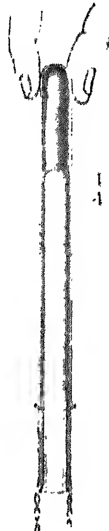


Fig. 432.



Fig. 433.



nur dann wieder etwas Tinte in das seitliche oben offene Ein-
tauchrohr eintreten, wenn in demselben die Flüssigkeit so
weit gesunken ist, daß eine Luftblase in das Hauptgefäß ein-
dringen kann.

Wenn man ein Trinkglas, dessen Rand möglichst eben ist (am besten
mit abgeschliffenem Rande), ganz mit Wasser füllt, ein Papierblatt darauf deckt
und dann das Glas rasch umkehrt, Fig. 430, so läuft das Wasser nicht aus;
der gegen die untere Fläche des Papiers wirkende Luftdruck hindert das
Herabfallen der Wassermasse. Das Papier ist nur deshalb nötig, um das
Glas umkehren zu können, ohne daß das Wasser an den Seiten ausläuft und
statt dessen Luft in das Gefäß eindringt. Das Papier kann auch durch ein

Sieb ersetzt werden. Wenn die untere Öffnung klein genug ist, um ein
ches Auslaufen nicht befürchten zu müssen, wie dies beim Stechheber
Fall ist, so ist das Papier nicht mehr nötig. Der Stechheber ist gewöhn
ein röhrenförmiges Gefäß, Fig. 431 und 432, welches oben und unten et
enger und an beiden Enden offen ist. Taucht man es, wenn beide Öffnun
frei sind, ganz in
Flüssigkeit, so füllt
sich mit derselben.
wenn man nun die ol
Öffnung mit dem Dau
verschließt, so kann
den Stechheber in
Höhe ziehen, ohne
die in demselben
haltene Flüssigkeit
läuft.

Fig. 434.

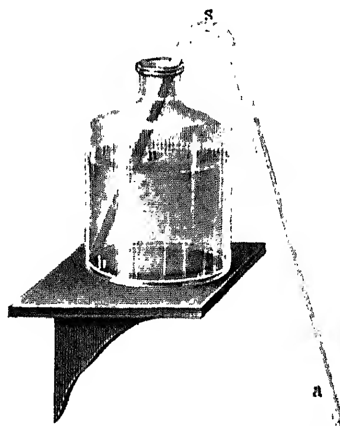
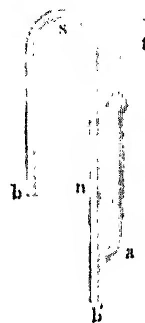


Fig. 435.



Ein hübscher Vers
ist auch der folge
Eine Proberöhre
mit Wasser gefüllt
eine etwas engere zw
Proberöhre einige Centimeter weit in die erstere hineingesteckt. Kehrt
dann das Ganze um, Fig. 433, so fließt das Wasser aus, während die in
Röhre, durch den Luftdruck gehoben, in die äußere hineingeschoben w

Der Heber ist eine gekrümmte Röhre *bsa*, Fig. 434, deren Sche
meistens ungleiche Längen haben. Wenn der eine Schenkel in eine Flüs
keit eingetaucht und die ganze Röhre mit derselben gefüllt ist, so läuft
am Ende *a* des anderen Schenkels, solange dasselbe tiefer liegt als
Niveau *n*, fortwährend aus; man kann also mit Hilfe eines Hebers leicht
Gefäß über den Rand hinweg entleeren. Die Wirkung des Hebers ist leich
erklären. Auf der einen Seite hat die Wassersäule *sa*, auf der anderen
Wassersäule von *s* bis zum Spiegel der Flüssigkeit im Gefäße ein Bestre
vermöge ihrer Schwere herabzufallen; der Schwere der in beiden Schen
befindlichen Wassersäulen wirkt aber auf beiden Seiten der Luftdruck entge
welcher auf der einen Seite gegen die Öffnung *a*, auf der anderen Seite
auf den Spiegel des Wassers im Gefäße wirkt und dadurch die Bildung
leeren Raumes im Inneren der Röhre verhindert, welcher sich notwendigerw
bei *s* bilden würde, wenn die Wassersäulen auf beiden Seiten herablie
Da der Luftdruck auf der einen Seite so stark wirkt wie auf der and
so würde vollkommenes Gleichgewicht stattfinden, wenn die Wassersäule
beiden Schenkeln gleich hoch wären, wenn sich also die Öffnung *a* in
Höhe des Wasserspiegels im Gefäße befände; sobald aber *a* tiefer liegt, er
die Wassersäule im Schenkel *sa* das Übergewicht, und in dem Maße, als
das Wasser ausläuft, wird auf der anderen Seite durch den Luftdruck
neuem Wasser in die Röhre hineingetrieben, so daß das Ausfließen b
fortdauert, bis der Spiegel der Flüssigkeit im Gefäße so weit gefallen ist,
die Öffnung bei *b* frei wird.

Es ist also nicht der Luftdruck, welcher das Wasser zum fließen bri
er bewirkt nur, daß sich die Wassersäulen nicht an dem Scheitel des He

nnen; die Bewegung des Wassers erfolgt durch den hydrostatischen Über-
ck auf der Ausflußseite.

Um den Heber bequem füllen und in Wirksamkeit setzen zu können,
d manchmal eine Saugröhre *a t*, Fig. 435, angebracht (Giftheber). Einen
wöhnlichen Heber füllt man nämlich dadurch, daß man bei *a*, Fig. 534,
gt; dabei ist aber leicht möglich, daß man etwas von der Flüssigkeit in
Mund bekommt, was in manchen Fällen unangenehm, oft sogar gefähr-
sein kann, wie z. B. wenn man den Heber anwenden will, um ein Gefäß
Schwefelsäure zu entleeren. In einem solchen Falle ist das Saugrohr
ntbehrlich; denn wenn man die Röhre bei *b'*, Fig. 435, verschließt, so
n man durch Saugen bei *t* den ganzen Schenkel *s b* füllen, ohne daß die
ssigkeit an den Mund kommt. Das Auslaufen beginnt alsdann, sobald
n das Röhrenende *b'* wieder öffnet.

Eine auf die Wirkung des Hebers gegründete Spielerei ist der Vexier-
cher (Tantalusbecher), Fig. 436, der sich durch den Boden entleert,
ald er ganz gefüllt wird.

Daß beim Heber wirklich der Luftdruck die eben bezeichnete Rolle
lt, läßt sich mit Hilfe des einfachen Apparates Fig. 437 zeigen. Der
s eines zum Teil mit Wasser gefüllten Glasballons ist mit einem wohl-

Fig. 436.

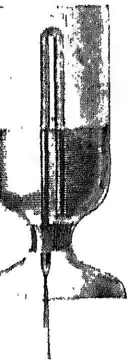


Fig. 437.

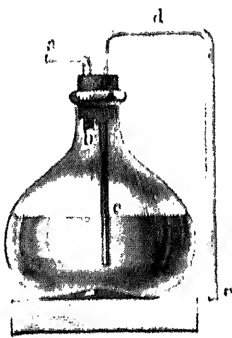
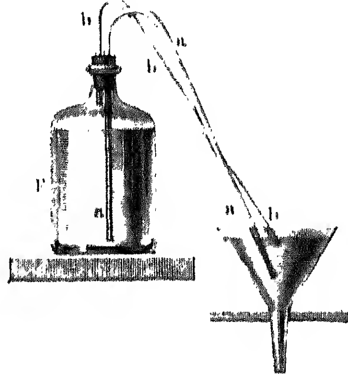


Fig. 438.



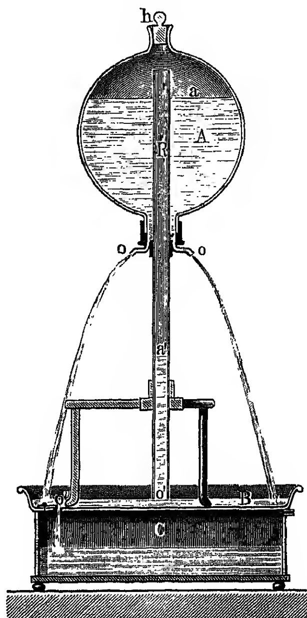
ließenden Kork verschlossen, welcher doppelt durchbohrt ist. In dem
en Loche steckt das kurze Röhrchen *a b*, im anderen der fast bis auf den
len reichende Heber *c d e*. Wenn man den Heber durch Einblasen bei *a*
n Fließen gebracht hat, so hört dieses Fließen alsbald auf, sobald man auf
end eine Weise die Öffnung bei *a* verschließt, weil nun der Überdruck
Flüssigkeit durch den entgegengesetzt wirkenden Überdruck der Luft
npensiert wird.

Durch den Heber *a*, Fig. 438, kann nur so lange Wasser aus der Flasche
fließen, als der obere Teil derselben durch das Rohr *b* mit der äußeren
ft in Verbindung steht. Wenn das aus *a* ausfließende Wasser auf ein
ter gelangt, durch welches es nur tropfenweise abfließt, so wird das Niveau
Wassers im Trichter bald steigen, bis die freie Öffnung von *b* verschlossen
Nun hört der Heber *a* zu fließen auf und fängt erst wieder zu fließen
, wenn so viel Wasser durch das Filter abgeflossen ist, daß das untere
de des Rohres *b* nicht mehr in das Wasser des Trichters eintaucht. Die

Vorrichtung erfüllt also denselben Zweck wie jene der Fig. 427. Auf demselben Prinzip beruht der intermittierende Brunnen, der, obwohl ein Spielzeug, doch zugleich ein recht instruktiver Apparat ist.

Die Fig. 439, welche einen Vertikalschnitt durch einen solchen darstellt, läßt als Bestandteile ersehen: das mit Wasser gefüllte Reservoir A, in welches die weite, oben und unten offene Glasröhre R hineinreicht, die Ausflußöffnungen o, o, die Schale B, welche das aus o, o ausfließende Wasser zuerst aufnimmt, aber allmählich durch die mittels Schieber s regulierbare Öffnung o'' in das Gefäß C abfließen läßt. Der Apparat wird entweder nach Verschließen von $o . o$ bei h mit Wasser gefüllt, oder auch nach Umkehren des ganzen oberen Teiles durch die Öffnung o', wobei dann die Tubulatur h entbehrlich ist. Indem dann bei o, o Wasser ausströmt, wird zunächst Luft bei o' in den Raum oberhalb des Wasserspiegels a eingesaugt. Sperrt aber das ausgeflossene Wasser der Schale B die Öffnung o', so kann keine Luft mehr eindringen, es wird dann eine Wassersäule $o'a'$ gehoben, welche jener zwischen o in a das Gleichgewicht hält. Der Brunnen hört daher auf zu fließen. Nach einigen Sekunden ist aber so viel Wasser aus B durch o'' nach C geflossen, daß die Öffnung o' frei wird, es dringen Luftblasen ein, die Säule $o'a'$ sinkt, und der Ausfluß bei o, o beginnt von neuem und dauert an, bis die Öffnung o' wieder durch das Wasser versperrt wird. Durch Regulierung der Öffnung o'' kann die Zeit der Intermittenz verändert werden.

Fig. 439.



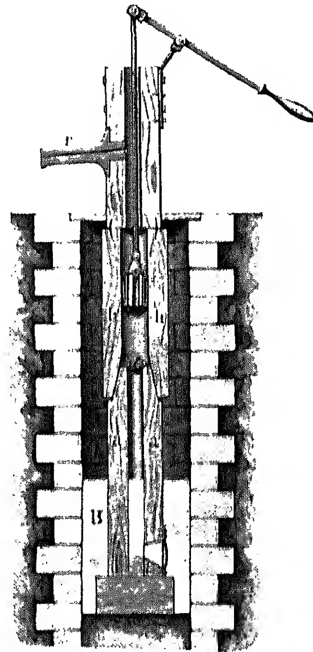
§ 151. **Wasserpumpen.** Wir haben bereits im vorigen Paragraphen gesehen, wie man in einer Röhre, deren unteres Ende in Wasser getaucht ist, dasselbe dadurch in die Höhe steigen macht, daß man an dem oberen Ende saugt. Den luftverdünnten Raum, welcher in diesem Falle durch den Mund erzeugt wurde, kann man aber auch dadurch hervorbringen, daß man in dem Rohre einen luftdicht schließenden Kolben emporzieht. Ist das untere Ende des Rohres in Wasser eingetaucht, so füllt sich das Rohr mit dieser Flüssigkeit, wie sich dies an den gewöhnlichen Spritzbüchsen zeigen läßt.

Dies Prinzip wird nun auch bei Pumpen zur Hebung bedeutenderer Wassermengen angewandt. Fig. 440 stellt eine Saugpumpe der einfachsten Konstruktion dar. Das hölzerne Saugrohr a steht in dem Brunnenschacht, und zwar geht es bis unter den Spiegel des in der Tiefe sich sammelnden Wassers B hinab. Das Wasser kann durch eine seitliche Öffnung, welche zur Abhaltung von Unreinigkeiten durch ein Sieb verschlossen ist, in das Saugrohr eintreten. Auf das nach den Umständen kürzere oder längere, aus einem oder mehreren Stücken bestehende Saugrohr ist nun das etwas weitere

aufgesetzt, in welchem ein Kolben luft- und wasserdicht schließend auf und ab bewegt werden kann.

Das obere Ende des Saugrohres *a* ist durch ein Ventil (hier eine in der Mitte mit Metall beschlagene Lederklappe) bedeckt, welches durch einen Druck von unten gehoben, also geöffnet, durch einen Druck von oben aber fest auf die Öffnung aufgedrückt, also geschlossen wird. Dieses Ventil bildet gewissermaßen den Boden des Kolbenrohres *b* und wird deshalb das Bodenventil genannt.

Fig. 440.



Der im Kolbenrohre befindliche Kolben ist an einer eisernen Stange befestigt, welche durch eine passende Hebelvorrichtung bewegt werden kann; dieser Kolben ist selbst wieder hohl und das obere Ende dieser Hohlung mit einem Ventil in gleicher Weise versehen wie das obere Ende des Saugrohres, so daß es durch einen Druck von oben geschlossen, durch einen Druck von unten geöffnet wird.

Der Umfang dieses Kolbens ist durch eine Lederkappe gebildet, welche unten um den hölzernen Kolben herum festgenagelt ist, oben aber frei von demselben absteht, so daß die Lederkappe, wenn sich einmal Wasser über dem Kolben befindet, fest gegen die Rohrenwände angepreßt und dadurch ein guter Schluß erhalten wird.

Wenn der eben am unteren Ende des Kolbenrohres befindliche Kolben in die Höhe gezogen wird, so wirkt er wie ein massiver Kolben, weil sich das Kolbenventil schließt, und es bildet sich unter demselben ein luftverdünnter Raum; das Bodenventil öffnet sich, und das Wasser steigt in dem Saugrohre in die Höhe. Beim Niedergange des Kolbens schließt sich zunächst das Bodenventil, wodurch das Zurückfallen des im Saugrohre gestiegenen Wassers verhindert wird, das Kolbenventil aber öffnet sich und läßt die noch im Kolbenrohre befindliche Luft durch.

Erst nach mehrmaliger Wiederholung der Operation, wenn das Wasser bis in das Kolbenrohr gestiegen ist, beginnt die Pumpe wirklich Wasser zu fördern. Bei jedem Niedergange wird dann das im Kolbenrohre befindliche Wasser, welchem nun durch das Bodenventil der Rückweg verschlossen ist, durch den Kolben hindurchgehen; bei jedem Aufziehen des Kolbens wird das bereits über demselben befindliche Wasser aus dem Kolbenrohre in das Steigrohr gehoben, aus welchem es dann durch die seitliche Öffnung *r* abfließt, während zugleich eine neue Wassermenge von unten her in das Kolbenrohr aufgesaugt wird.

Bei volkommen luftdichtem Schluß des Kolbens und der Ventile würde man bei mittlerem Luftdruck das Wasser bis zu 10 m aufsaugen können; bei der geringen Vollkommenheit jedoch, mit welcher solche Pumpen aus-

geführt sind, darf das Bodenventil nicht wohl mehr als 6 m über dem Was
spiegel im Bassin angebracht sein.

Um das Wasser auf größere Höhen zu heben, um es in Dampfke hineinzupressen usw., werden **Druckpumpen** angewandt, welche sich den vorigen *dadurch* unterschei daß der Kolben massiv ist und das aufgesaugte Wasser durch seitliches Rohr in die Höhe drückt wird, dessen unteres E durch ein nach oben sich öffnen Ventil geschlossen wird. Fig. stellt eine Druckpumpe dar; *h* das Saugrohr, *r* das Kolb rohr, *s* das Steigrohr.

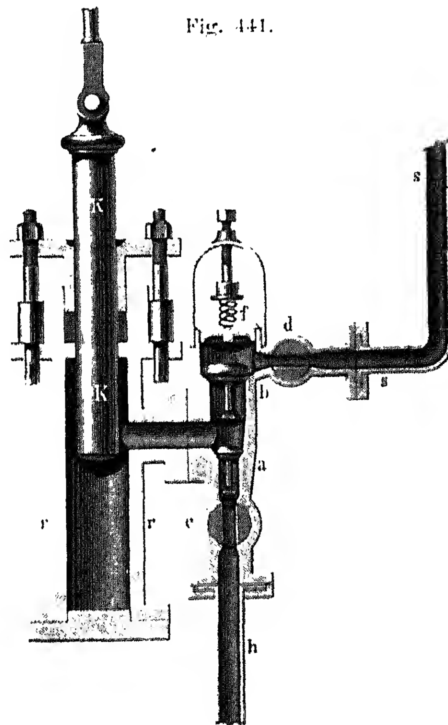


Fig. 441.

Der Kolben *k* geht luftd durch die Stopfbuchse, welche obere Ende des Kolbenrohres schl Beim Aufgange des Kolbens sich das Saugventil *a*, um Wa aus dem Saugrohr durchzulas während das Druckventil *b* schlossen bleibt; beim Niedergan des Kolbens schließt sich *a*, das vorher aufgesaugte Wasser nun durch das geöffnete Ventil das Steigrohr *s* gepreßt.

Bei *d* und *e* sind Hähne an bracht, die man abstellen kann, w die Pumpe nicht mehr arbeiten

Der Deckel *f* kann entfernt werden, wenn man die Ventile nachs will. Er ist durch eine starke Drahtfeder aufgedrückt, so daß er geh wird, wenn der Druck zu stark werden sollte, wie es z. B. erfolgen k wenn das Steigrohr sich verstopft hat oder der Hahn *d* geschlossen bl während *e* offen ist und die Ventile spielen. Der Deckel *f* dient als diesem Falle als Sicherheitsventil, indem durch sein Heben das Bersten Röhrenwände verhindert wird.

§ 152. Torricellis Versuch. Barometer. Als zur Zeit Gali die Pumpenmacher in Florenz in einem Saugrohre das Wasser über heben wollten, sahen sie zu ihrem größten Erstaunen, daß es nicht h stieg. Damals erklärte man das Aufsteigen von Flüssigkeiten, indem sagte, die Natur habe einen horror vacui, d. h. eine Scheu vor dem Lee

Aus obiger Tatsache schloß Galilei, daß es nicht ein „horror vac sondern eine Kraft von beschränkter Größe sein müsse, die das Aufste des Wassers in der Saugröhre der Wasserpumpen bedinge. Indessen hat sein Schüler **Torricelli** in einem Briefe an Ricci vom Juni 1644 wahre Ursache dieser Erscheinung und des Ende 1643 auf seine Anreg hin von seinem Freunde **Viviani** gemachten Experimentes mit Quecks den Druck der Luft erkannt, welchem eben jene Flüssigkeitssäulen das Gl

gewicht halten. Dieses entscheidende Experiment Vivianis bestand aber darin, daß derselbe auf den Rat Torricellis eine ungefähr zwei Ellen (120 cm) lange Glasröhre mit angeblasener Kugel am einen Ende vom anderen offenen Ende aus ganz mit Quecksilber füllte, sie dann mit dem Finger verschloß, umkehrte und mit diesem Ende in ein flaches, mit Quecksilber gefülltes Gefäß eintauchte. Nach Wegziehen des Fingers fiel dann das Quecksilber im vertikal gestellten Rohre bis zur Höhe von ungefähr $1^1/_4$ Elle (75 cm) über dem Niveau des Quecksilbers im Gefäß zurück, über sich in der Röhre einen leeren Raum zurücklassend. Nach Torricelli hielt also diese Quecksilbersäule von 75 cm Höhe dem Druck der Luft auf die freie Quecksilberoberfläche im Gefäß das Gleichgewicht.

Fig. 442.

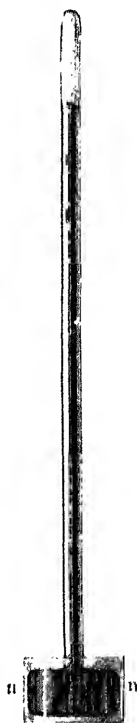


Fig. 443.

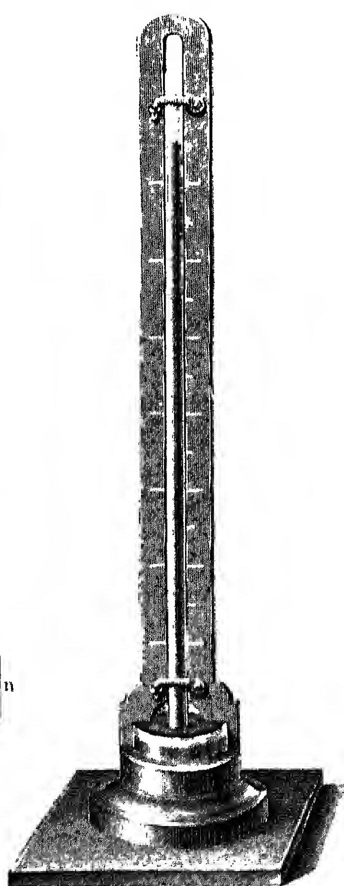


Fig. 442 stellt eine solche einfache Torricellische Röhre mit dem Quecksilbergefäß *n n* dar; den leeren Raum in der Röhre oberhalb des Quecksilbers nennt man ihm zu Ehren die Torricellische Leere. Indem Torricelli an der Röhre eine Skala anbrachte und den Stand des Quecksilbers im Rohre an diesem beobachtete, erkannte er, daß der Luftdruck am gleichen Orte nicht immer derselbe sei, also sein Instrument auch die Schwankungen des Luftdruckes angebe. Da er den Druck der Luft an der Erdoberfläche aus dem Gewicht der ganzen Luftsäule bis zu den Grenzen der Atmosphäre erklärte, so schloß er auch bereits daraus, daß der Luftdruck auf hohen Bergen geringer sein müsse, also das Quecksilber in seinem Instrument dort eine kleinere Höhe zeigen werde. Dies hat einige Jahre später Perrier auf Anregung von Pascal wirklich am Puy-de-Dôme nachgewiesen, indem er fand, daß am Fuße dieses Berges das Quecksilber in der Torricellischen Röhre um 85 mm höher stand als auf dem 975 m darüber sich erhebenden Gipfel. In England beschäftigte sich besonders Boyle (um 1660) mit Verbesserungen des Torricellischen Instrumentes zu Luftdruckmessungen und gab ihm auch statt des bis dahin gebräuchlichen Namens: Torricellische Röhre den passenderen: Barometer, der bald allgemein Eingang fand.

Fig. 443 zeigt ein Barometer mit Skala zur Ablesung des Quecksilberstandes in seiner einfachsten Gestalt (Standbarometer); den vertikalen Abstand des Quecksilberniveaus in der Röhre vom Niveau desselben im Gefäß heißt

man kurz die Barometerhöhe oder den Barometerstand. Dieser nach den Gesetzen der kommunizierenden Röhren durchaus unabhängig der Form der Röhre und des Gefäßes, bzw. des zweiten offenen Schen einer Röhre.

§ 153. Messung des Luftdruckes, Normalluftdruck, Drucke heiten. Schon oben wurde bemerkt, daß der Barometerstand veränd lich sei. Am Ufer des Meeres beträgt derselbe durchschnittlich in run Zahl 76 cm.

Der Gesamtdruck[1] p einer Quecksilbersäule von der Höhe h auf Fläche q ist gegeben durch:

$$p = q \cdot h \cdot s,$$

worin s das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet, welches bei 13,5959 beträgt.

Der Druck auf den Quadratcentimeter berechnet sich demnach

$$p_0 = 76 \cdot 13{,}5959 = 1033{,}3 \text{ Gramm} = 1{,}0333 \text{ Kilogrammgewicht}$$

Dieser Druck wird deshalb Atmosphärendruck genannt, und bedient sich desselben vielfach als Einheit, um Drucke oder Spannkräfte Gasen oder Dämpfen zu messen. Wenn man also sagt, ein Dampfkessel bis zu 10 Atmosphären gespannt, so ist damit gesagt, daß der darin haltene Dampf auf je 1 Quadratcentimeter der Kesselfläche einen Druck übe gleich dem Gewichte von 10 . 333 kg.

Der Druck der Luft und ebenso der irgend eine abgesperrten Ga oder Dampfes kann demnach auf zweierlei Weise gemessen werden. Ein durch die Höhe einer Quecksilbersäule (kleine Drucke durch die Höhe ei Wassersäule), welche dem zu messenden Drucke das Gleichgewicht hält, d durch die Kraft, welche infolge dieses Druckes auf die Flächeneinheit (1 c ausgeübt wird, wobei diese Kraft wiederum entweder nach dem Gravitatio maßsystem durch das Gewicht (Kilogramm und Gramm) oder nach dem solutem Maßsystem nach Dynen (Megadynen) ausgedrückt wird.

Da die Erde eine Quecksilbersäule wie alle Massen an verschiede Orten mit verschiedener Kraft anzieht, so entspricht gleichen Quecksil säulen nicht überall ein gleicher Luftdruck. Man reduziert daher die be achtete Höhe der Quecksilbersäule auf jene Höhe, welche sie bei gleich Luftdrucke an einem Orte von der geographischen Breite 45° in Meereshö hätte. Ist g die Acceleration der Schwere an dem Beobachtungsorte, wo Quecksilbersäule h gemessen wurde, und g_{45} die Acceleration der Schw unter 45° in Meereshöhe, so ist der reduzierte Luftdruck $h \frac{g}{g_{45}}$

Für g_{45} hat das internationale Maß- und Gewichtskomitee die Z 980,665 cm sec angenommen, was mit der neuesten von Helmert gefunde Zahl 980,612 nahe übereinstimmt.

Der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° Tempera in Meereshöhe unter 45° Breite wird als Normalluftdruck bezeichnet.

---

[1] Unter „Gesamtdruck auf eine Fläche" verstehen wir die auf die ga Fläche ausgeübte Kraft. Unter „Druck" wird bei Flüssigkeiten und Gasen die die Fläche Eins ausgeübte Kraft verstanden. Siehe § 117.

Achsen zur Hauptachse nehmen; für eine Mineralspezies aber oder für ein Salz, welches in diesem System kristallisiert, wählt man diejenige Achse zur Hauptachse, parallel welcher die Kristalle vorzugsweise säulenartig ausgedehnt sind.

Durch Abstumpfung zweier diametral gegenüberstehenden Kanten der rhombischen Säule entsteht eine sechsseitige Säule. So erscheinen an der

Fig. 21.

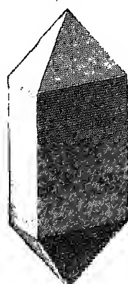


Fig. 22.

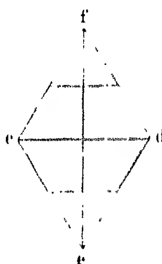
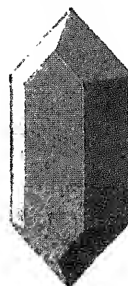


Fig. 23.



rhombischen Säule des Salpeters meist die scharfen Kanten abgestumpft, Fig. 23, wodurch eine sechsseitige Säule entsteht, deren horizontale Basis in Fig. 22 durch Schraffierung angedeutet ist.

Fig. 24 stellt den gewöhnlichen Habitus der Salpeterkristalle dar; es ist eine Kombination der eben besprochenen sechsseitigen Säule mit mehreren

Fig. 24.

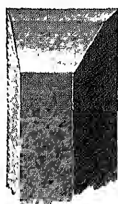
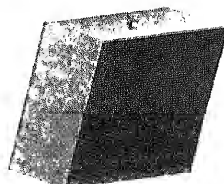


Fig. 25



Fig. 26.



Flächen, die parallel mit der Achse *cd* laufen und verschiedene Neigung gegen die Hauptachse haben. Die Oktaederflächen sind bei den Salpeterkristallen meist gänzlich verschwunden.

Das rhombische System ist also dadurch ausgezeichnet, daß sich in vertikaler Richtung andere Symmetrieverhältnisse zeigen als von vorn nach hinten, und in dieser Richtung wieder andere als von der Linken zur Rechten.

Außer den schon genannten Körpern kristallisieren u. a. im rhombischen System: Zinkvitriol, schwefelsaures Kali, Aragonit, Schwerspat, Topas usw.

5. Das monoklinische System, in welchem u. a. der Gips, das Glaubersalz, der Eisenvitriol, das essigsaure Natron, der Zucker usw. kristallisieren, zeichnet sich vor dem rhombischen System dadurch aus, daß zwei Achsen sich nicht unter rechtem Winkel schneiden, während die dritte rechtwinkelig auf der Ebene der beiden schiefwinkeligen steht.

Fig. 25 stellt ein in dieses System gehöriges Achsenkreuz dar: die Achse *ef* steht rechtwinkelig auf der Ebene der beiden anderen, dagegen schneiden sich die Achsen *ab* und *cd* nicht unter rechtem Winkel.

Unter Zugrundelegung des spezifischen Gewichtes des Quecksilbers = 13,59593 erhält man diesen Druck als Gewicht auf 1 qcm gleich dem Gewicht von 1,0333 kg. Diese dem Gravitationsmaßsystem angehörige Druckeinheit enthält mehrere Willkürlichkeiten. Einmal die Wahl der abgerundeten Zahl 760 mm, welche keineswegs genau mit dem Mittel der Druckhöhen am Ufer des Meeres übereinstimmt; dann die Wahl des Quecksilbers, während sonst der Massen- und Gewichtseinheit das Wasser zugrunde gelegt wird, endlich die willkürliche Festsetzung der Breite 45° bzw. eines Wertes der Acceleration, wie er in dieser Breite beobachtet wurde.

Von diesen Willkürlichkeiten frei ist das absolute Maß des Druckes. Ein Druck von 1000000 Dynen auf das Quadratcentimeter $= 1 \frac{\text{Megadyne}}{\text{cm}^2}$ würde einer Quecksilbersäule von 75,005 cm Höhe entsprechen. Auf dem physikalischen Kongresse in Paris 1900 wurde beschlossen, diese auf 75 cm abgerundete, mit $1 \frac{\text{Megadyne}}{\text{cm}^2}$ innerhalb der Beobachtungsfehler übereinstimmende absolute Druckeinheit unter dem Namen Megabarie, die dem (CGS)-System entsprechende, eine Millionmal kleinere Druckeinheit $\frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2}$ mit Barie zu bezeichnen[1]).

§ 154. Konstruktion eines guten Barometers. Wegen der großen Bedeutung des Barometers für die exakten Naturwissenschaften und für die Technik erscheint es geboten, bevor wir auf die speziellen Konstruktionsformen desselben eingehen, die allgemeinen prinzipiellen Forderungen, welche zur Erzielung einer befriedigenden Genauigkeit an jede Art von Barometer zu stellen sind, näher kennen zu lernen. Obwohl für die meisten Verwendungen dieses Instrumentes eine Genauigkeit von 0,1 mm ausreichend ist, so muß bei den einzelnen Fehlerquellen schon auf eine Fehlergrenze von 0,01 mm Bedacht genommen werden, damit durch das Zusammentreffen der Fehler nicht ein noch größerer Gesamtfehler entstehen kann.

1. Reinheit des Quecksilbers.

Da eine Verminderung des spezifischen Gewichtes des Quecksilbers von 13,5959 auf 13,5957 (eine Vermehrung ist kaum zu befürchten) bereits genügt, um den Barometerstand von 760 mm um 0,01 mm zu hoch werden zu lassen, so ist auf die Reinheit des Quecksilbers sehr zu achten. Es ist dies auch aus dem Grunde nötig, weil unreines, Oxyd oder fremde Metalle enthaltendes Quecksilber am Glase haftet und die Röhrenwände beschmutzt.

Das Quecksilber des Handels ist aber selten rein genug, es muß daher erst gereinigt werden.

Von Staub und Schmutz, sowie von der größten Menge von Oxyd befreit man das Quecksilber, indem man es durch Filter von Fließpapier laufen läßt, deren Spitze mit einer Nadel durchstochen wurde. Viel besser wirkt jedoch Durchpressen durch Leder.

---

[1]) Diese Druckeinheit ist für die Rechnungen in der Elastizitätslehre usw. bequem.

Recht bequem läßt sich dies mittels einer einfachen, vom Verfasser konstruierten Vorrichtung erreichen, bei welcher das Quecksilber infolge seines eigenen Druckes durch das Leder getrieben wird. Fig. 444 zeigt die Anordnung des ganzen Apparates samt Gestell, Fig. 444a einen Vertikaldurch-

Fig. 444.

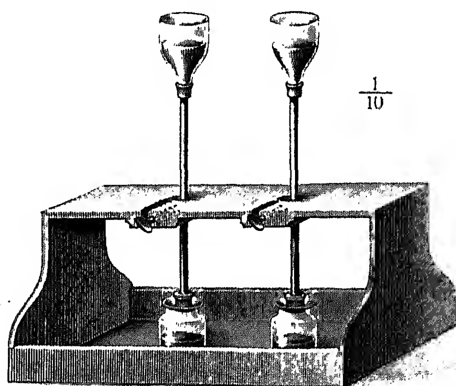
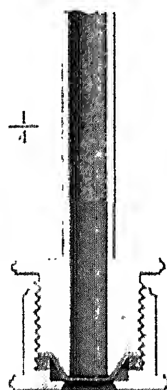


Fig. 444a.



schnitt durch den unteren Teil der Filtrierapparate, deren zwei nebeneinander aufgestellt sind. Ein Scheibchen weichen sämisch gegerbten Leders wird mittels einer Überwurfschraube über die Mündung der Vertikalrohre fest angespannt. Gießt man das Quecksilber in den Trichter, so beginnt es, sobald die drückende Säule ungefähr 20 cm überschritten hat, in feinem Regen durch das Leder zu träufeln, während Schmutz und Staub zurückgehalten werden. Man entfernt die größte Menge der Unreinigkeiten durch die erste Röhre und gießt dann, wenn nötig, nochmals durch die zweite. Man kann dann dieselben Lederscheibchen oftmals benutzen.

Enthält das Quecksilber fremde Metalle oder viel Oxyd, so genügt dieses Verfahren nicht, es muß vielmehr entweder auf chemischem Wege oder durch Destillation gereinigt werden.

Das erstere geschieht nach verschiedenen Methoden, indem man das Quecksilber in fein verteiltem Zustande entweder mit verdünnter Salpetersäure, oder mit verdünnter Eisenchloridlösung, oder endlich mit einer Lösung von 5 g doppeltchromsaurem Kali auf 1 Liter Wasser, welcher einige Cubikcentimeter Schwefelsäure beigemischt sind, in Berührung bringt. Man schüttelt das Quecksilber anhaltend mit diesen Flüssigkeiten oder läßt es aus Trichtern mit feiner Öffnung in dünnem Strahle durch hohe Schichten der Flüssigkeiten hindurchrinnen [1]). Die Fig. 445 zeigt eine hierzu geeignete Anordnung. Bei Anwendung des chromsauren Salzes ist das Schütteln vorzuziehen; dasselbe ist so lange fortzusetzen, bis das anfänglich entstehende rote Quecksilberchromat verschwunden ist und die wässerige Lösung durch das gebildete Chromsulfat rein grün gefärbt erscheint. Auf jeden Fall ist sodann das Quecksilber mit ausgekochtem, destilliertem Wasser vollkommen

[1]) L. Meyer, Anal. Zeitschrift 2, 241.

zu waschen und zuletzt unter dem Rezipienten der Luftpumpe über einem Gefäße mit konzentrierter Schwefelsäure zu trocknen [1]).

Sicherer führt Destillation zum Ziele. Sie geschieht entweder aus eisernen Flaschen mit eingeschraubter eiserner Destillierröhre, welche man in kaltes Wasser münden läßt, oder viel besser im luftleeren Raume mittels eines von

Fig. 445.

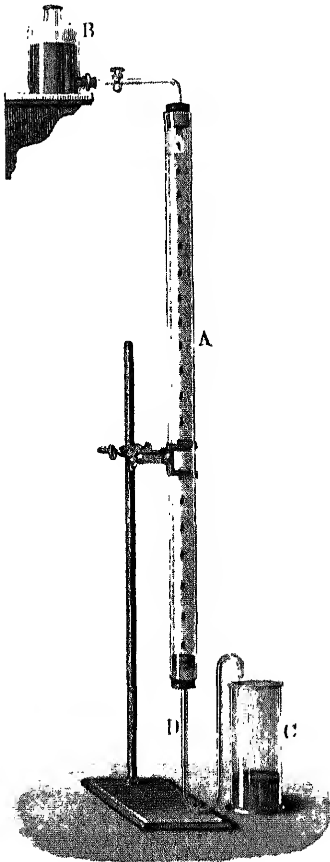
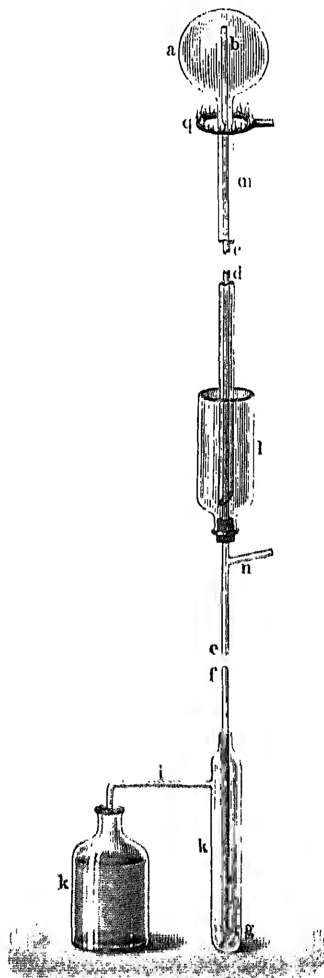


Fig. 446.



A. Weinhold [2]) erfundenen Apparates. Der Hauptvorteil dabei ist, daß sofort trockenes oxydfreies Quecksilber erhalten wird.

Die Fig. 446 zeigt die wesentlichsten Teile des Weinholdschen [3]) Apparates. Durch den tubulierten Boden eines Glasgefäßes l geht quecksilberdicht eine oben und unten offene Glasröhre bc — de — fg von nahe 2 m Länge hindurch, die bei n eine seitliche, mit einer Sprengelschen Queck-

[1]) Eine Modifikation der von Ulex angegebenen Reinigung mit verdünnter Eisenchloridlösung, die recht gute Resultate liefert (spezifisches Gewicht des Quecksilbers nahe 13,5958), findet man in v. Wilds Artikel: „Methode zur Füllung von Barometerröhren“ (Repert. f. Meteorologie 2, 119) angegeben.

[2]) Carls Repert. 15.

[3]) Carls Repertorium für Experimentalphysik 9, 69.

silberluftpumpe (siehe unten) verbundene Ansatzrohre besitzt [1]). Über das untere Ende *g* der Röhre ist das Gefäß *k*, mit seitlicher Ausflußröhre *i*, etwas unterhalb seiner oberen Öffnung, geschoben, welches mit reinem Quecksilber gefüllt wird.

Das obere Ende *b* der Röhre mündet in den oberen Teil der Glaskugel *a* aus, welche an der über die erstere geschobenen, weiteren Glasröhre *m* angeschmolzen oder angeblasen ist. Das untere Ende der letzteren ist schief abgeschnitten und stützt sich auf den Boden des Gefäßes *l* auf, welches mit dem zu reinigenden Quecksilber gefüllt wird. Das obere Ende der Röhre *m* endlich wird von einem ringförmigen Gasbrenner *q* umgeben, mittels dessen man den unteren Teil der Kugel *a* erwärmen kann. Sowie man mit der Sprengelschen Pumpe die Luft in der unten im Gefäß *g* durch Quecksilber abgesperrten Röhre und weiterhin in dem in ihr und weiterhin in der Kugel *a* und der Röhre *m* enthaltenen Raum, der am unteren Ende dieser ebenfalls durch Quecksilber verschlossen ist, verdünnt, so steigt das Quecksilber in der letzteren und ebenso in *gf* empor, um nach nahe vollständiger Evakuierung durch die Pumpe in *gfe* bis zur Barometerhöhe über dem Quecksilberniveau im Gefäß *k* und über dem Quecksilberniveau in *l* bis in die untere Hälfte der Kugel *a* hinein gehoben zu sein. Zündet man den Brenner *q* an, unter passender Regulierung seiner Wärmewirkung, durch ein zwischengesetztes Drahtgitter, eventuell durch einen Gasdruck- und Temperaturregulator, so wird das Quecksilber in dem nahe luftleeren Raume schon bei verhältnismäßig niedriger Temperatur [2]) in die Röhre *b* hineindestillieren und als rein im Gefäß *k* unten bzw. in der unter die Öffnung des Seitenrohres *i* untergestellten Flasche *K* sich ansammeln. Um nicht beständig in das Gefäß *l* unreines Quecksilber successive zugießen zu müssen, wird die untere Öffnung der Ansatzröhre eines mit diesem gefüllten und umgestürzten seitlich aufgestellten Ballons in das Quecksilber des Gefäßes eingetaucht, so daß beim Sinken des Niveaus unter diese von selbst aus dem Ballon Quecksilber wieder zufließt.

2. Über dem Quecksilber muß ein vollkommen trockener und luftfreier leerer Raum sein.

Um die an den Rohrenwandungen des Barometerrohres anhaftenden Spuren von Luft und Wasserdampf vollständig zu entfernen, muß das Quecksilber im Rohr selbst ausgekocht werden. Diese etwas mißliche Operation kann auf folgende Weise geschehen:

Man füllt ein Drittel der Röhrenlänge mit Quecksilber an und kocht es in schiefer Lage seiner ganzen Ausdehnung nach über einem Kohlenfeuer oder besser über einer großen Gasflamme; alsdann gießt man eine neue Portion Quecksilber zu, welches aber etwas warm sein muß, damit die Röhre nicht springt, und kocht die neu hinzugegossene Quecksilbersäule auf dieselbe Weise, und so fort, bis man fast die ganze Röhre auf diese Weise behandelt hat, und gießt zuletzt noch etwas heißes Quecksilber auf, um die Röhre voll-

---

[1]) Im Notfalle tut es auch eine andere gute Luftpumpe.

[2]) Während Quecksilber bei gewöhnlichem Luftdruck, i. e. 760 mm, erst bei 357° siedet, gerät dasselbe bei einem mit der Sprengelschen Pumpe leicht zu erzielenden Druck von bloß 10 mm schon bei 180° ins Sieden.

ändig zu füllen. Um das leichte Springen der Barometerröhren bei dieser peration zu vermeiden, was hauptsächlich dem hohen Siedepunkte des ueeksilbers von 357° eizumessen ist, suchte Wild nach Taupe- ot[1]) durch teilweises vakuieren des Appa- ates diesen bei der Ope- ation des Auskochens u erniedrigen, was er ermittelst der in Fig. 47 dargestellten Vor- chtung erzielte[2]). Eine ugelförmige, doppelt abulierte Vorlage wird nerseits durch ein urzes Stück ungeschwe- elten Kautschukrohres it der zu füllenden arometerrohre K, ande- erseits durch Kaut- chukröhren mit einer rockenröhre (Rohre mit tücken geschmolzenen hlorcalciums gefüllt nd an den Enden mit aumwollepfropfen ver- ehen) und weiterhin mit iner Luftpumpe A ver- unden. Die letzteren ohren bestehen ent- eder aus sehr dick- andigem Kautschuk der sie sind durch ein- elegte Drahtspiralen egen das Zusammen- rücken durch den ußeren Luftdruck ge- chützt. Zunächst wird er ganze Apparat: Trockenrohre, Vorlage und Barometerrohr, achdem man in die Vor-

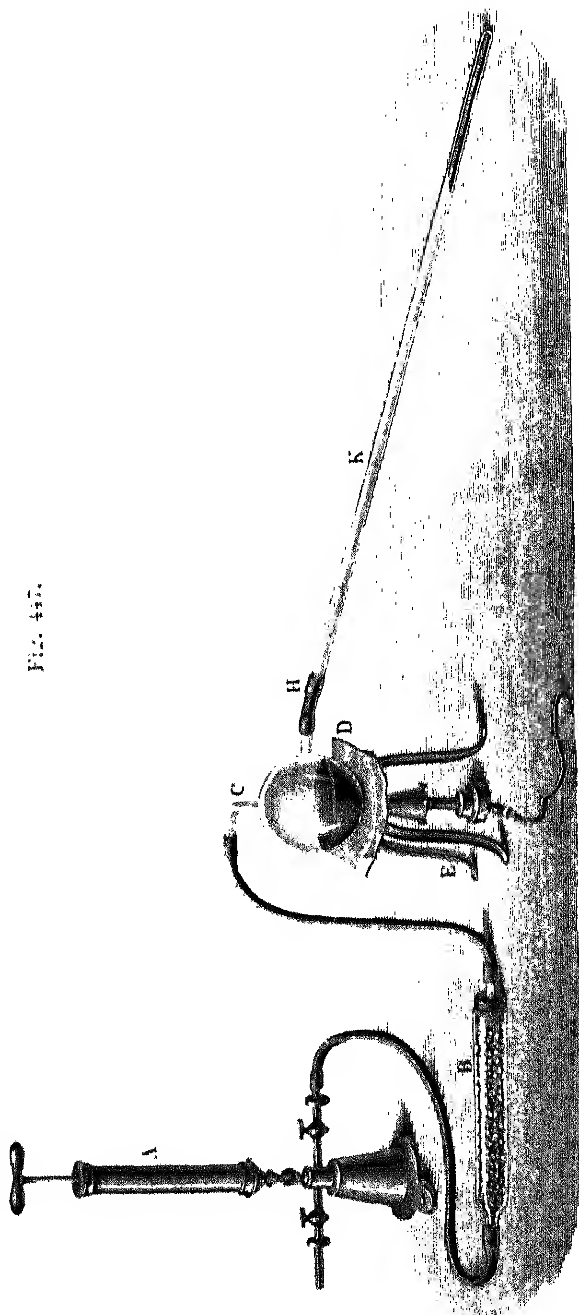


Fig. 147.

[1]) Note sur la con truction du baromètre et ébullition du mercure dans e vide par Taupenot. Ann. de Chimie et de Physique, 3 série, t. 49, p. 91, 1857.

[2]) H. Wild, Methode zur Füllung von Barometerröhren ohne Auskochen und hne Gefahr des Zerspringens derselben. Repert. für Meteorologie 2, 115, 1872.

lage eine passende Menge reinen Quecksilbers gebracht hat, evakuiert und dann wieder von der Luftpumpe her Luft eingelassen, welche nun trocken ist, weil sie die Trockenröhre passiert hat. Hat man durch mehrmaliges Wiederholen dieser Operation alle Feuchtigkeit aus dem Inneren entfernt und eine möglichste Luftverdünnung erzeugt, so wird die auf einem Dreifuß mit Drahtnetz liegende Vorlage erwärmt, bis das Quecksilber, welches sie enthält, ins Kochen gerät, was im nahezu leeren Raume, wie erwähnt, schon bei ungefähr 180° ohne Stoßen erfolgt. Nachdem man hierauf mit derselben oder mit einer zweiten Lampe auch die Barometerröhre noch etwas erwärmt hat, läßt man das heiße Quecksilber durch Neigen der Vorlage langsam und bei schwacher Neigung der Barometerröhre in dieselbe einlaufen. In dieser Weise wird die Barometerröhre bis über ihr Ende hinaus mit Quecksilber gefüllt und darauf mit der Kautschukröhre *H* von der Vorlage abgezogen. In der Kautschukröhre *H* läßt man Quecksilber, damit beim Erkalten die Barometerröhre gefüllt bleibt.

Ein weiterer Vorteil dieser Methode besteht darin, daß sich wegen des Siedens des Quecksilbers bei niedrigerer Temperatur auch viel weniger Oxyd desselben bildet als bei der gewöhnlichen Methode des Auskochens. (Die Oxydation ist sogar ganz zu vermeiden, wenn man nach dem ersten Evakuieren von der Pumpe her statt Luft ein indifferentes Gas, wie z. B. Kohlensäure, einströmen läßt.) Die Gegenwart von Quecksilberoxydul, Hg_2O, und Quecksilberoxyd, HgO, verändert nämlich nicht nur das spezifische Gewicht des Quecksilbers (70 mg HgO auf 1 kg Quecksilber bedingen bereits eine Verminderung seines spezifischen Gewichts um 0,0002), sondern wesentlich auch seine Adhäsion am Glase, so daß die konvexe Oberfläche derselben im Barometerrohr sogar in eine ganz ebene übergehen kann, was man früher fälschlich als einen Beweis vollständiger Luftleere im Torricellischen Vakuum betrachtete.

3. Die Kapillardepression muß möglichst vermieden werden oder doch bestimmbar sein.

Wie später gezeigt werden wird, gilt das Gesetz der kommunizierenden Röhren nur für solche, welche eine gewisse Weite überschreiten. In engen Röhren erheben sich Flüssigkeiten, welche die Gefäßwände benetzen, über das normale Niveau, wogegen solche, welche die Gefäßwände nicht benetzen, wie das reine Quecksilber in Glasröhren, eine Depression unter das normale Niveau erleiden. Das Quecksilber bildet hierbei eine Kuppe, deren Höhe über dem Berührungsrande als Meniskushöhe bezeichnet wird. Diese Höhe ist von der Reinheit des Quecksilbers und von der Beschaffenheit des Glases abhängig, und von ihr hängt dann auch die Depression ab. Diese wird erst bei Röhren von 25 mm aufwärts verschwindend klein. Wir teilen im § 159 aus F. Kohlrauschs prakt. Physik eine nach Mendelejeff und Gutkowsky berechnete Tabelle mit.

4. Der Vertikalabstand der beiden Quecksilberniveaus muß genau gemessen werden können.

Zu diesem Behufe ist das Barometer mit einem genau und richtig geteilten Maßstabe zu versehen, welcher aber nicht der ganzen Länge nach

geteilt zu sein braucht. Dieser Maßstab muß genau vertikal stehen, während dies für die Röhre durchaus nicht nötig ist. Ferner soll der Maßstab der ganzen Länge nach aus ein und demselben Material sein, damit man die Wärmeausdehnung desselben berücksichtigen kann. An dem Maßstabe müssen Ablesevorrichtungen vorhanden sein, welche ein möglichst genaues Einstellen auf die Kuppen des Quecksilbers gestatten.

Bei Standbarometern kann die Ablesung mittels des Kathetometers erfolgen. Nur durch Aufwendung der genauesten Hilfsmittel ist bei der Ablesung eine Genauigkeit von 0,01 mm zu erreichen; bei gewöhnlichen guten Barometern muß man schon sehr zufrieden sein, wenn der Fehler in der Messung der Barometerhöhe nicht 0,1 mm übersteigt.

5. Da die Höhe der Quecksilbersäule von ihrer Temperatur abhängt und ebenso auch der Maßstab seine Länge mit der Temperatur ändert, so muß dafür vorgesorgt sein, daß diese Temperatur in allen Höhen möglichst dieselbe sei und mittels Thermometers genau gemessen werden kann.

Bei einem Barometer mit Messingskala macht ein Fehler in der Temperaturbestimmung von 0,08° C bereits einen Fehler von 0,01 mm im Resultate. Das Thermometer soll deshalb mit seinem Gefäße in der halben Höhe der Quecksilbersäule und möglichst nahe an derselben angebracht sein, oder es werden mehrere Thermometer in verschiedenen Höhen gleich verteilt angebracht. Das Instrument soll gegen Wärmestrahlungen von Sonne oder Ofen, sowie von Seite des Beobachters sorgfältig geschützt sein. Es ist deshalb anzuraten, beim Ablesen immer zuerst die Temperatur zu beobachten, dann erst den Barometerstand, da erstere durch die Körperwärme rascher beeinflußt wird als der letztere.

Ein Barometer, welches die oben aufgestellten Bedingungen in vollkommenster Weise erfüllt und deshalb zu absoluten Bestimmungen des Luftdruckes mit einer Genauigkeit von ± 0,01 mm dienen kann, wird als Normalbarometer oder absolutes Barometer bezeichnet. Da ein solches Instrument wegen seiner Kostspieligkeit nur von größeren Instituten angeschafft werden kann, so verweisen wir wegen Beschreibung eines solchen auf das von v. Wild konstruierte Normalbarometer des physikalischen Zentralobservatoriums zu St. Petersburg[1]).

Im folgenden geben wir eine Beschreibung der Hauptformen des Barometers, welche am häufigsten zu wissenschaftlichen Zwecken im Gebrauche stehen.

§ 155. Das Gefäßbarometer. Die einfachste Form des Gefäßbarometers ist bereits durch Fig. 443, § 152, abgebildet. Dasselbe ist jedoch nicht gut transportabel und daher nur als „Standbarometer" verwendbar; außerdem hat es den Übelstand, daß das Niveau im unteren Gefäße fortwährend wechselt und dessen Höhe nicht gut abzulesen ist. Will man die Höhe der Quecksilbersäule mittels des Kathetometers messen, so senkt man auf die Oberfläche des Quecksilbers des Gefäßes einen von einer Schrauben-

[1]) Ausführlich beschrieben im Repertorium f. Meteorologie 16, Nr. 4, 1892. Man vergleiche auch J. Perret: Über die bei Messungen von absoluten Drucken und Temperaturen durch Kapillarkräfte bedingten Korrektionen und über die Aragosche Methode zur Bestimmung der Luftspannung im Vakuum der Barometer. Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1886, S. 377.

mutter gehaltenen stählernen Stift von bekannter Länge, den man in genau vertikaler Lage so weit auf und ab bewegt, bis seine untere Spitze eben das Niveau berührt. Man mißt dann nur noch den Höhenabstand zwischen dessen oberer Spitze und der Quecksilberkuppe im Rohre, zu welcher man die Länge des Stiftes addiert. Das früher manchmal angewendete Verfahren,

Fig. 448.

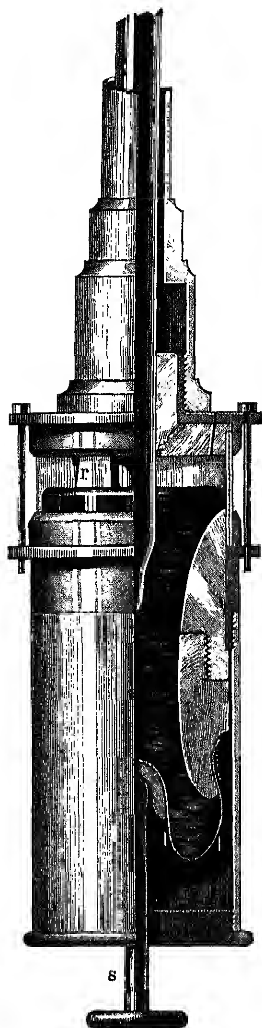


Fig. 449.

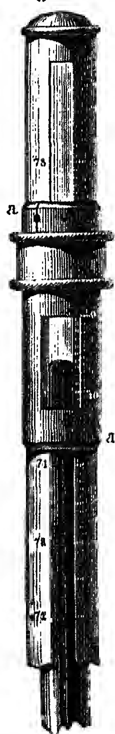
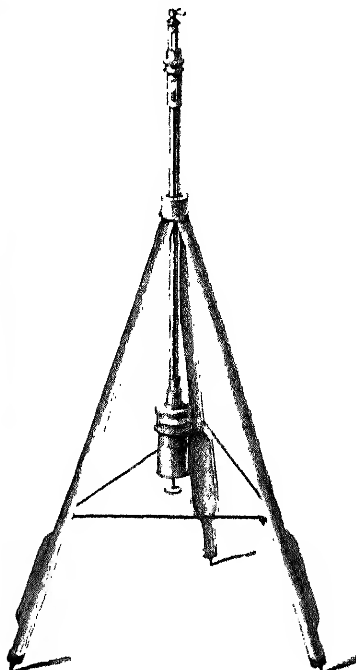


Fig. 450.



die veränderliche Höhe des Quecksilbers im Gefäß aus der Höhe im Rohre, und dem Durchmesserverhältnis zwischen Gefäß und Rohr zu berechnen, ist umständlich und ungenau, da das Volumen des Quecksilbers infolge Temperaturschwankungen sich ändert.

Die verbreitetste Form des transportablen Gefäßbarometers ist die, welche den Namen ihres Erfinders, Fortin, trägt.

Fig. 448 zeigt den unteren, Fig. 449 den oberen Teil, Fig. 450 das ganze Instrument samt Stativ.

Bei diesem Instrument ist durch eine eigentümliche Vorrichtung dafür gesorgt, daß vor jeder Ablesung der Quecksilberspiegel im Gefäße genau in dieselbe Höhe gestellt werden kann. Der Boden des Gefäßes, welches in Fig. 448 ungefähr in natürlicher Größe, halb in äußerer Ansicht, halb im Durchschnitt dargestellt ist, wird nämlich durch einen Lederbeutel *l* (oder besser durch einen Beutel, dessen innere Seite aus nicht vulkanisiertem Kautschuk und dessen äußere aus Leder besteht) gebildet, gegen welchen von

unten her der abgerundete Kopf der Schraube *s* drückt; je nachdem man die Schraube *s* dreht, wird also der Quecksilberspiegel im Gefäße gehoben oder gesenkt. Am Deckel des Gefäßes aber ist ein unten zugespitzter Stift *r* von Elfenbein oder Stahl befestigt, dessen Bild man in dem Quecksilberspiegel des Gefäßes erblickt. Durch Drehen der Schraube *s* ist es leicht, die Oberfläche des Quecksilbers gerade so hoch zu heben, daß sie eben die Spitze des Stiftes berührt. Diese Spitze nun ist der Nullpunkt der Barometerskala.

Das Rohr dieses Barometers ist vollständig von einer Messinghülse eingeschlossen, in welcher, um die Quecksilberkuppe im Rohre beobachten zu können, oben zwei einander gegenüberstehende Schlitze angebracht sind. Diese Messinghülse trägt eine Skala, deren Nullpunkt die bereits erwähnte Spitze ist. Um den Stand der Quecksilberkuppe richtig ablesen zu können, ist auf dem geteilten Messingrohr eine Hülse *a a*, Fig. 449, verschiebbar, in welcher sich ebenfalls zwei diametral gegenüberstehende Schlitze befinden, welche auf die Schlitze des Rohres passen und nur etwas breiter sind als jene, so daß man noch die Teilung des Rohres sehen kann. Die oberen Ränder der beiden Schieberschlitze sind genau in gleicher Höhe, und um eine Beobachtung zu machen, stellt man den Schieber so, daß diese oberen Ränder der Schieberschlitze in gleicher Höhe mit der Quecksilberkuppe stehen. Die eine Seite des vorderen Schieberschlitzes ist mit einem Nonius versehen.

Mittels cardanischer Aufhängung, d. h. um zwei zueinander rechtwinklige horizontale Achsen drehbar, wird nun das Instrument in den Hals eines dreiseitigen Stativs eingesetzt, wie man Fig. 450 sieht, so daß das Barometer durch das bedeutende Gewicht des Gefäßes stets in vertikaler Richtung erhalten wird. Um das Barometer zu transportieren, wird die Schraube *s*, Fig. 448, so hoch in die Höhe geschraubt, daß das Rohr sowohl wie das Gefäß vollständig mit Quecksilber gefüllt sind. Die zusammengelegten Füße des Stativs bilden dann das Gehäuse, in welchem das Instrument verpackt wird.

Die Anwendung des beweglichen Bodens zur Einstellung des Quecksilberspiegels im Gefäß auf einen bestimmten Punkt rührt von Horner her, welcher übrigens den Boden des Gefäßes nicht durch einen Lederbeutel herstellte, sondern dazu einen dicht an die Wände anschließenden, mit Leder überzogenen Kolben gebrauchte, welcher durch eine Schraube auf und nieder geschoben werden konnte.

Die Aufhängung des Barometers in einem dreibeinigen Stativ wurde zuerst von Engelfield angewandt.

§ 156. Das Heberbarometer. Den bisher besprochenen Gefäßbarometern gegenüber bilden die Heberbarometer eine zweite Hauptform dieses wichtigen Instrumentes, welche sich durch mehrfache Vorteile auszeichnet, namentlich sind die Heberbarometer bei gleicher Genauigkeit weit transportabler als die Gefäßbarometer.

Die Heberbarometer, Fig. 451, sind aus einem heberförmig gebogenen Glasrohre verfertigt, welches wenigstens an den Stellen der oberen und unteren Quecksilberkuppe gleichen Durchmesser haben muß.

Bei diesen Barometern hat die Quecksilberkuppe im kürzeren Schenkel durchaus keine feste Stellung. Solange die Temperatur nicht wechselt, muß

so viel steigen, wie sie im anderen fällt, man könnte also aus den Schwankungen im einen Schenkel auf die im anderen schließen; da jedoch bei

Fig. 451.

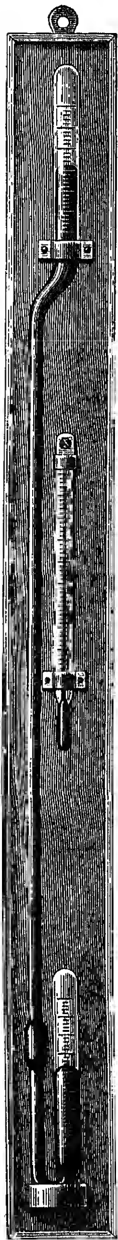


Fig. 452.

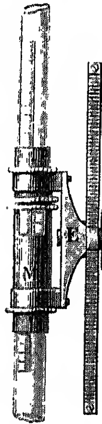


Fig. 453.



Fig. 454.

Fig. 455.

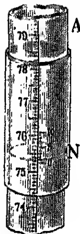


Fig. 456.

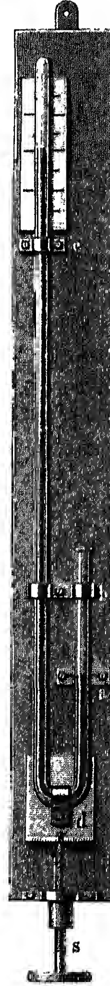
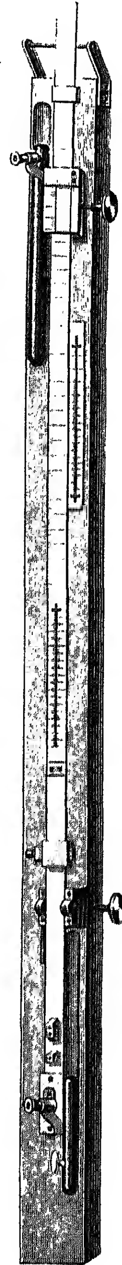


Fig. 457.

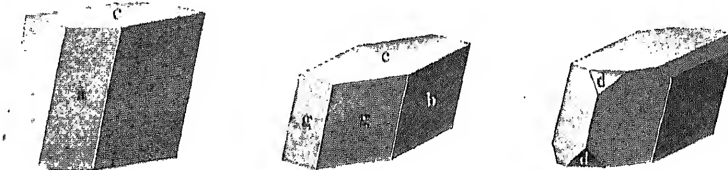


Die Ebene der beiden Achsen *ab* und *cd*, Fig. 25, welche sich nicht unter rechtem Winkel schneiden, heißt die symmetrische Ebene, während die rechtwinkelig auf der symmetrischen Ebene stehende Achse *ef* die symmetrische Achse genannt wird.

Die am meisten charakteristische und am häufigsten teils allein, teils in Kombination mit anderen Flächen vorkommende Form dieses Systems ist die schiefe rhombische Säule, Fig. 26, welche sich von der geraden rhombischen Säule des vorigen Systems dadurch unterscheidet, daß die Hauptachse dieser Säule nicht rechtwinkelig auf der Basis steht.

Die Säule ist in unserer Figur so gestellt, daß die Ebene der beiden schiefwinkeligen Achsen unverkürzt, die dritte auf ihrer Ebene rechtwinkelig stehende Achse aber, als gegen den Beschauer gerichtet, verkürzt erscheint.

Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.



Auch hier haben wir zwei scharfe und zwei stumpfe Säulenkanten zu unterscheiden. Die Abstumpfungsfläche der vorderen und hinteren Säulenkante (die Fläche *a* in Fig. 27) steht rechtwinkelig zu der oberen Endfläche *c*; dagegen macht die Abstumpfungsfläche *b*, Fig. 28, der Säulenkanten rechts und links einen schiefen Winkel mit *c*.

Die horizontalen Kanten der durch die Fläche *c* begrenzten schiefen rhombischen Säule sind nicht gleicher Natur, wie dies bei der geraden rhombischen Säule der Fall war; an der oberen Fläche, Fig. 26, sind die beiden Kanten rechts scharfe Kanten, die beiden horizontalen Kanten auf der linken Seite der oberen Fläche sind dagegen stumpfe Kanten. An der unteren Fläche liegen die beiden scharfen Kanten links, die stumpfen rechts.

Die scharfen horizontalen Kanten können für sich allein abgestumpft sein, während bei anderen Kristallen nur die stumpfen horizontalen Kanten abgestumpft sind.

Die schon oben besprochene Gestalt, Fig. 28, zeigt die gewöhnliche Kristallform des Zuckers. Häufig erscheinen aber an den Zuckerkristallen noch die spitzen Kanten zwischen *c* und *b* und die Ecken abgestumpft, in welchen die Säulenflächen *g* mit den Endflächen *c* zusammentreffen, wie dies in Fig. 29 dargestellt ist.

6. Das triklinische System ist durch drei Achsen charakterisiert, welche alle drei ungleich sind, und von denen keine mit der anderen einen rechten Winkel macht. Die Kristalle dieses Systems zeigen unter allen am wenigsten Symmetrie. Hier sind nur immer je zwei Flächen, Kanten oder Ecken gleichartig, welche einander diametral gegenüberstehen.

Dem triklinischen System gehören u. a. die Kristalle des Axinits und des Kupfervitriols an.

§ 11. Die Hemiedrie. Es kommt bei Kristallen häufig vor, daß die Hälfte der Flächen einer einfachen Gestalt nach bestimmten Gesetzen in

wechselnder Temperatur auch das Volumen des Quecksilbers im Barometer sich ändert, so ist die Beobachtung beider Kuppen unerläßlich.

Bei den Heberbarometern sind entweder

1. das Rohr und die Skala fest;
2. die Skala fest und das Rohr in vertikaler Richtung verschiebbar;
3. das Rohr fest und die Skala verschiebbar.

Im ersten Falle ist es am bequemsten, wenn der Nullpunkt der Skala noch unter der unteren Kuppe liegt. Man hat alsdann abzulesen, wie hoch die obere und wie hoch die untere Kuppe über dem erwähnten Nullpunkte liegt; die Differenz der beiden Ablesungen gibt dann die Barometerhöhe.

Bei den besten nach diesem Prinzip konstruierten Barometern ist die Teilung oft auf das Glasrohr selbst geätzt.

Ein solches Instrument ist in Fig. 451 abgebildet[1]; Fig. 452 zeigt ein ähnliches Instrument mit Glasnonien, deren Einrichtung aus den Nebenfiguren 453, 454, 455 genügend erhellt.

Die Fig. 456 deutet die Konstruktion eines einfachen Heberbarometers der zweiten Art an.

Das Rohr ist auf der Messingplatte *d* befestigt, welche mit Hilfe der Schraube *s* auf und nieder geschoben werden kann, wodurch dann auch das Barometerrohr selbst gehoben oder gesenkt wird, indem die messingenen Halter *b* und *c* dasselbe zwar auf dem Brette halten, aber doch eine Verschiebung in vertikalem Sinne gestatten. Soll eine Beobachtung gemacht werden, so wird zunächst die untere Kuppe auf den Nullpunkt der Skala eingestellt und dann der Stand der oberen abgelesen.

Bei den Heberbarometern der dritten Art ist die Skala mittels eines in eine gezahnte Stange eingreifenden Triebes verschiebbar; sie wird bei jeder Beobachtung so eingestellt, daß der Nullpunkt der Skala in die Höhe der unteren Quecksilberkuppe zu stehen kommt. Ein Barometer dieser Art ist in Fig. 457 abgebildet. Die Barometerröhre ist ganz in ein Brett eingelassen, welches nur an den beiden Stellen durchbrochen ist, an welchen beobachtet werden soll; die verschiebbare Skala ist auf der Vorderseite dieses Brettes angebracht. Am unteren Ende der geteilten Stange ist ein kleines Mikroskop befestigt, welches so eingerichtet ist, daß man durch dasselbe die untere Kuppe des Barometers scharf sehen kann. Der Kreuzungspunkt des in diesem Mikroskop angebrachten Fadenkreuzes liegt in gleicher Horizontallinie mit dem Nullpunkte der Skala, und dieser Kreuzungspunkt wird genau auf den Gipfel der unteren Kuppe eingestellt. Am oberen Ende der geteilten Stange ist gleichfalls aufs feinste verschiebbar ein Nonius angebracht, dessen Nullpunkt in der Horizontallinie eines von ihm getragenen zweiten Mikroskopes liegt, welches auf die obere Kuppe eingestellt wird. Der Nonius ist so geteilt, daß man mit demselben unmittelbar 0,02 mm ablesen kann. Ein gleicher Grad von Genauigkeit ist bei dem Fortinschen Barometer kaum möglich, selbst wenn man die Einstellung auf die obere Kuppe mit dem Mikroskop ausführen wollte, weil die Einstellung auf die Spitze *r* im Gefäß, Fig. 548, nicht mit der Genauigkeit ausgeführt werden kann, wie die Einstellung auf die untere Kuppe des oben beschriebenen Instrumentes.

---

[1]) Die Abbildungen Fig. 451, 452 bis 455 und 458 sind dem Kataloge der Firma R. Fuess (vormals J. G. Greiner jun. u. Geissler) in Berlin entnommen.

Überhaupt trägt es sehr zur Genauigkeit der Messung bei, wenn l Ablesungen durch gleichartige Vorrichtungen bewerkstelligt werden. man die höchste Genauigkeit erreichen, so benutzt man Konstruktic welche gestatten, beide Ablesungen nicht nur durch gleichartige, son



Fig. 458.



Fig. 459.

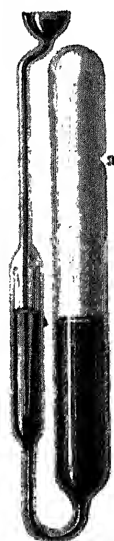


Fig. 460.

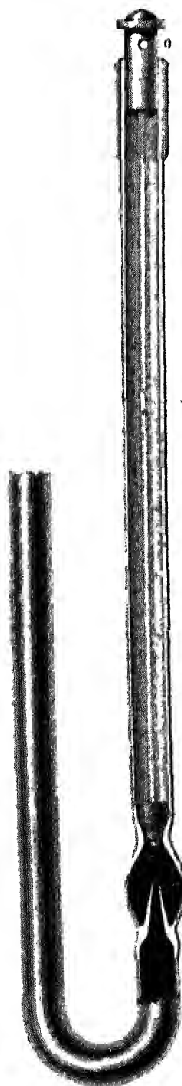


Fig. 461.

durch die nämliche Vorrichtung vorzunehmen. Man ist dann ganz sicher, konstante Ablesefehler durch die Methode der Messung zu eliminieren.

Besondere Mühe hat man darauf verwandt, die Heberbarometer so zu konstruieren, daß sie bequem und sicher transportiert werden können. Fig. 458 stellt das Rohr des von Gay-Lussac angegebenen Barometers dar. Der offene Schenkel hat nur eine kapillare Öffnung a, groß genug, um die Luft frei eintreten zu lassen, aber zu klein, als daß Quecksilber durch dieselbe auslaufen könnte; man darf also das Instrument umkehren, Fig. 459, ohne fürchten zu müssen, daß man Quecksilber verliert. Damit man das Barometer aus der Lage Fig. 459 wieder zur achtung umkehren könne, ohne daß Luft in den längeren Schenkel eint kann, hat Bunten an diesen Barometern die Fig. 460 abgebildete Ei tung getroffen.

Bei den Gay-Lussacschen Barometern findet man die Teilung auf das Glas geätzt.

Fig. 461 stellt den sehr zweckmäßigen Verschluß der Greinerschen Heberbarometer dar. Der offene Schenkel ist nämlich nahe über der Krümmung bei *d* etwas verengt und unter dieser Einschnürung bauchig erweitert. In diese Erweiterung erhebt sich vom unteren Rande aus eine konisch verjüngte oben bei *i* offene Fortsetzung des unteren Röhrenteils. Das Barometer enthält nun gerade so viel Quecksilber, daß die bauchige Erweiterung noch bis *d* mit Quecksilber gefüllt bleibt, wenn man durch Neigen des Instrumentes die Torricellische Leere vollständig mit Quecksilber ausgefüllt hat. Zum Verschluß dient alsdann ein genau in die Verengung bei *d* passender Kork *k*, welcher am unteren Ende einer im Lichten ungefähr 1 mm weiten, bei *u* zugeschmolzenen Glasröhre befestigt ist. Wenn nun selbst kleine Luftblasen in dem abgesperrten Teile zurückblieben, so können diese doch niemals in der Öffnung bei *i* und durch diese in den längeren Schenkel des Barometers eindringen. Wenn bei steigender Temperatur das abgesperrte Quecksilber sich ausdehnt, so kann es in die durch den Kork *k* gesteckte Glasröhre eintreten. Es ist dafür gesorgt, daß während des Transports die fragliche Glasröhre samt dem Kork *k* in der Stellung festgehalten wird, in welcher sie Fig. 461 darstellt. Soll das Instrument gebraucht werden, so wird die enge Glasröhre samt dem daran steckenden Kork *k* in die Höhe gezogen.

Bei manchen Heberbarometern wird das Quecksilber, nachdem durch Neigen das Vakuum nahe ausgefüllt ist, durch einen Hahn abgesperrt.

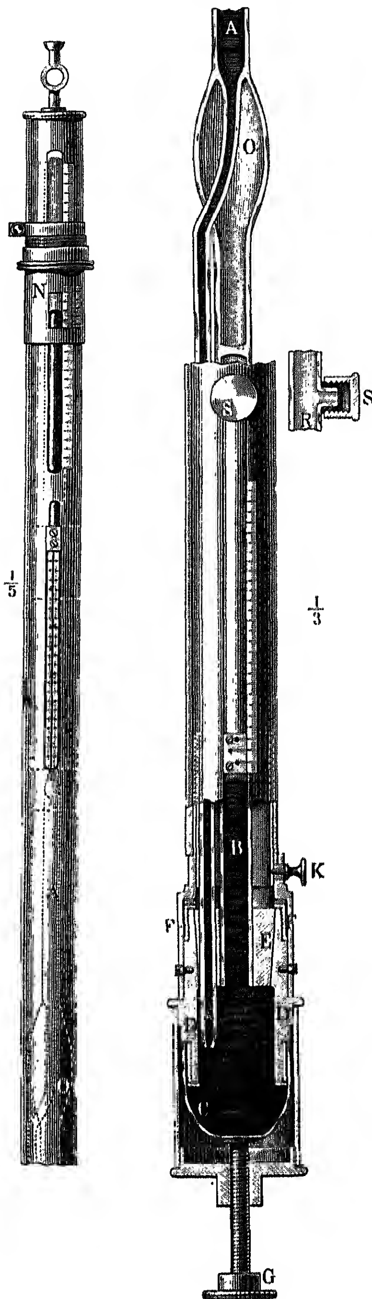
Wenn ein Heberbarometer einige Jahre lang in der Beobachtungsstellung hängen bleibt, so wird die Stelle des offenen Schenkels, an welcher die untere mit der Luft in Berührung stehende Quecksilberkuppe auf und ab spielt, durch anhaftendes Quecksilberoxyd und Quecksilber verunreinigt, was eine genaue Beobachtung sehr erschwert und endlich ganz unmöglich macht. Um diesen Übelstand zu vermeiden, wird vorgeschlagen, das Barometer beim Nichtgebrauch so schief zu hängen, daß das Vakuum ausgefüllt wird. Man vermeidet dadurch auch das Aus- und Einfließen des Quecksilbers bei Änderungen des Luftdruckes, wodurch nach und nach Luft ins Vakuum geführt wird. Dieser letztere Vorteil geht aber verloren und verkehrt sich in einen Nachteil, wenn das Barometer täglich ein- oder mehrmals abgelesen werden soll, da dann der Verkehr des Quecksilbers viel größer ist als bei ruhig hängendem Instrument.

§ 157. Das Gefäßheberbarometer. Der am Schlusse des vorigen Paragraphen besprochene Übelstand, daß in der Umgebung der unteren Kuppe das Glasrohr durch Quecksilberoxyd beschmutzt wird, wodurch insbesondere auch eine unregelmäßige Kapillardepression hervorgebracht wird, sowie noch ein wichtiger Umstand haben Veranlassung gegeben, ein Barometer zu konstruieren, welches die Vorteile des Gefäßbarometers mit jenen des Heberbarometers vereinigt und den obigen Namen führt. Dasselbe besitzt vom Fortinschen Instrumente den Lederbeutel mit der Anhebevorrichtung, ist aber doch doppelschenkelig, wie das Heberbarometer. Fig. 462 zeigt ein solches Instrument nach dem System Wild-Fuess[1]), und zwar links die obere Hälfte desselben mit Skala und Ablesevorrichtung, rechts in etwas

[1]) H. Wild: Neueste Form des Kontrollbarometers. Bulletin de l'Académie Imp. de St. Pétersbourg, T. XXVIII, p. 292, 1883.

größerem Maßstabe den unteren Teil, wobei durch teilweise Wegnahme der Wände die Verbindung der beiden Schenkel und die Einrichtung des Quecksilbergefäßes sichtbar gemacht ist.

Fig. 462.



Die beiden Schenkel A und B hängen an der mit der äußeren Luft nicht kommunizierenden Erweiterung O zusammen. Der obere Teil von A liegt in der Verlängerung von B, seine Fortsetzung aber ist seitlich durch O hindurch und hierauf parallel zu B fortgeführt. A und B sind in den Stahlkonus E gekittet, über welchen A ein Stück weit hinausreicht, während B mit dem Konus abschneidet.

Der Schenkel B hat unterhalb O einen Ansatz, durch den er mit der Atmosphäre kommuniziert, welcher durch die Schraube S verschlossen werden kann.

Der Konus F ist in ein eisernes Gefäß D eingelassen und wird durch eine Überfangschraube darin festgehalten. Auf D ist der Lederbeutel C aufgebunden. An der Außenseite von D ist die messingene Schutzröhre, welche zugleich die Skala trägt, angeschraubt. Auf ihr verschiebt sich die mit einem Nonius versehene Ablesevorrichtung N, welche mit einer Schraube zur feinen Einstellung versehen ist. Diese nämliche Ablesevorrichtung kann nach Wegnahme des Knopfes S zur unteren Kuppe hinabgeschoben und zur dortigen Ablesung benutzt werden. Für weniger genaue Messungen benutzt man bequemer ein eigenes Nullpunktvisier, das mittels der Schraube K festgeklemmt werden kann. Man hebt dann das Quecksilber im kurzen Schenkel bis zu diesem Visier und bewerkstelligt die obere Ablesung mittels des Nonius N.

Soll das Instrument auf kürzere Strecken im zusammengesetzten Zustande transportiert werden, so wird das Quecksilber im Rohre B ganz gehoben, die Öffnung bei S verschlossen und das Instrument umgekehrt.

Die Versendung des Instrumentes auf weitere Strecken geschieht im zerlegten Zustande, ohne daß eine neue Füllung notwendig wird. Zu diesem Zwecke wird in umgekehrter Lage nach Abnahme des Skalenrohres vom Gefäß D und nach Lösung der Mutter F der

Stahlkonus E mitsamt den beiden eingekitteten Röhren aus D herausgehoben und nach Abnahme von S das Quecksilber aus dem Schenkel B abgelassen, während der längere Schenkel A gefüllt bleibt. Die beiden Rohre werden dann samt dem Konus E abgesondert vom übrigen Instrument verpackt, damit im Falle eines Bruches das ausfließende Quecksilber nicht die Metallteile beschädigt. Bei der Wiederzusammensetzung wird in umgekehrter Reihenfolge verfahren.

Zum Schlusse sei erwähnt, daß Barometer mit anhebbarem Quecksilber nach Löwenherz auch ohne Lederbeutel durch Anfügung eines dritten kommunizierenden Schenkels, aus dem das Quecksilber durch einen Kolben verdrängt wird, konstruiert werden.

§ 158. Prüfung und Korrektion des Barometers. Um ein Barometer auf seinen brauchbaren Zustand zu prüfen, wird man zunächst aus der blanken Oberfläche des Quecksilbers und dem wohlausgebildeten Meniskus auf die Reinheit des Quecksilbers schließen dürfen. Die Weite der Röhre und die Beschaffenheit der Ablesevorrichtungen wird dann einen Maßstab über die erreichbare Genauigkeit der Ablesung ergeben. Die Richtigkeit der Skala kann wohl nur durch Untersuchung mittels eines Kathetometers geprüft werden, wobei insbesondere auf die richtige Stellung der Nullmarke zu der übrigen Teilung zu achten ist.

Die Vollkommenheit des Vakuums kann zunächst annähernd dadurch geprüft werden, daß man das Instrument vorsichtig so neigt, daß das Quecksilber mit mäßiger Stärke an das verschlossene Ende anschlägt. Entsteht dabei ein heller, klingender Ton, so ist dies ein gutes Zeichen, dagegen zeigt ein dumpfer Ton an, daß Luft vorhanden, welche den Stoß elastisch aufnimmt. Man wird dann auch, falls das Ende der Röhre sichtbar ist, daselbst die zurückbleibende Luftblase beobachten und der Größe nach beiläufig schätzen können. Je größer der Raum über dem Quecksilber, je weiter und je länger also die Röhre ist, desto weniger Ungenauigkeit wird durch ein kleines Luftbläschen entstehen können. Schon aus diesem Grunde sind enge Röhren verwerflich. Bei Heberbarometern, deren offener Schenkel lang genug ist, so daß man die Quecksilbersäule durch Nachgießen von Quecksilber noch um ein Beträchtliches erhöhen kann, sowie bei den Anhebebarometern, z. B. dem zuletzt beschriebenen Gefäßbarometer, läßt sich eine genaue Bestimmung des Fehlers, der durch einen Luftgehalt entstanden ist, nach folgender von Arago[1]) stammender Methode ermitteln.

Man macht unmittelbar nacheinander zwei sorgfältige Ablesungen der Barometerhöhe, die erste, h, bei gewöhnlicher Füllung, die zweite, nachdem man durch Nachfüllen oder Anheben des Quecksilbers den Raum des Vakuums auf die Hälfte des früheren gebracht hat. Ist die dann abgelesene Höhe gleich h', so ist der Fehler der ersten Messung gegeben durch die Differenz $h - h'$. Diese Größe ist zur zuerst abgelesenen Höhe zu addieren.

Die Erklärung für dieses Verfahren ist einfach, sobald man das später mitzuteilende Gesetz von Boyle kennt, nach welchem sich die Spannkraft der Luft in demselben Verhältnisse erhöht, in welchem das Volumen derselben abnimmt. Durch Zusammendrücken der Luft auf ihr halbes Volumen wird

[1]) Nach Régnaults Angabe (Relation des exp. 1, p. 491, Anm.). Dieselbe Methode wurde von A. T. Kupffer 1832 beschrieben (Pogg. Ann. 26, 450).

ihre Spannkraft verdoppelt. Bei der ersten Ablesung war die gefundene Höhe h gleich der wahren Berometerhöhe b weniger der Spannkraft der eingesperrten Luft, welche mit x bezeichnet sei, also:

$$h = b - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bei der zweiten Ablesung tritt an Stelle von x der Wert $2x$, also gilt:

$$h' = b - 2x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt aber:

$$h - h' = x.$$

Diese Methode gilt angenähert auch bezüglich des im Vakuum enthaltenen Wasserdampfes, solange davon nicht eine so große Menge vorhanden ist, daß sich derselbe beim Versuche teilweise kondensiert.

Es leuchtet ein, daß man das Volumen des Vakuums nicht gerade auf die Hälfte zu reduzieren braucht; das Verfahren wird vielmehr noch empfindlicher, wenn man die Volumverminderung noch weiter treibt. Vermindert man das Volumen auf $\frac{1}{n}$ des ursprünglichen, so ist:

$$h = b - x,\ h' = b - nx,$$

woraus:

$$x = \frac{h - h'}{n - 1}.$$

Reduziert man also beispielsweise das Vakuum auf den elften Teil, so gibt die Differenz der Ablesungen der Barometerhöhen das Zehnfache des Fehlers der ersten Ablesung.

Um diese Methode genau durchzuführen, sollte das Barometerrohr eine Volumeinteilung besitzen. Es dürfte aber meistens genügen, die relativen Volumina aus den Längen abzuleiten, wobei man noch den Inhalt der Kalotte abschätzen kann.

Die Korrektion wegen der Kapillardepression ist leider eine ziemlich unsichere, da die diesbezüglichen Korrektionstabellen verschiedener Autoren nicht übereinstimmen. Wir führen hier die aus den Beobachtungen von Mendelejeff und Gutkowski von F. Kohlrausch berechnete Tabelle auf.

Kapillardepression des Quecksilbers in einer Glasröhre.

Durchmesser	Höhe des Meniskus in Millimetern							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

Bravais gibt folgende Werte der Depression in ihrer Abhängigkeit vom Randwinkel (dem Winkel, den die nach außen gerichtete Tangente zum Rande der Quecksilberoberfläche an der Wand mit dem nach oben gerichteten Teile desselben einschließt).

Röhrendurchmesser in Millimeter	Randwinkel		
	105°	120°	138°
6	0,405	0,780	1,138
8	0,239	0,459	0,670
10	0,144	0,275	0,402
12	0,088	0,167	0,242
14	0,052	0,101	0,144
16	0,031	0,060	0,086
18	0,018	0,035	0,051
20	0,011	0,021	0,031

Aus beiden Tabellen geht hervor, daß die Depression in Röhren von 12 mm Weite noch die Größe von 0,1 mm übersteigen kann, daß sie selbst bei 20 mm Weite noch 0,01 übersteigt. Erst bei einer Weite von 24 mm wird dieselbe unmerklich.

Wäre die Depression bei gegebener Röhrenweite immer dieselbe, so könnte sie in Rechnung gebracht werden; da sie aber veränderlich ist, so bleibt nur das Mittel übrig, die Barometerröhre wenigstens dort, wo die Ablesung erfolgen soll, so weit zu nehmen, daß die Unterschiede in den Depressionen als verschwindend klein angenommen werden dürfen. Jedenfalls muß man vor der Ablesung zur Herstellung normaler Oberflächen des Quecksilbers dasselbe durch Klopfen, noch besser durch Anheben in Bewegung setzen, wozu die oben beschriebenen Einrichtungen getroffen sind.

Es könnte scheinen, daß man durch Anwendung des Heberbarometers, bei welchem beide Schenkel gleich weit sind, die Kapillardepression gänzlich eliminieren könne. Dies ist aber leider nicht der Fall, weil der Meniskus im Vakuum stets höher ist als im offenen Schenkel, wo das Quecksilber und das Glas mit feuchter Luft in Berührung und mehr oder weniger verunreinigt sind. Die Depression ist deshalb am oberen Niveau stets eine größere und wird durch die geringere Depression im unteren Schenkel nur zum Teil aufgehoben.

Die Korrektion wegen der Temperatur kommt in drei Richtungen in Betracht, nämlich einmal wegen der Ausdehnung des Quecksilbers, dann wegen der Ausdehnung des Maßstabes, endlich wegen der Tension der Quecksilberdämpfe im Torricellischen Raume.

Da wir die Grundlagen dieser Korrektionen erst in der Wärmelehre vortragen können, so beschränken wir uns hier auf die Mitteilung der betreffenden Korrektionswerte.

1. Ist die Höhe einer Quecksilbersäule bei t^0 C $= h$, so ist sie bei 0° C $h_0 = h - 0{,}000\,181\,t\,h$.

2. Hat man h an einem Maßstabe gemessen, der nicht die Temperatur Null hat (bei welcher seine Teilung als richtig angenommen wird), sondern

die Temperatur t wie das Quecksilber, so ist bei Anwendung eines Maßs
von Messing (Ausdehnungskoeffizient = 0,000019)

$$h_0 = h - 0,000162\,t\,h;$$

bei einem Maßstabe von Glas (Ausdehnungskoeffizient = 0,000008)

$$h_0 = h - 0,000173\,t\,h.$$

3. Die Korrektion wegen der Tension der Quecksilberdämpfe ist ge
fügig, sie beträgt nach:

Temperatur	Régnault	Hagen	Hertz
0°	0,0200 mm	0,015 mm	0,0002 mm
10°	0,0268 „	0,018 „	
20°	0,0372 „	0,021 „	0,0013 „
30°	0,0530 „	0,026 „	

Die Zahlen von Hertz sind vom Verfasser bestätigt worden. Neh
wir sie als die richtigen an, so kann die Tensionskorrektion bei den Zim
temperaturen ganz entfallen.

Es ist sehr darauf zu achten, daß man die Temperatur des Quecksi
des Barometers richtig bestimme. Ein neben oder an dem Barometer
gebrachtes Thermometer gibt nur dann die Temperatur des Quecksi
richtig an, wenn es vor störenden Einflüssen, wie Wärmestrahlen von s
der Sonne, des Ofens, des Beobachters usw., dann vor Luftströmunger
schützt ist, und wenn die Temperatur der Umgebung nicht rasche Änderu
erleidet. Man hat daher das Thermometer immer zuerst abzulesen und
erst das Barometer.

Beispiele der Berechnung des korrigierten Barometerstand

a) An einem Gefäßbarometer mit Skala auf Messing habe man abgelesen die Temperatur . . . . . t = 20,5°
Nach Einstellung des unteren Niveaus stand die Quecksilberkuppe bei . . . . h = 750,1(
Die Röhre habe 10 mm innere Weite, der Meniskus eine Höhe. . . . . = 1
Daraus ergibt obige Tabelle eine Kapillardepression . c = 0,2(

Dann ist der auf 0° reduzierte und korrigierte Barometerstand:

$$b = h - 0,000163\,t\,h + c$$
$$b = 750,10 - 2,51 + 0,20 \quad = 747,7$$

b) An einem Heberbarometer sei bei einer Temperatur t = −6,0
abgelesen die Höhendifferenz der beiden Kuppen . h = 720,0
Die beiden Schenkel seien beide 8 mm weit, die Höhe des Meniskus sei an der oberen Kuppe . . . . = 0,6
An der unteren Kuppe . . . . = 1,2
Nach der Tabelle entsprechen diesen Höhen die Depressionen . . . . 0,20 und 0,4

Man erhält:

$$b = h - 0{,}000173\,t\,h + 0{,}20 - 0{,}46 + 0{,}01$$
$$= 720{,}00 + 0{,}75 + 0{,}20 - 0{,}46 = 720{,}49 \text{ mm.}$$

Da nämlich t negativ ist, so wird das zweite Glied positiv. Die Depression im kürzeren Schenkel kommt in Abzug, weil sie der Depression im langen Schenkel entgegenwirkt.

§ 159. Berechnung des Luftdruckes aus dem Barometerstande. Der Luftdruck wird gemessen durch die Höhe einer Quecksilbersäule von 0°, welche von der Erde mit jener Kraft angezogen wird, welche sie auf die Körper unter 45° Breite in Meereshöhe ausübt.

An einem Orte von anderer Breite und in einer anderen Höhe ist der Druck (das Gewicht) aller Körper, also auch der Druck einer Quecksilbersäule infolge verschieden großen Wertes der Schwerkraft verschieden groß.

Ist g die Acceleration der Schwere an dem Orte, wo der Barometerstand b gemessen wurde, und g_{45} die Acceleration der Schwere unter 45° Breite in Meereshöhe, so ist der Luftdruck $= b\,\frac{g}{g_{45}}$. Siehe § 96.

Diese Reduktion des Barometerstandes auf die Normalschwere in 45° Breite und auf die Meereshöhe ist stets da anzubringen, wo man, wie in der Meteorologie die Luftdrucke an verschiedenen Orten miteinander vergleichen will. Man berechnet diese Korrektion für einen Ort in der Breite φ und der Seehöhe z aus:

$$c_1 = -b\,(0{,}002648\,\cos^2\varphi + 0{,}0000003140\,z).$$

In den meteorologischen Jahrbüchern der meisten Länder findet man in neuerer Zeit überall den Betrag dieser Schwerekorrektion am Kopfe der betreffenden Tabellen angegeben. Eine Abweichung um 9′ von der Breite 45° und eine Erhebung von 42 m über das Meeresniveau bewirkt bei einem Barometerstande = 760 mm bereits je eine Korrektion von 0,01 mm, ist also keineswegs eine Größe, die man ganz vernachlässigen kann, wie gewöhnlich geschieht, indem man die Barometerhöhe direkt gleich dem Luftdruck setzt.

§ 160. Metallbarometer. Die geringe Handlichkeit und Kompendiosität, sowie die Zerbrechlichkeit des Quecksilberbarometers haben zur Konstruktion von Luftdruckmessern Anlaß gegeben, welche kein Quecksilber enthalten, sondern nur aus festen Metallteilen bestehen und deshalb nicht sehr passend Metallbarometer genannt wurden. Andere Bezeichnungen sind Aneroid, Holosterikbarometer.

Aneroid von Bourdon. Wenn eine aus dünnem Metallblech gebildete Röhre von abgeplattetem Querschnitt und ungefähr so gebogen, wie es Fig. 463 darstellt, überall hermetisch verschlossen ist und nur durch das Röhrchen r mit der äußeren Luft in Verbindung steht, so wird sich das Rohr stärker krümmen, wenn man durch das Ansatzröhrchen r die Luft aus dem Inneren herauszieht, es wird sich dagegen mehr strecken, wenn man die Luft im Inneren komprimiert.

Es läßt sich dies leicht zeigen, wenn man die Vorrichtung Fig. 463 durch das Röhrchen r mit einer Luftpumpe in Verbindung setzt; sobald man evakuiert, nähern sich die Hörner a und b. Setzt man dagegen die Vor-

ander, wenn die Luft im Inneren verdichtet wird.

Dieselbe Wirkung, wie eine Druckvermehrung (Verminderung) im Inneren bringt eine Druckverminderung (Vermehrung) von außen hervor.

Wenn das Rohr, Fig. 463, luftleer gemacht ist, so wird seine Krümmung doch noch mit dem Luftdruck variieren, dagegen werden Änderungen der Temperatur keinen oder nur noch geringen Einfluß haben.

Fig. 464 stellt ein möglichst einfach konstruiertes Aneroidbarometer nach Bourdon dar. Die nahezu kreisförmige, luftleer gemachte Röhre ist

Fig. 463.

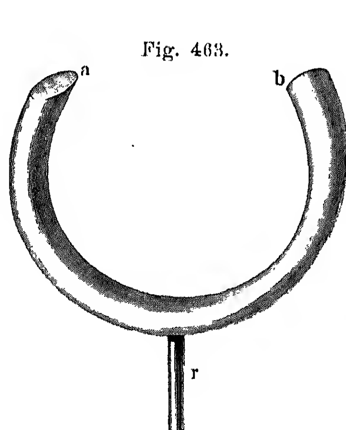
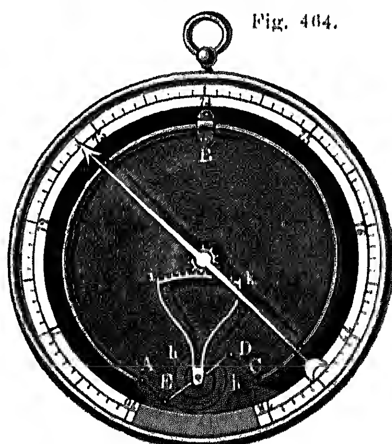


Fig. 464.



in ihrer Mitte bei B auf die Bodenplatte des Gehäuses befestigt, im übrigen aber ist sie frei. Wenn der Luftdruck abnimmt, so entfernen sich die freien Enden A und C des Rohres voneinander und bewirken dadurch mittels der Metallstäbchen CD und AE die Drehung eines Hebels, dessen längerer Arm mit einem gezahnten Bogen ik endet. Dieser bei abnehmendem Luftdruck nach rechts gehende gezahnte Bogen greift aber in einen Trieb ein, auf dessen Achse ein Zeiger befestigt ist, der sich nun nach der entgegengesetzten Richtung drehen muß wie ik. Wenn dagegen der Luftdruck zunimmt, so krümmt sich die Röhre stärker, und die Spiralfeder h kann die Achse des Zeigers wieder zurückdrehen, so daß also die Spitze desselben sich bei wachsendem Luftdrucke nach der Rechten bewegt.

Die Skala dieses Instrumentes kann natürlich nur durch Vergleichung mit einem anderen Barometer graduiert werden.

Um das Rohr luftleer zu machen, verfährt man auf folgende Weise:

In der Art, wie es Fig. 463 zeigt, mit einem Röhrchen r von Zinn versehen, wird das gekrümmte Rohr mittels der Luftpumpe evakuiert und alsdann das Röhrchen r nahe an seiner Ansatzstelle fest zugedrückt, abgeschnitten und dann verlötet.

Aneroid von Vidi, Fig. 465. Der Hauptbestandteil des Apparates ist die luftleere Metalldose K, deren Deckplatte zum Zwecke größerer Beweglichkeit kreisförmig gewellt ist; die an der Bodenplatte des Apparates mittels der Träger R befestigte starke breite Metallfeder P ist mit der Mitte des Dosendeckels bei M fest verbunden. Der Luftdruck sucht die Dose einzudrücken, die Feder P wirkt diesem Drucke entgegen. Zwischen beiden

edrische Kristalle. Wir müssen hier die Hemiedrie noch kurz erwähnen, weil dieselbe in innigem Zusammenhange mit einigen physikalischen Erscheinungen der Kristalle steht.

Denken wir uns an dem regulären Oktaeder, Fig. 30, die Fläche *o* und die in unserer Zeichnung nicht sichtbare Fläche der oberen Pyramide hinten rechts nach allen Seiten gewachsen, so schneiden sich diese beiden Flächen in der Kante *ab*. Wenn ferner von den vier unteren Oktaederflächen die

Fig. 30.

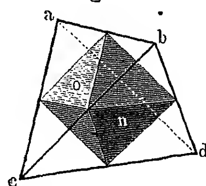


Fig. 31.

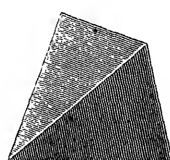


Fig. 32.

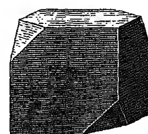
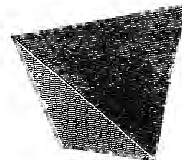


Fig. 33.



Fläche *n* und die Fläche hinten links wächst, so schneiden sich diese in der Kante *cd*; die gewachsenen Flächen *o* und *n* schneiden sich in der Kante *bc* usw. Kurz, wenn die Fläche *o* und die drei Flächen des Oktaeders, welche mit *o* nur in einer Spitze zusammentreffen, wachsen, bis diejenigen Oktaederflächen, welche mit *o* in einer Kante zusammenstoßen, und diejenige Oktaederfläche, welche mit *o* parallel liegt, ganz verschwunden sind, so entsteht ein nur von vier Flächen begrenzter Körper *abcd*, Fig. 30.

Fig. 31 stellt diesen Körper, welcher das Tetraeder genannt wird, für sich allein dar.

Fig. 32 ist eine Kombination des regulären Tetraeders mit dem Würfel.

Das Tetraeder, Fig. 31, kann man sich also aus dem Oktaeder, Fig. 30, dadurch entstanden denken, daß die eine Hälfte der Oktaederflächen bis zum Verschwinden der vier übrigen Oktaederflächen gewachsen ist. Denken wir uns dagegen diese vier letzteren Oktaederflächen bis zum Verschwinden der ersteren gewachsen, so entsteht das Tetraeder, Fig. 33.

Die vier Flächen dieser Tetraeder sind gleichseitige Dreiecke, und die sechs Kanten derselben sind untereinander gleich.

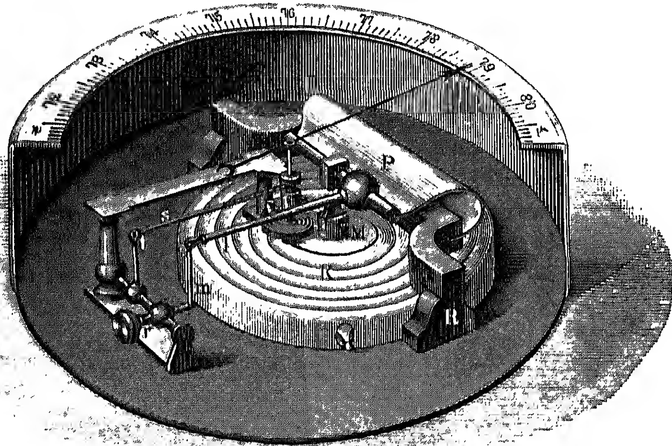
Das Tetraeder Fig. 31 unterscheidet sich von dem Tetraeder Fig. 33 nur durch seine Stellung. Dadurch, daß man das letztere Tetraeder um seine vertikale Achse um 90° dreht, kommt es in die Stellung des ersteren und ist nun mit ihm vollkommen kongruent.

Einen solchen Fall der Hemiedrie, bei welchem wie hier die beiden aus derselben Grundgestalt abgeleiteten hemiedrischen Formen einander vollkommen gleich und nur durch die Stellung verschieden sind, nennt man eine kongruente oder überdeckbare Hemiedrie.

Wie aus dem regulären Oktaeder das Tetraeder, so entsteht aus der doppeltsechsseitigen Pyramide des hexagonalen Systems durch Wachsen der einen Hälfte der Flächen das Rhomboeder. Denken wir uns von der oberen Pyramide Fig. 34 die Flächen *r*, *t* und diejenige auf der hinteren Seite welche *s* gegenüberliegt, von der unteren Pyramide aber gerade diejenigen Flächen gewachsen, welche in einer Kante mit den ausgefallenen Flächen der oberen Pyramide zusammenstoßen, so entsteht das Rhomboeder, wie e

bleibt, je größer der Luftdruck ist. Aller übrige Mechanismus dient nur dazu, die Bewegungen der Mitte des Dosendeckels, bzw. des Bügels P, in geeignetem Maßstabe sichtbar zu machen. Steigt der Luftdruck, so sinkt P, sowie dessen Verlängerung l, der Hebel mr wird nach rechts gedreht, hier-

Fig. 465.



durch die Kette s nach rechts hin nachgelassen, was weiterhin eine Drehung der Zeigerachse nach rechts, also ein Fortschreiten der Zeigerspitze auf der Randskala im Sinne wachsender Zahlen zur Folge hat. Eine Spiralfeder sorgt dafür, daß die Kette s gespannt bleibt. Sinkt der Luftdruck, so wird die Kraft der Feder P überwiegend, M, l, m rücken in die Höhe, der Hebel rm wird nach links gedreht, die Kette s nach links gezogen, folglich auch der Zeiger nach links gedreht.

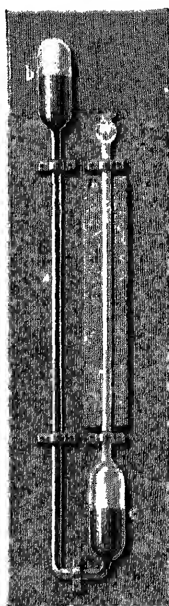
Die Skala sollte so angefertigt sein, daß die Ablesung am Instrumente den Luftdruck in Millimetern Quecksilbersäule ergibt.

Dies ist selten genau der Fall. Gewöhnlich zeigt sich eine Differenz; aber auch diese bleibt bei verschiedenem Werte des Luftdruckes selten konstant. Die Elastizität einer metallenen Feder ist nämlich keine ganz konstante Kraft, sondern einmal von der Temperatur abhängig und sodann bei einseitiger Inanspruchnahme im Laufe der Zeit etwas nachgebend (elastische Nachwirkung). Infolgedessen geht z. B. beim Vidischen Aneroid die luftleere Büchse nach und nach etwas zusammen, so daß dasselbe allmählich zu hohe Drucke anzeigt. Was den Temperatureinfluß betrifft, so suchen gute Fabrikanten dem Nachgeben der Büchse bei höherer Temperatur dadurch zu begegnen, daß sie noch etwas Luft in derselben lassen, deren Ausdehnung dann jenes Nachgeben kompensiert. v. Wild hat mehrfach bei Aneroiden von Naudet u. Co. in Paris, sowie bei Taschenaneroiden englischer Fabrikanten vollständige Temperaturkompensation konstatieren können. — Im allgemeinen ist also bei Aneroiden stets eine Untersuchung über den Temperatureinfluß und eine Verifikation der Druckskala nötig, letztere soll sogar von Zeit zu Zeit in betreff des absoluten Wertes wiederholt werden. Wie beim Quecksilberbarometer, so hat man demnach auch bei den Aneroiden

durchweg eine Temperaturkorrektion, etwa auch eine Reduktion auf 0° Temperatur, und eine, meistens mit dem abgelesenen Stande etwas variierende, namentlich aber stets im Laufe der Zeit sich verändernde Korrektion anzubringen. — Endlich muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß wegen der elastischen Nachwirkung bei raschen Änderungen des Druckes, wie z. B. beim Aufstieg auf einen Berg oder im Ballon die Aneroide nur unter ganz besonderen Vorsichtsmaßregeln brauchbare Angaben machen. Dagegen sind ihre Angaben im Gegensatz zum Quecksilberbarometer unabhängig von der Größe der Schwerkraft.

§ 161. Barometer zur vergrößerten Angabe der Variationen des Luftdruckes. Das Gewicht der atmosphärischen Luftsäule, welche sich über uns befindet, ist durch mancherlei Einflüsse bedingt. Der beständige Wechsel der Temperatur, die Winde, die veränderliche Menge der in der Luft verbreiteten Wasserdämpfe führen fortwährende Änderungen des Luftdruckes mit sich, welcher auf das Barometer wirkt. Man begreift demnach sehr wohl, daß die Barometersäule an einem und demselben Orte nicht stationär bleiben kann, und daß sie mehr oder weniger bedeutende Variationen erleidet. In unseren Gegenden z. B. vergeht fast kein Tag, an welchem der Barometerstand sich nicht um einige Millimeter änderte. Im allgemeinen unterscheidet man zweierlei Arten von Schwankungen des Barometers, nämlich periodische und zufällige Schwankungen. Die ersteren treten regelmäßig zu bestimmten Zeiten ein und haben eine konstante Größe; die letzteren hingegen sind unregelmäßig, so daß man weder ihre Zeit noch ihre Größe voraussehen kann. Mit diesen Erscheinungen beschäftigt sich die Meteorologie.

Fig. 466.



Da die Variationen des Barometerstandes an demselben Orte nicht sehr bedeutend sind, so hat man sich viel Mühe gegeben, diese Schwankungen dem Auge merklicher zu machen. Wir wollen hier einige solche Vorrichtungen betrachten.

Fig. 466 stellt ein von Huygens konstruiertes Barometer dar. Die Barometerröhre a erweitert sich oben bei b, wo sich die Torricellische Leere befindet, und unten bei c, wo eine Flüssigkeit von geringerem spezifischen Gewicht auf das Quecksilber aufgegossen ist. Das Gefäß c geht in eine engere, oben offene Röhre d über, so daß die leichtere Flüssigkeit, etwa gefärbtes Wasser oder gefärbter Weingeist, den oberen Teil von c und den unteren von d füllt.

Das Gefäß bei b habe gleichen Durchmesser wie das bei c; das Rohr bei d habe aber einen n mal kleineren Querschnitt. Wenn die Quecksilbersäule in b um x mm sinkt, so steigt der Quecksilberspiegel in c um ebensoviel, die farbige Flüssigkeit in der Röhre d aber um nx mm, die Höhe der farbigen Flüssigkeit hat also um $(n-1)x$ mm zugenommen. Eine $(n-1)x$ mm hohe Säule dieser Flüssigkeit drückt ebenso stark wie eine $\frac{(n-1)x}{s}$ mm hohe Quecksilbersäule, wenn s die Zahl ist, welche angibt, um wievielmal

das spezifische Gewicht der farbigen Flüssigkeit geringer ist als das des Quecksilbers.

Wenn also das Quecksilber in b um x mm sinkt, so ist

$$y = 2x + \frac{n-1}{s}x$$

die Höhe einer Quecksilbersäule, welche der Abnahme des Luftdruckes entspricht. Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$x = \frac{sy}{2s + n - 1}.$$

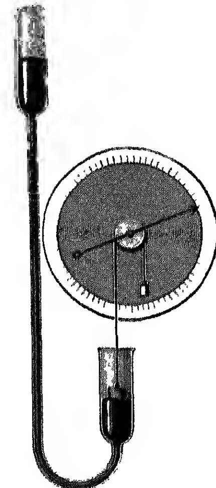
Es sei z. B. der Querschnitt der Röhre d 20 mal kleiner als der von b und c; ferner sei die farbige Flüssigkeit Wasser, also 13,6 mal leichter als Quecksilber, so ist $n = 20$, $s = 13,6$ und also:

$$x = \frac{13,6\,y}{2\,.\,13,6 + 20 - 1} = 0,294\,y.$$

Fällt ein gewöhnliches Barometer um y mm, so fällt also das Quecksilber in b um $0,294\,y$ mm, die farbige Flüssigkeit in d steigt aber um $20\,.\,0,294\,y$, also um $5,88\,y$ mm. So oft also ein gewöhnliches Gefäßbarometer um 1 mm steigt oder fällt, wird die farbige Flüssigkeit unseres Barometers um 5,88 mm, also fast 6 mal so viel, fallen oder steigen.

Ein solches Barometer ist sehr zweckmäßig, wenn es sich nur um die Beobachtung der Barometerschwankungen und nicht um genaue Ermittelung der absoluten Barometerhöhe handelt. Die Skala, welche hinter der Röhre d angebracht ist, wird am besten so angefertigt, daß man einen Punkt nahe am oberen und einen nahe am unteren Ende derselben durch Vergleichung mit einem Normalbarometer bestimmt und den Zwischenraum einteilt.

Fig. 467.



Hookes Radbarometer, Fig. 467, hat folgende Einrichtung: Auf dem Quecksilber im offenen Schenkel eines Heberbarometers schwimmt ein eisernes Gewicht; von diesem Gewichte geht eine Schnur über eine Rolle, welche auf der anderen Seite durch ein etwas geringeres Gewicht gespannt ist. An der Achse der Rolle ist ein langer Zeiger befestigt, dessen Endpunkt also einen großen Weg durchläuft, wenn das Quecksilber nur wenig steigt oder fällt und dadurch die Rolle dreht. — Zu genauen Messungen ist begreiflicherweise auch ein solches Instrument nicht zu gebrauchen.

Um eine Vergrößerung der Niveauschwankung gegenüber den Angaben eines Quecksilberbarometers zu erzielen, hat man mehrfach vorgeschlagen, **statt des Quecksilbers im Barometer eine spezifisch leichtere Flüssigkeit** anzuwenden, die dann im umgekehrten Verhältnis der spezifischen Gewichte größere Schwankungen aufweisen werde. Ein solches Barometer ist z. B. das von **Jordan** für das Observatorium in Kew konstruierte **Glyzerinbarometer**. Da das spezifische Gewicht des Glyzerins 1,26 ist, so werden in einem solchen Barometer die Niveauveränderungen des Glyzerins

im geschlossenen Schenkel $\frac{13,6}{1,26}$ mal, also mehr als 10 mal größer sein als die gleichzeitigen eines Quecksilberbarometers.

F. Kohlrausch hat auf die Achse des Zeigers eines Aneroids einen kleinen Spiegel aufgesetzt und die Bewegung dieses mittels der Poggendorffschen Ablesung durch Fernrohr und Skala (siehe § 17) beobachtet, wodurch eine weitgehende Vergrößerung der Angaben erzielt wird.

Über Instrumente, welche unter Verwendung sei es von Quecksilber-, sei es von Metallbarometern die Barometerstände meistens auch in vergrößertem Maßstabe kontinuierlich selbst aufzeichnen, die sog. Barographen, werden wir besser in der Abteilung Meteorologie Näheres angeben, da sie besonders für dieses Wissensgebiet wichtig sind.

§ 162. Wirkung des Luftdruckes auf den menschlichen Körper. Da die Oberfläche des menschlichen Körpers bei einem Erwachsenen weit mehr als 1 qm beträgt, so ist der Totaldruck der Luft auf diese Oberfläche sehr bedeutend; er beträgt ungefähr das Gewicht von 15000 bis 20000 kg. Es könnte daher die Frage erhoben werden, wie es so kommt, daß der menschliche Körper unter einer solchen Last nicht erdrückt werde. Die Erklärung ist einfach diese, daß die festen, nicht hohlen Teile des Körpers, z. B. die Knochen, einen noch größeren Druck aushalten konnten, ebenso könnten die tropfbaren Flüssigkeiten noch größerem Drucke ausgesetzt werden, ohne merklich komprimiert zu werden. Die mit Luft angefüllten Räume endlich werden deshalb nicht eingedruckt, weil der Druck im Inneren derselben gleich groß ist wie der von außen.

Es bleibt demnach nur noch etwa der Zweifel zu heben übrig, ob nicht die zarten Häutchen und Gewebe, welche die Hüllen der einzelnen Gefäßchen bilden, durch einen so starken Druck Not leiden müßten. Von einem Zerreißen der zarten Gewebe kann aber keine Rede sein, weil der Druck gleichmäßig von beiden Seiten wirkt; um aber die Hautchen etwa zu zerquetschen, ist der Druck nicht stark genug. Da es sich hier nur um kleine Gefäßchen handelt, so kommt auch nur der Druck in Betracht, der auf die kleine Oberfläche derselben wirkt; aus der obigen Tabelle aber kann man entnehmen, daß der Luftdruck auf eine 1 qcm große Oberfläche nur ungefähr einem Kilogramm entspricht, auf 1 qmm nur dem Gewichte von ungefähr 10 g gleichkommt.

Wenn man den Luftdruck von irgend einer Stelle des Körpers entweder mit Hilfe eines Schröpfkopfes oder einer Luftpumpe wegnimmt, so wird der Inhalt der Gefäßchen ein Bestreben geltend machen, sich auszudehnen.

Wie wichtig der Luftdruck für die Ökonomie der Krafte des menschlichen Körpers ist, haben die klassischen Untersuchungen der Gebruder Weber gezeigt.

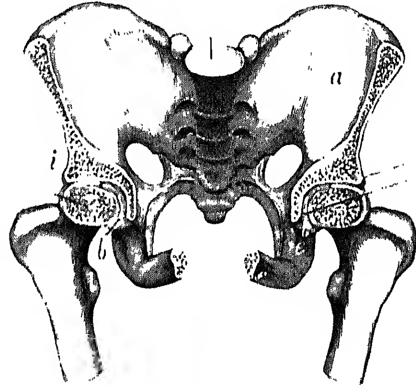
Betrachtet man das Knochengerüst des menschlichen Körpers, so findet man an jeder Seite des Beckens eine spiegelglatte, mit einer schlüpfrigen Flüssigkeit benetzte Vertiefung, die Pfanne, in welche der kugelförmige Kopf des Schenkelknochens genau hineinpaßt, wie man dies in Fig. 468 deutlich sehen kann, welche das Becken mit den Schenkelknochen darstellt.

Der vordere Teil des Beckens und der beiden Schenkelköpfe ist in Fig. 468 durch einen senkrechten Schnitt weggenommen, damit man besser

sehen kann, wie die Schenkelköpfe in den Pfannen sitzen; da sich nun der Schenkelkopf in der Pfanne nach allen Seiten leicht drehen läßt, so begreift man, daß das Bein nach allen Seiten hin beweglich ist.

Das ganze Gelenk ist durch eine Kapselmembran eingehüllt, welche, das Becken mit dem Schenkelkopfe verbindend, an dem knöchernen Pfannenrande und am Halse des Schenkelkopfes angewachsen ist.

Fig. 468.



Wenn man auf einem Beine steht und das andere nur so viel krümmt, daß es hängt, ohne den Boden zu berühren, so kann man mit ungemein geringer Muskelanstrengung das hängende Bein hin und her schwingen lassen. Während das Bein so schwingt, sind die Muskeln, welche das Becken mit dem Schenkelbeine verbinden, ganz schlaff, und daraus geht schon hervor, daß diese Muskeln es nicht sein können, welche das schwebende Bein tragen. Die Gebrüder Weber haben dies auch durch den Versuch nachgewiesen, indem sie an einem Leichnam alle Muskeln durchschnitten, welche den Schenkel mit dem Becken verbinden. Das frei schwebende Bein fiel nicht herab, wie es der Fall gewesen wäre, wenn es im Leben durch die Muskeln getragen würde.

Auch die Kapselmembran wurde durchschnitten, und das Bein fiel nicht herab.

Wurde dagegen durch das Becken hindurch mitten in die Pfanne ein kleines Loch gebohrt, so fiel das Bein in demselben Augenblicke herab, in welchem die Spitze des Bohrers die Pfanne oben durchbrochen hatte und den Schenkelkopf noch nicht berührte. Als der Schenkelkopf nun wieder in die Pfanne hineingeschoben wurde, so daß seine Kugelfläche wieder genau mit der Kugelfläche der Pfanne in Berührung kam, und man dann das Loch im Becken mit dem Finger zuhielt, wurde das Bein auch wieder durch den Luftdruck getragen; es fiel aber sogleich wieder herab, sobald man den Finger wieder von dem Loche wegnahm, so daß die Luft von oben eindringen konnte.

Daraus folgt also, daß der Luftdruck es ist, durch welchen das Bein am Becken festgehalten wird. Dies dürfte aber nicht in der Weise mißverstanden werden, als hätte infolgedessen der Mensch das Gewicht des gehobenen Beines überhaupt nicht zu tragen. Es ist irrigerweise versucht worden, die Ermüdung des Körpers bei der Besteigung hoher Berge auf die Verringerung des Luftdruckes zurückzuführen, der infolgedessen die Muskeln, die das Bein tragen, weniger zu unterstützen vermöge. Es wäre dies ein ähnlicher Irrtum, wie etwa der, wenn man glaubte, man erspare sich das Gewicht eines Korbes zu tragen, wenn man diesen, statt ihn in der Hand zu halten, an das Handgelenk angebunden tragen würde. Hierdurch können offenbar nur jene Muskeln entlastet werden, welche den Zusammenhang zwischen Korb und Arm herzustellen haben, nicht aber die übrigen Muskeln, welche den Körper

mitsamt dem Korbe zu tragen haben. Die Arbeitsleistung des Menschen im ganzen ist genau dieselbe, ob er den Korb angebunden oder in der Hand trägt; also auch ob das Bein durch Muskeln oder durch Luftdruck am Körper festgehalten wird.

Wenn wir oben nachgewiesen haben, daß der Luftdruck dem menschlichen Körper keinen Schaden zufügen kann, so ist dies nicht mehr gültig für die Veränderungen des Luftdruckes, insbesondere, wenn sie rasch erfolgen. Nimmt der Luftdruck so rasch ab, daß die Luft in den Hohlräumen nicht Zeit findet, sich durch Kanäle oder Poren mit der äußeren Luft ins Gleichgewicht zu setzen, so übt sie einen Druck auf die Gefäße aus, welcher Störungen des Wohlbefindens verursachen kann. Es erklären sich dadurch die Atembeschwerden bei Besteigung hoher Berge, das Hervorströmen von Blut aus Nase und Ohren bei Luftschiffern, schmerzliche Empfindungen bei Änderungen der Witterungsverhältnisse.

Außerdem hat die Verminderung des Luftdruckes eine ähnliche physiologische Wirkung wie eine Verminderung des Sauerstoffgehaltes der Luft. Die Absorption des Sauerstoffs durch das Blut in der Lunge hängt nämlich von dem Partialdrucke desselben (d. i. dem Drucke, den der Sauerstoff allein ohne den Stickstoff ausübt) ab. Dieser wird aber durch Verminderung des Totaldruckes der beiden Gase ebenfalls vermindert, so daß also in dieser Hinsicht verdünnte Luft wirkt wie sauerstoffärmere. Hieraus erklärt sich auch die günstige Wirkung des Einatmens von in Schläuchen mitgenommenem Sauerstoffgas durch die Luftschiffer.

Auch die Luftverdichtung, welcher beispielsweise die Taucher in der Taucherglocke in größerer Meerestiefe ausgesetzt sind, hat störenden Einfluß auf den Organismus, der um so merklicher ist, je rascher die Verdichtung erfolgt. (Caissonkrankheit bei Arbeitern unter Wasser.)

§ 163. Das Gesetz von Boyle (Mariotte); Reduktion eines Gasvolumens auf Normaldruck. Wenn man ein Gas oder Gasgemisch, z. B. von einem gegebenen Volumen V und einem Anfangsdruck P durch Kompression oder Expansion auf ein anderes Volumen V' bringt und dafür sorgt, daß die dabei eintretenden Änderungen der Temperatur wieder aufgehoben werden, so daß also das Gas nachher wiederum dieselbe Temperatur hat wie vorher (isothermische Kompression), so gilt, wenn P' den neuen Druck des Gases bedeutet, mit sehr großer Annäherung die Proportion:

$$V : V' = P' : P,$$

woraus auch folgt:

$$VP = V'P'.$$

Dieses Gesetz, welches zuerst von R. Boyle 1662, dann nochmals von Mariotte 1679 ausgesprochen wurde, ist bisher in Deutschland und Frankreich meist unter dem Namen Mariottesches Gesetz bekannt gewesen. In Worten ausgedrückt lautet es: Bei gleicher Temperatur verhalten sich die Volumina eines Gasquantums verkehrt wie die Druckkräfte desselben; oder: Solange die Temperatur eines Gasquantums dieselbe bleibt, ist das Produkt aus Volumen und Druck desselben eine konstante Größe.

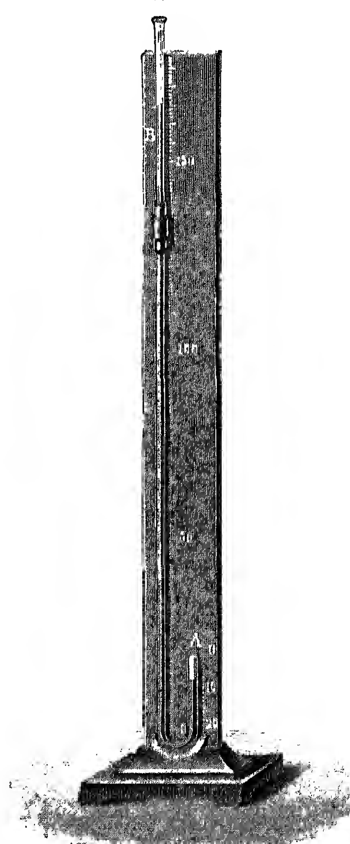
Um dieses wichtige Gesetz durch den Versuch zu beweisen, nehme man eine gekrümmte zylindrische Röhre, deren kürzerer Schenkel oben geschlossen

st, während der längere Schenkel offen bleibt, Fig. 469, und welche auf inem Brette befestigt ist. Man gieße zu Anfang nur wenig Quecksilber ein, eige dann den Apparat ein wenig, damit etwas Luft aus dem kürzeren Schenkel entweicht; so kann man es leicht dahin bringen, daß das Quecksilber in beiden Schenkeln gleich hoch steht, Fig. 470. Alsdann ist die ı dem geschlossenen Schenkel abgesperrte Luft genau dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt. Gießt man nun von ieuem Quecksilber in len offenen Schenkel, so ird der Druck, den lie eingeschlossene Luft uszuhalten hat, vernehrt, sie wird dadurch uf einen kleineren Raum zusammengepreßt. Wenn das Quecksilber m kürzeren Schenkel bis zum Punkte N, Fig. 471, gestiegen ist, welcher sich in der Mitte zwischen M und dem Gipfel A der geschlossenen Röhre befindet, so ist lie Luft auf die Hälfte hres vorherigen Volunens zusammengepreßt; bezeichnet man nun auf dem längeren Schenkel den Punkt N', welcher mit N gleiche Höhe hat, und mißt man dann, wie hoch las Quecksilber sich im längeren Schenkel noch über N' erhebt, so findet man, daß die Höhe dieser Quecksilbersäule genau der Barometerhöhe gleich ist; die in dem kurzen Rohre abgeschlossene Luft hat demnach jetzt einen Druck von **zwei** Atmosphären auszuhalten.

Fig. 470. Fig. 471.



Fig. 469.



Solche Versuche kann man mit verschiedenen Drucken wiederholen. Stets erhält man den auf das abgesperrte Gas ausgeübten Druck, indem man zu der Niveaudifferenz des Quecksilbers im offenen und geschlossenen Schenkel die Höhe des Barometers addiert. Die so ermittelten Drucke werden den zugehörigen Werten des Gasvolumens nahe verkehrt proportional sein. Die etwaigen Abweichungen sind meist Temperatureinflüssen zuzuschreiben. Das Gas wird nämlich durch die Kompression erwärmt, man muß daher abwarten bis es sich wieder auf die ursprüngliche Temperatur abgekühlt hat. Es ist bequem, wenn der Apparat, Fig. 469, mit einem Hahn am Ende der geschlossenen Röhre (aus Glas oder Stahl) und mit einem ebensolchen zum Ablassen des Quecksilbers aus dem Apparate an der tiefsten Stelle versehen ist.

Um das Gesetz von **Boyle** auch für Drucke unter einer Atmosphäre nachzuweisen, kann man sich des Apparates Fig. 472 bedienen.

endet und unten geschlossen ist, wird in einem Gestelle, wie es Fig. 472 zeigt, so angebracht, daß sie vertikal steht, und dann ungefähr bis zur Höhe nn mit Quecksilber vollgegossen. Nun füllt man eine Barometerröhre, wie zum Torricellischen Versuche, mit Quecksilber, jedoch nicht ganz voll, sondern

Fig. 472.

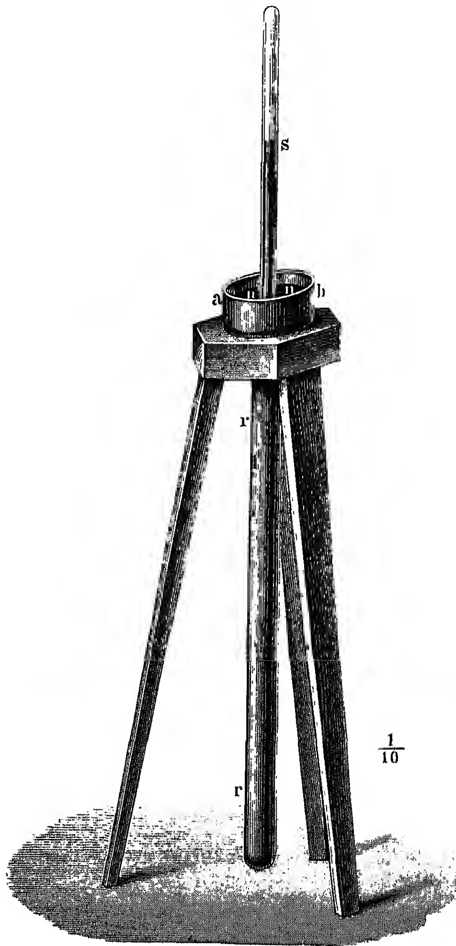
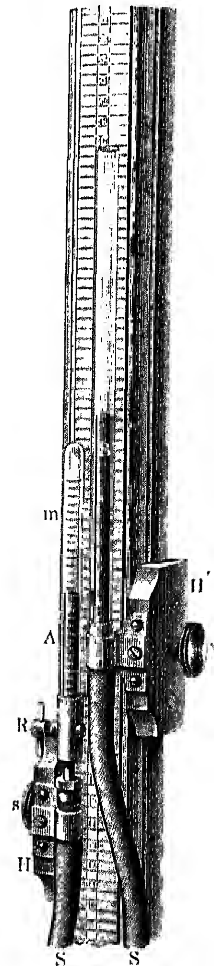


Fig. 473.



nur so weit, daß noch etwa 5 bis 7 cm nicht mit Quecksilber angefüllt sind. Kehrt man die Röhre um, nachdem man die Öffnung mit dem Finger geschlossen hat, so wird die Luftblase in den oberen Teil der Röhre hinaufsteigen. Wenn man nun, wie bei dem Torricellischen Versuche, das untere Ende der Röhre in das Quecksilber des Gefäßes ab taucht und dann den Finger von der Öffnung wegzieht, so wird die Quecksilbersäule im Barometerrohre bis auf einen bestimmten Punkt fallen. Man wird aber sogleich bemerken, daß der Gipfel s der Quecksilbersäule nicht so hoch über nn steht, als die Barometerhöhe beträgt, weil ja im oberen Teile unserer Röhre sich Luft befindet und kein Vakuum wie beim Barometer.

Wenn man die Röhre niederdrückt, so daß sie weiter und weiter in das Quecksilber des Rohres r hinabreicht, so wird das Volumen der oben eingeschlossenen Luft immer kleiner. Man drückt nun die Röhre so weit hinab, daß das Quecksilber in derselben genau in der Höhe des Quecksilberspiegels nn steht; in diesem Falle steht die abgesperrte Luft genau unter dem Drucke einer Atmosphäre.

Die Länge der abgesperrten Luftsäule, welche dem Drucke einer Atmosphäre ausgesetzt ist, wird nun gemessen; sie sei gleich V.

Zieht man nun das Glasrohr wieder in die Höhe, wobei man möglichst vermeidet, die abgesperrte Luft durch Berührung mit der Hand zu erwärmen, so vermehrt sich das Volumen derselben, und gleichzeitig erhebt sich die Quecksilberkuppe um eine gewisse Höhe h über den Spiegel nn. Der Druck, unter dem jetzt die Luft steht, ist gleich dem Luftdrucke weniger dem Drucke der Quecksilbersäule h. Bezeichnen wir das zugehörige Volumen der Luft mit V', den Luftdruck mit H, so muß der Versuch bestätigen, daß

$$V : V' = H - h : H,$$

denselben Versuch kann man dann bei verschiedenen Erhebungen des Rohres wiederholen.

Die beiden Apparate, Fig. 469 und Fig. 472, sind mit Vorteil ersetzbar durch den in Fig. 473 abgebildeten Apparat. Derselbe besteht aus einer Säule mit Dreifuß, welche an der Vorderseite einen Maßstab, der nach Millimetern geteilt ist, trägt. Ein einfacher Mechanismus gestattet, zwei Träger vertikal zu verschieben und nach Bedürfnis festzustellen, an welche zwei kurze stählerne Rohrstücke angeschraubt sind.

In das rechtsseitige dieser Rohrstücke ist von oben eine offene Glasröhre B eingekittet, von unten ein Kautschukschlauch S angebunden. Das andere Rohrstück ist unten mit dem anderen Ende desselben Schlauches verbunden; oben trägt es mittels konischen Ansatzes und Überwurfschraube u ein mit Hahn R versehenes Stahlrohr, in welches ein oben geschlossenes, mit Volumenskala versehenes Glasrohr A eingekittet ist. Man füllt das Glasrohr A beiläufig zur Hälfte mit Luft, zur anderen Hälfte mit Quecksilber, befestigt die Überwurfschraube auf dem mit Quecksilber angefüllten Schlauche und gibt nun zunächst den beiden Trägern eine solche Höhe, daß das Niveau beider Quecksilberkuppen gleich hoch steht. Das abgelesene Luftvolumen V entspricht dann dem Atmosphärendrucke H. Hebt man dann die Röhre B oder senkt dieselbe, so erhält man eine Druckdifferenz des Quecksilbers h', bzw. $-h''$, wobei wir einen Überdruck auf der rechten Seite positiv bezeichnen. Sind die dabei abgelesenen Volumina V' und V'', so muß sich bestätigen, daß

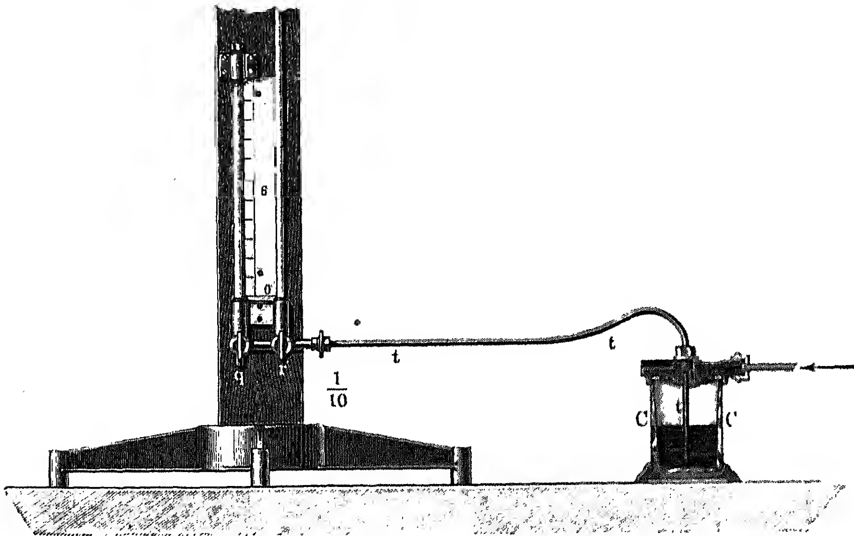
$$V : V' = H + h' : H$$
$$V : V'' = H - h'' : H.$$

Ersetzt man die rechtsseitige Glasröhre durch eine oben mit Stahlhahn oder Glashahn versehene, um 760 mm längere Röhre, so kann man den Luftdruck H durch den Druck einer äquivalenten Quecksilbersäule ersetzen. Man senkt zu diesem Zwecke das Rohr B, bis alle Luft aus demselben durch den geöffneten Hahn vollständig entwichen ist, verschließt dann den Hahn und verfährt wie früher. Man beobachtet dann direkt die Überhöhen $H + h'$ und $H - h''$. Das Rohr B spielt dabei offenbar die Rolle des Baro-

meters. Für genauere Versuche müßte es freilich auch wie dieses ganz luftfrei gefüllt werden.

Um das Gesetz von Boyle für Drucke zu prüfen, welche zwei Atmosphären übersteigen, muß man sich stärkerer Apparate und höherer Quecksilbersäulen bedienen. Fig. 474 zeigt die Abbildung eines solchen, wie er in der mechanischen Werkstätte zu Genf konstruiert wurde. *CC* ist ein starkes Glasgefäß, welches oben luftdicht geschlossen und zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt ist. Die Röhre *t* geht fast auf den Boden des Druckgefäßes *C*, in welchem sich über dem Quecksilber Wasser oder Luft befindet.

Fig. 474.



Wird nun durch die Druckpumpe einer kleinen hydraulischen Presse ferner Wasser oder mit einer Luftkompressionspumpe ferner Luft in *C* eingepumpt, so wird das Quecksilber durch die Röhre *t* gleichzeitig in die Manometerröhre und die Druckröhre hinübergespreßt, in welcher es auf diese Weise gleichförmig steigt.

Arago und Dulong haben durch eine besondere Versuchsreihe dargetan, daß das Boylesche Gesetz wenigstens für atmosphärische Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären noch keine erhebliche Änderung erleidet. Die aus 13 sechsfüßigen Glasröhren mittels eiserner Fassungen zusammengesetzte Druckröhre ihres Apparates war an einem Mastbaume befestigt, welcher in einem Turme des Collège de France aufgerichtet worden war. Der kurze Schenkel war 1,7 m lang und 5 mm weit. Das Quecksilber wurde durch eine Druckpumpe in die beiden Röhren in ähnlicher Weise eingepreßt, wie wir es oben beim Genfer Apparate gesehen haben. Eine genaue Beschreibung des Apparates von Arago und Dulong, sowie der mit demselben angestellten Versuche findet man im 18. Bande von Poggendorffs Annalen.

Régnault hat die Richtigkeit des Gesetzes von Boyle für verschiedene Gase geprüft, indem er ermittelte, welchen Druckes es bedurfte, um diese Gase auf die Hälfte ihres Volumens zusammenzudrücken. Ist der Anfangs-

in Fig. 34 durch die starken Linien angedeutet und welches in Fig. 35 für sich allein dargestellt ist. Es ist dies die Grundgestalt des Kalkspats.

Fig. 36 zeigt eine Kombination dieses Rhomboeders mit der regulären sechsseitigen Säule.

Während aus der doppeltsechsseitigen Pyramide, Fig. 34, durch Wachsen der einen Hälfte der Flächen das Rhomboeder Fig. 35 entsteht, so entsteht

Fig. 34.

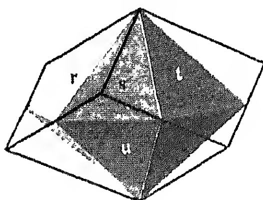


Fig. 35.

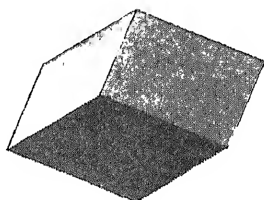
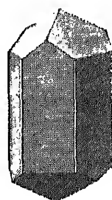


Fig. 36.



durch Wachsen der anderen Hälfte der Flächen die Grundgestalt des Rhomboeders Fig. 37. Die beiden Rhomboeder Fig. 35 und Fig. 37 sind nur

Fig. 37.

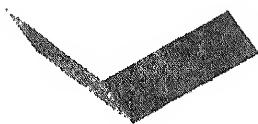


Fig. 39.

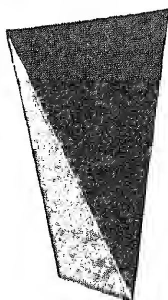


Fig. 40.

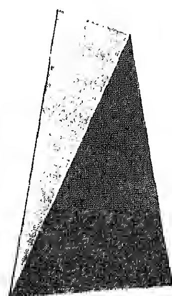


Fig. 38.

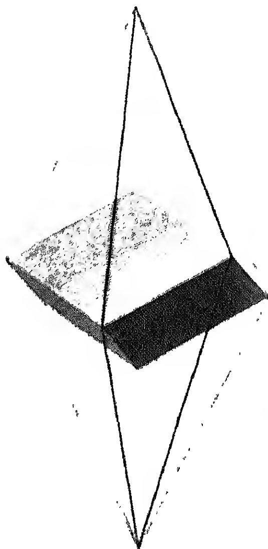


Fig. 41.

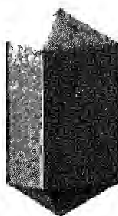
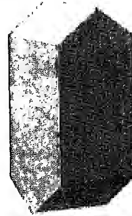


Fig. 42.



durch ihre Stellung verschieden, im übrigen aber vollkommen gleich, so daß man jedes durch Drehung auch in die Stellung des anderen bringen kann; wir haben also hier gleichfalls ein Beispiel der überdeckbaren Hemiedrie.

druck und das Anfangsvolumen des untersuchten Gases $= P$ und V, der nachher beobachtete Druck P', das zugehörige Volumen V', so sollte der Quotient

$$\frac{P V'}{P' V'} = 1$$

sein. Ein abweichender Wert zeigt an, inwieweit das Gesetz von Boyle unzureichend ist.

Als Régnault für P und P' die Drucke von einer und zwei Atmosphären anwendete, erhielt er für das obige Zahlenverhältnis folgende Werte:

Wasserstoff	0,999	Kohlendioxyd	1,008
Stickstoff	1,001	Chlorwasserstoff	1,009
Sauerstoff	1,002	Schwefelwasserstoff . . .	1,011
Stickoxyd	1,003	Ammoniak	1,019
Kohlenoxyd	1,003	Schweflige Säure	1,021
Grubengas	1,006	Cyangas	1,024
Stickoxydul	1,007		

Diese Tabelle läßt erkennen, daß wenigstens die ersteren dieser Gase bei gewöhnlicher Temperatur und mäßiger Drucksteigerung dem Gesetze von Boyle so genau unterworfen sind, daß dasselbe in den meisten Fällen als gültig angenommen werden kann. Für höhere Drucke und niedrigere Temperaturen ist dies, wie wir später erfahren werden, nicht mehr der Fall.

Aus dem oben Mitgeteilten folgt, daß die Messung eines Gasvolumens nur dann mit anderen Messungen dieser Art vergleichbaren Wert ergeben kann, wenn dabei derselbe Druck geherrscht hat. Man ist übereingekommen, alle Gasmessungen auf den Druck von 760 mm Quecksilber als Normaldruck zu beziehen, und wenn sie bei anderem Drucke gemacht sind, auf diesen Normaldruck zu reduzieren. Unter Annahme der Gültigkeit des Gesetzes von Boyle geschieht dies einfach in folgender Weise:

Ist V das beim Drucke H gemessene Volumen (wobei H in Millimetern angegeben ist), so ist das Volumen V_n beim Normaldruck 760 gegeben durch:

$$V_n = V \cdot \frac{H}{760}.$$

Eine Gasmenge nehme z. B. unter einem Drucke von 500 mm das Volumen von 84 ccm ein, so würde dieselbe Gasmenge unter einem Drucke von 760 mm das Volumen

$$V = \frac{500}{760} \cdot 84 = 55{,}2 \text{ ccm}$$

einnehmen.

Das Volumen der Gase ist in hohem Grade auch von der Temperatur beeinflußt. Wir werden darüber in der Wärmelehre ausführlich berichten. Da wir aber die Reduktion auf 0° C schon früher benötigen, so teilen wir hier vorläufig mit, daß man das Volumen V_t eines Gases bei der Temperatur t auf das Volumen bei $0^0 = V_0$ umrechnet, indem man

$$V_0 = \frac{V_t}{1 + \alpha t}$$

setzt, wobei α nach dem Gesetze von Charles (Gay-Lussac) für alle Gase nahe denselben Wert

$$\alpha = 0{,}00367$$

hat. Die vollständige Formel für die Reduktion eines Gasvolumens vom Drucke h und der Temperatur t auf 760 mm und 0° lautet demnach:

$$V_{760,0} = V_{ht} \frac{h}{760\,(1 + \alpha t)}.$$

§ 164. Manometer. Apparate, welche wie der in Fig. 474 abgebildete dazu dienen, den Druck von Gasen oder Dämpfen zu messen, welche in einem Raume eingeschlossen sind, heißen Manometer. Es gibt deren nach verschiedenen Systemen, insbesondere unterscheidet man offene und geschlossene Manometer.

In Fällen, wo der zu messende Druck nur gering ist, wendet man für den fraglichen Zweck Flüssigkeitssäulen an, welche in doppelt gebogenen Röhren, Fig. 475 und 476, enthalten sind. Das eine Ende a des Manometerrohres wird mittels eines Korkes in eine entsprechende Öffnung des Gasbehälters eingesetzt, oder mittels einer Messingfassung auf dieselbe aufgeschraubt. Ist nun der Druck des Gases auf den Gipfel der Flüssigkeitssäule im Schenkel bc größer als der Druck der atmosphärischen Luft, welcher auf die Flüssigkeitssäule in dc wirkt, so muß die Flüssigkeit im äußeren Schenkel cd höher stehen als im inneren.

Solche Manometer wendet man zur Messung des Druckes an, unter welchen das Gas in den Gasometern und Leitungsröhren der Gasbeleuchtungsanstalten steht. Als Sperrungsflüssigkeit dient in diesem Falle gefärbtes Wasser. Die Fig. 477 zeigt eine andere Form des offenen Hebermanometers.

Ganz ähnlich sind die Manometer konstruiert, durch welche der Luftdruck in Gebläsen gemessen wird und welche den Namen der Windmesser führen.

Zu diesen Manometern können wir auch die Welterschen Sicherheitsröhren rechnen, welche Fig. 478 und 479 in zwei verschiedenen

Fig. 475.



Fig. 476.

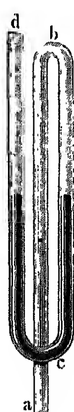


Fig. 477.

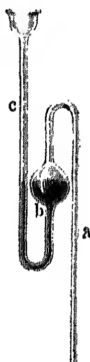


Fig. 478.

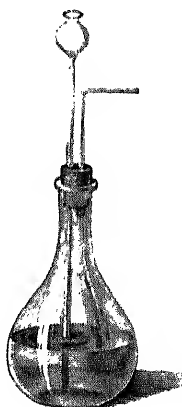
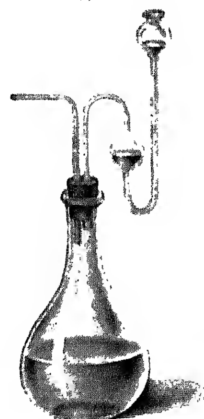


Fig. 479.



Formen dargestellt sind. Durch den Kork, welcher das Glasgefäß, Fig. 478, verschließt, in welchem ein Gas entwickelt werden soll, gehen zwei Röhren hindurch. Die eine, nicht weiter in das Gefäß hinunterführend, ist die Abzugsröhre für das entwickelte Gas, die andere, bis in die Flüssigkeit hinunter-

reichend, ist die Sicherheitsröhre. Soll das Gas ausströmen, so muß der Gasdruck im Inneren des Glasgefäßes größer sein als der Druck der äußeren Luft, die Flüssigkeit wird also in der Sicherheitsröhre in die Höhe getrieben, und aus der Höhe der in derselben stehenden Flüssigkeitssäule erkennt man die Größe des Überdruckes im Inneren des Gefäßes. In gleicher Weise kann man die Größe des Gasdruckes im Gefäße Fig. 479 aus der Niveaudifferenz der Sperrflüssigkeit in der doppelt gebogenen Röhre erkennen.

Für höhere Drucke wird das Quecksilbermanometer verwendet. Régnault hatte ein solches von über 23 m Höhe angewendet, welches aus mehreren durch Stahlfassungen zusammengeschraubten Glasröhren bestand. Ein eigener Fahrstuhl, den der Beobachter selbst mittels eines Mechanismus auf und nieder bewegen konnte, ermöglichte die Ablesungen in verschiedener Höhe. Noch viel weiter gelangten Amagat und Cailletet, welche in stählernen Röhren, die sie teils an Berglehnen (auch am Eiffelturm) hinaufführten, teils in Schachte versenkten, Quecksilbersäulen bis zu 325 m Höhe anwendeten, womit Drucke bis zu 430 Atmosphären gemessen werden konnten. Wir kommen darauf in einem der nächsten Paragraphen zu sprechen.

Fig. 480.

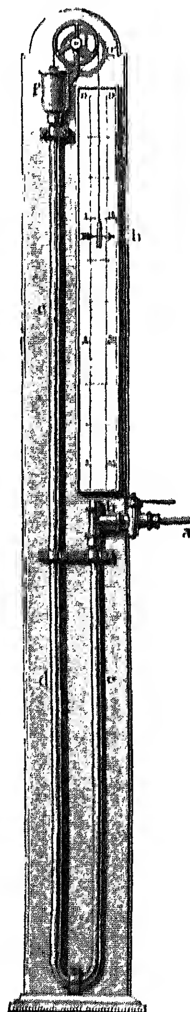


Fig. 480 zeigt die Einrichtung eines Quecksilbermanometers mit eiserner Röhre, wie es bei stationären Dampfmaschinen angewendet wird. Die Röhre *a* kommuniziert mit dem Raume, dessen Spannung gemessen werden soll. Die Höhe der Quecksilberkuppe in der undurchsichtigen Röhre *de* wird mittels eines eisernen Schwimmers ermittelt, welcher durch sein Steigen und Sinken das Gegengewicht zum Sinken und Steigen bringt. Die vertikale Skala enthält eine Einteilung nach Atmosphären oder nach Kilogrammen pro Quadratcentimeter.

Ein neuerdings von M. Thiesen[1]) wieder aufgegriffener Gedanke, welcher darauf ausgeht, die hohe Quecksilbersäule in eine Anzahl kleinerer zu zerlegen, ist durch die schematisch im Durchschnitt gezeichnete Fig. 481 verständlich gemacht. In zwei horizontale Stahlröhren ist eine Reihe von vertikalen Glasröhren in der ersichtlichen Weise eingesetzt. Eine Anzahl von Hähnen gestattet, oben die Kommunikation zwischen den Röhren 1 und 2, 3 und 4 usw., unten zwischen den Röhren 2 und 3, 4 und 5 usw. herzustellen oder aufzuheben. Der Apparat wird zur Hälfte mit Quecksilber, zur anderen Hälfte mit Wasser gefüllt. Das linksseitige Ende der oberen Stahlröhre wird mit dem Raume, in dem der Druck gemessen werden soll, verbunden.

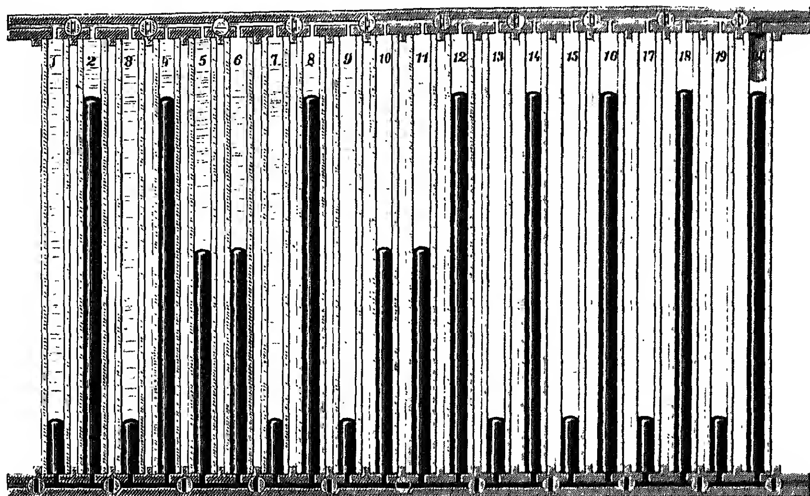
Der Gesamtdruck setzt sich dann zusammen aus der Summe der Überhöhen der Quecksilbersäulen weniger der Summe der auf Quecksilber reduzierten Überhöhen der Wassersäulen.

---

[1]) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1881.

Ist der Druck so gering, daß man nicht alle Partialdrucke benötigt, so kann man einzelne Manometer ganz ausschalten, indem man die betreffenden Hähne öffnet. So z. B. erscheint in der Figur der Hahn oben zwischen 5 und 6, unten zwischen 10 und 11 geöffnet. Dadurch gleicht sich der Niveauunterschied in den zur Verbindung gebrachten Röhren aus, während er in den übrigen entsprechend größer wird. Sind sämtliche Röhren gleicher

Fig. 481.



Dimension, so braucht nur an den letzten beiden die Beobachtung gemacht zu werden, der dort gemessene Druck ist einfach mit der Zahl der Röhrenpaare zu multiplizieren. In diesem Falle könnten auch die Röhren bis auf die beiden letzten aus Stahl angefertigt sein. An Genauigkeit wird aber dieses Manometer dem einschenkeligen stets nachstehen müssen.

Alle Manometer, die wir bisher betrachtet haben, sind auf der einen Seite offen, so daß hier der Druck der Atmosphäre wirken kann. Die geschlossenen Manometer haben die Form eines Gefäß- oder Heberbarometers, jedoch mit dem Unterschiede, daß der Vakuumraum mit Luft oder einem anderen Gase gefüllt ist, so daß der hervorgebrachte Druck vorzugsweise durch die Kompression der in der Röhre abgesperrten Luft gemessen wird. Dabei wird in der Regel das Boylesche Gesetz als richtig vorausgesetzt, was aber, wie wir alsbald hören werden, für höhere Drucke nicht mehr zulässig ist. Fig. 482 zeigt einen auf demselben Prinzip beruhenden Apparat, wie er auf Dampfkessel oder Dampfleitungen aufgeschraubt werden kann. Durch den Kanal *a* verbreitet sich der Dampfdruck in den von allen Seiten luftdicht verschlossenen Raum *b*. In demselben steht, auf dem Boden befestigt, ein eisernes, zum Teil mit Quecksilber gefülltes Gefäß, und in dieses taucht eine mit Luft gefüllte Glasröhre ein. Der Druck des Dampfes treibt das Quecksilber in das Rohr, wodurch die eingeschlossene Luft komprimiert wird. Wenn sie auf $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ usw. ihres ursprünglichen Volumens komprimiert ist, so übt sie einen Druck von 2, 4, 8 usw. Atmosphären auf den Gipfel der Quecksilbersäule aus. Der Druck der letzteren ist dann zu jener der Luft hinzuzuaddieren.

Um das Kompressionsrohr besser zu schützen, ist es meist von einem mit zwei diametral gegenüberliegenden 4 bis 5 mm breiten Schlitzen versehenen Metallrohr umgeben, auf welchem auch die Skala angebracht ist.

Wenn die Röhren solcher Kompressionsmanometer zylindrisch sind, so werden natürlich die Abteilungen der Skala, welche gleichen Druckdiffe-

Fig. 482.

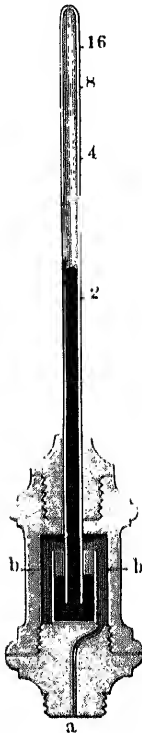
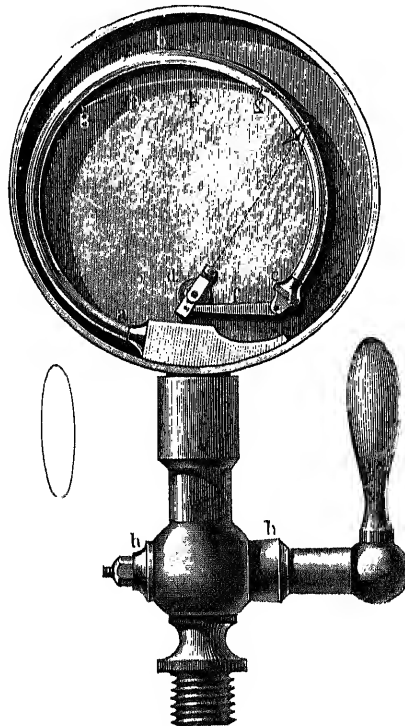


Fig. 483.



renzen entsprechen, nach oben hin sehr rasch abnehmen. Um dies zu verhindern, macht man die Röhren oft von unten nach oben verjüngt, ganz oben aber in eine kugelförmige Erweiterung auslaufend.

Endlich werden jetzt häufig Manometer ohne Quecksilber nach dem Prinzip des Bourdonschen Metallbarometers angewendet. Fig. 483 zeigt ein solches Instrument, dessen Einrichtung nach dem, was wir im § 160 vorgetragen, wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

Dieses Manometer hat den großen Vorzug, daß es nicht zerbrechlich und dabei leicht transportabel ist. In der Tat wird es auf Lokomotiven und Lokomobilen vielfach angewandt.

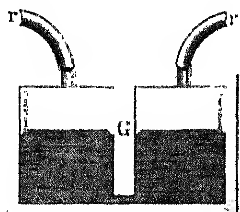
Auch das dem Metallbarometer von Vidi zugrunde liegende Prinzip ist zu manometrischen Messungen verwendet worden. W. C. Röntgen[1]), M. Th. Edelmann[2]), Fr. Kohlrausch[3]), Dieterici[4]) u. a. haben durch Verbin-

[1]) Pogg. Ann. **148**, 580; Wiedem. Ann. **4**, 305.
[2]) Edelmanns „Neuere Apparate", S. 134.
[3]) Pogg. Ann. **150**, 423 (1873).
[4]) Wiedem. Ann. **50**, 55 (1893), **62**, 624 (1897).

dung desselben mit der Spiegelablesung Apparate (Pneumatometer) he stellt, welche außerordentlich kleine Druckänderungen zu messen gesta

Um kleine Druckdifferenzen zu messen gibt man dem Manometer in Fig. 484 im Vertikalschnitt skizzierte Form. Das aus zwei kommunizie den Kammern bestehende, vorn und rückw offene Metallgefäß *b* wird durch aufgelegte G platten verschlossen, deren rückwärtige Vertikalteilung in halbe Millimeter besitzt. D Röhren *r* und *r'* führen zu den Räumen, d Druckdifferenz gemessen werden soll. Mi zweier Mikroskope visiert man von vorn die Quecksilbermenisken oder besser auf Mitte zwischen der nächsten sichtbaren Teilu linie und ihrem Spiegelbilde im Quecksi

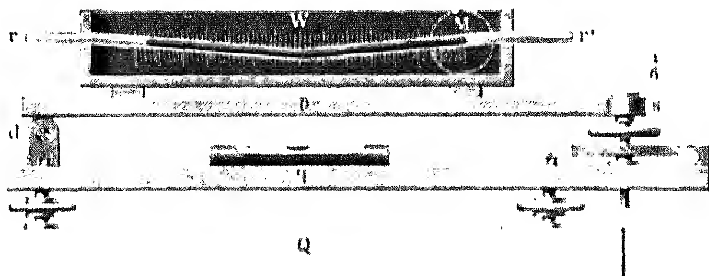
Fig. 484.



Eine mit dem Apparat verbundene Libelle sichert gegen Schiefstellung Teilung [1]).

Eine andere zur Messung sehr kleiner Druckdifferenzen geeignete richtung ist **Toeplers** Drucklibelle [2]), von welcher Fig. 485 eine schemati Abbildung in ungefähr $^1/_6$ der nat. Größe gibt. Ihr Hauptbestandteil ist in der Mitte ein wenig geknickte 3 bis 3,5 mm weite, 30 cm lange Glasr

Fig. 485.



deren Enden mit den Räumen, deren Druckdifferenz gemessen werden durch elastische Glasröhren in Verbindung stehen. Die Röhre enthält etwa 25 cm langen Faden einer nicht flüchtigen, leicht beweglichen Flü keit (Xylol) und ruht in einem Wasserbade *W* mit Glaswänden unmitt vor einer Millimeterteilung. Das Bad selbst ruht auf der Metallplat welcher in der aus der Figur ersichtlichen Weise verschiedene Neigung geben werden kann. Die Größe des Neigungswinkels ist an der Tromme Elevationsschraube *s* zu messen. Ein an der Platte *P* befestigtes, horizontal g die rechtsseitige Kuppe der Flüssigkeit gerichtetes Mikroskop *M* gestatte Stellung dieser Kuppe mit Bezug auf die Millimeterskala genau zu b achten. Ist die erste Beobachtung bei Druckgleichheit beiderseits gem so läßt sich eine eintretende Druckdifferenz entweder aus der Verschie der Kuppe, oder durch die Elevation, welche diese Verschiebung rückgä macht, ermitteln. Die Genauigkeit der Methode hängt natürlich von

[1]) **Thiesen** u. **Scheel**, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20, 345 (1900); 21 (1901).

[2]) Wiedem. Ann. 34, 790 (1888) und 56, 609 (1895).

Winkel 2α ab, um den die Schenkel geknickt sind. Ist das spezifische Gewicht der angewendeten Flüssigkeit $= s$, so entspricht einer Verschiebung von l cm eine Druckdifferenz $= (2\,s\, sin\,\alpha)\,l$ Gramm pro Quadratcentimeter. Ist die Verschiebung durch eine Elevation von φ^0 kompensiert, so ist die Druckdifferenz $= s\,a\, sin\,\varphi$, wo a den Abstand der Kuppen bedeutet. Nach dieser Methode konnte Toepler noch Druckdifferenzen von $^1/_{100\,000\,000}$ Atmosphären messen.

§ 165. Stereometer und Volumenometer. Eine sehr sinnreiche Anwendung hat zuerst der französische Physiker Say von dem Boyleschen Gesetze gemacht, um das Volumen pulverförmiger Körper zu bestimmen. Später sind Apparate, auf dieselbe Methode gestützt, von verschiedenen Physikern, namentlich von Leslie, Kopp und Régnault vorgeschlagen worden. Says Apparat, Fig. 486, welchen derselbe Stereometer genannt hat, besitzt folgende Einrichtung.

An das Glasgefäß A setzt sich eine möglichst genau zylindrische Glasröhre an. Der Rand des Gefäßes ist mit Schmirgel abgeschliffen, so daß der innere Raum mittels einer Glasplatte luftdicht abgesperrt werden kann. Das

Fig. 486.

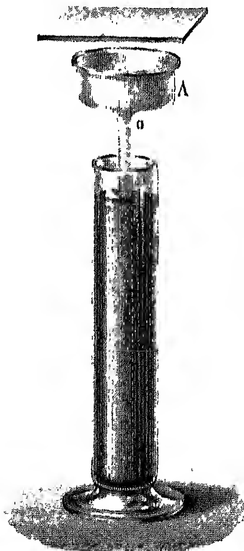
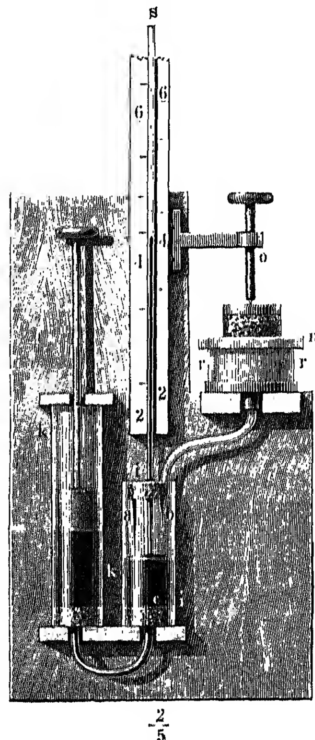


Fig. 487.



$\frac{2}{5}$

Rohr ist mit einer Längenteilung versehen und genau bestimmt, welches der dem Zwischenraume zweier Teilstriche entsprechende Rauminhalt der Röhre ist.

Während der Behälter A offen ist, wird die Röhre in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß bis zum Nullpunkte o der Teilung eingetaucht. Wird alsdann die Glasplatte auf den Rand von A luftdicht aufgesetzt, so ist ein bestimmtes Luftvolumen V von einer Dichtigkeit abgesperrt, welche dem Barometerstande H entspricht.

Wird nun, während A geschlossen bleibt, das Instrument in die Höhe gezogen, so tritt ein Teil der Luft aus A in die Röhre, während das Quecksilber von unten her in derselben über das äußere Niveau steigt. Es sei v die durch Ablesung an der Röhre ermittelte Zunahme des Luftvolumens, h die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, so haben wir:

$$\frac{V+v}{V} = \frac{H}{H-h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1$$

woraus folgt:

$$V = v \cdot \frac{H-h}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2$$

Wiederholt man denselben Versuch, nachdem man den pulverförmigen Körper, dessen Volumen x man bestimmen will, in das Reservoir A gebracht hat, so ist das Volumen der in A abgesperrten Luft, wenn das Instrument bis zum Nullpunkte eingetaucht ist, gleich $V-x$. Erhebt man die Röhre bis das Volumen der abgesperrten Luft gleichfalls um v zugenommen hat, so hat man:

$$\frac{V-x+v}{V-x} = \frac{H}{H-h'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3$$

wenn h' die diesem Falle entsprechende Hebung der Quecksilbersäule in der Röhre ist. Aus (2) und (3) folgt dann

$$x = v\left[\frac{H}{h} - \frac{H}{h'}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4$$

Das Volumenometer von Kopp ist Fig. 487 ungefähr in 0,4 der natürlichen Größe dargestellt. Die zylindrische Glasröhre $i\,i$ ist oben und unten durch Kork luftdicht verschlossen; unten aber steht $i\,i$ durch ein gebogenes engeres Röhrchen mit dem Glaszylinder k, oben durch ein Glasrohr mit dem Glasgefäße $r\,r$ in Verbindung. Durch den oberen Verschluß des Zylinders i geht noch ein vertikales engeres Glasrohr s hindurch, welches unten und oben offen, fast bis auf den Boden des Zylinders i hinabreicht.

Der obere, etwas breite Rand des Glaszylinders r ist sorgfältig plan abgeschliffen, so daß man mit Hilfe von etwas Fett eine Glasplatte luftdicht aufsetzen kann, welche dann noch durch eine Schraube o fester aufgedrückt wird. In dem Glaszylinder r befindet sich ein zunächst noch leeres Platingefäß.

Der untere Teil von i und k ist mit Quecksilber gefüllt, wie es unsere Figur zeigt. In der Röhre k aber sitzt auf dem Quecksilber ein Lederkolben auf, welcher zwar nicht absolut luftdicht, aber doch quecksilberdicht schließt. Wird dieser Kolben in die Höhe gezogen, so geht das Quecksilber aus i nach k hinüber, das untere Ende c der Steigröhre s wird frei, und es wird sich alsdann der obere Teil von i und das mit demselben in Verbindung stehende Gefäß r mit Luft von atmosphärischer Dichtigkeit füllen.

Sobald aber nun der Kolben in k niedergedrückt und dadurch das Quecksilber nach i getrieben wird, kommt auch das untere Ende des Steigrohres s wieder unter den Quecksilberspiegel, es ist also dadurch ein gewisses Quantum Luft in i und r abgesperrt, welche eben unter atmosphärischem Druck stehend das Volumen V einnahm, welche aber durch ferneres Niederdrücken des Kolbens in k mehr und mehr komprimiert wird. Hat man den Kolben

in k niedergedrückt, bis der Quecksilberspiegel in i eben die Spitze a berührt, welche ähnlich wie beim Fortinschen Barometer von dem oberen Verschluß der Röhre i hinabreicht, so ist die abgesperrte Luft um das Volumen v (den Rauminhalt der Röhre i zwischen c und a) komprimiert, während infolge ihrer Verdichtung das Quecksilber in dem Steigrohre s um die Höhe h über das Niveau des Quecksilbers in i gestiegen ist.

Hat man den eben herrschenden Barometerstand b und die Höhe h der Quecksilbersäule in s beobachtet, so ergibt sich die Gleichung:

$$v : V = h : b + h \quad . . . . (1)$$

Wiederholt man nun denselben Versuch, nachdem man n g Wasser [1]) in das vorher erwähnte Platingefäß eingefüllt hat, so wird in s eine Quecksilbersäule h' gehoben sein, wenn das Quecksilber in i bis zur Spitze a hinaufgepreßt worden ist, und demnach ergibt sich nun die Gleichung:

$$v : V - n = h' : b + h' \quad . . . . (2)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (1) und (2) ergeben sich aber die Werte von v und V, da alle anderen Größen, nämlich h, h' und b, bekannt sind.

Nachdem einmal die Werte von V und v ermittelt sind, ist es leicht, das Volumen x eines beliebigen, und zwar auch eines pulverförmigen Körpers zu bestimmen. Man bringe denselben nur in das in r befindliche Platingefäß und wiederhole den Versuch ganz in der oben angegebenen Weise. Es sei nun B der jetzt herrschende Barometerstand und H die Höhe, bis zu welcher die Quecksilbersäule in s über die Spitze a gehoben ist; wenn das Quecksilber in i oben die Spitze a berührt, so haben wir die Gleichung:

$$B + H : B = V - x : V - x - v,$$

aus welcher sich x berechnen läßt.

Eine zweite Drahtspitze b dient zu Kontrollversuchen. An der Steigröhre sind zwei Skalen angebracht, der Nullpunkt der einen ist a, der der anderen aber b. Die Höhe der Steigröhre beträgt etwa 40 cm.

Für solche Substanzen, welche bei höherem Drucke eine größere Quantität Luft absorbieren, wie dies z. B. bei der Kohle der Fall ist, läßt sich natürlich auch dieses Instrument nicht anwenden.

Hat man mit Hilfe des Koppschen Volumenometers das Volumen und durch die Wage das absolute Gewicht des zu untersuchenden Körpers bestimmt, so ist sein spezifisches Gewicht leicht zu berechnen.

Die folgende Tabelle enthält das spezifische Gewicht einiger Körper, wie es Kopp mit Hilfe seines Instrumentes bestimmte.

Körper	Spezif. Gewicht	Körper	Spezif. Gewicht
Bimsstein (gepulvert)	2,15	Holzfaser von Lindenholz	1,13
Asche von Buchenholz . . .	2,85	Holzfaser von Tannenholz	1,16
Stärkemehl	1,56	Holzfaser von Nußbaumholz	1,17
Flachs	1,45	Holzfaser von Birnbaumholz	1,23
Seide (rohe Kokonfäden) . .	1,56	Holzfaser von Eichenholz	1,27
Baumwolle	1,27	Holzfaser von Buchenholz	1,29

[1]) Statt des Wassers dürfte wegen des Dampfdruckes desselben Quecksilber mehr zu empfehlen sein, von dem dann $\frac{n}{15,596}$ g zu nehmen sind.

Um das spezifische Gewicht der Holzfaser zu erhalten, war das Holz fein geraspelt und gut getrocknet worden. Man sieht hier, daß das spezifische Gewicht der Holzfaser weit größer ist als das eines massiven Holzstückes, daß also das Holzstück ein Aggregat von Holzfaser und Luft ist.

Régnaults Volumenometer ist in Fig. 488 bis 492 abgebildet. A ist ein Glasballon von ungefähr 300 ccm Inhalt. Der Hals desselben trägt eine Metallplatte, welche erlaubt, den Ballon mit Hilfe von vier Schrauben durch Zwischenlegen eines gefetteten Leders (noch besser einer Platte von vulkanisiertem Kautschuk) an den manometrischen Apparat luftdicht zu befestigen.

Fig. 488.

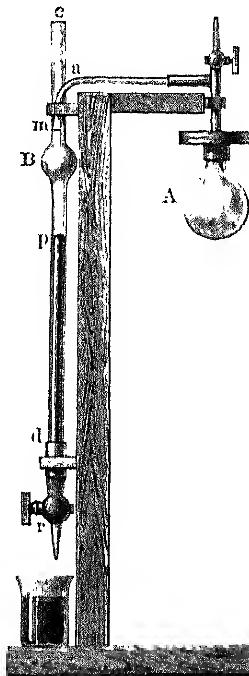


Fig. 489.



Fig. 490.

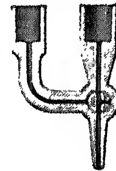


Fig. 491.

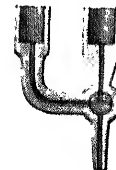
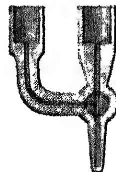


Fig. 492.



Von A führt nun eine Röhre direkt in die Höhe; sie kann durch den Hahn s abgesperrt werden; eine andere führt zu der vertikalen, 14 mm weiten Röhre ab, welche nahe an ihrem oberen Ende zu einer Kugel B erweitert ist. Auf dieser Röhre ist ein Merkstrich bei m und einer bei p gemacht; unten ist sie in eine eiserne Fassung eingekittet und kann mittels des Hahnes r entweder nach unten geöffnet oder mit der Röhre cd in Verbindung gesetzt werden, wie es die Figuren 490 und 491 erläutern.

Das Volumen v der Röhre ab zwischen m und p wird dadurch ermittelt, daß man in der Stellung Fig. 491 bei geöffnetem Hahn s durch die Röhre cd Quecksilber eingießt, bis es bei m steht, und dann durch den in die Stellung Fig. 490 gebrachten Hahn r ausfließen läßt, bis es auf p gesunken ist. Die ausgeflossene Quecksilbermenge wird durch Wägung gemessen.

Um nun das Volumen V der Kugel A und der Röhrenverbindung zwischen A und m zu ermitteln, wird bei angesetztem Ballon A und offenem Hahn s in der Stellung Fig. 491 bis zur Höhe p Quecksilber eingefüllt, dann s ge-

Eine andere wichtige hemiedrische Form des hexagonalen Systems ist das Skalenoeder, Fig. 38. Es ist die Hemiedrie einer symmetrisch zwölfseitigen Pyramide. Charakteristisch für diese Form ist es, daß ihre Seitenkanten wie die eines Rhomboeders liegen, daß man sich also jedes Skalenoeder leicht so vorstellen kann, als ob durch die Seitenkanten eines Rhomboeders Flächen nach einem Punkte der verlängerten Hauptachse gelegt wären, welcher um die *n* fache Länge der vertikalen Halbachse des Rhomboeders von der Mitte des Kristalles absteht.

Fig. 39 und Fig. 40 stellen die unter dem Namen der Sphenoide bekannten beiden Halbflächner eines rhombischen Oktaeders (s. Fig. 20) dar. Die Dreiecke, durch welche diese Tetraeder begrenzt werden, sind ungleichseitig, und deshalb kann man auch das Tetraeder Fig. 40 durch keinerlei Drehung in die Stellung Fig. 39 bringen. Die beiden Körper Fig. 39 und Fig. 40 sind nicht kongruent, sie verhalten sich aber wie Gegenstand und Spiegelbild, wie rechte und linke Hand. Wir haben also hier einen Fall von nicht kongruenter oder nicht überdeckbarer Hemiedrie. Die Sphenoide kommen nicht isoliert vor, sondern nur in Kombinationen mit anderen Flächen, namentlich mit der rhombischen Säule, bei welcher Kombination sich auch die Nicht-Überdeckbarkeit leichter übersehen läßt.

Fig. 41 stellt eine Kombination der geraden rhombischen Säule mit dem rhombischen Oktaeder dar, wie sie den Achsenverhältnissen des Zinkvitriols entspricht. Wenn nun hier nach dem oben für das reguläre Oktaeder angegebenen Gesetze die Hälfte der Oktaederflächen durch Wachsen der benachbarten Flächen verschwindet, so entsteht die Kombination Fig. 42, welche beim Zinkvitriol und beim Bittersalz sehr häufig beobachtet wird.

Bei den Zuckerkristallen tritt die Hemiedrie häufig in der Weise auf, daß die Flächen *d*, Fig. 29, an der vorderen Säulenkante fehlen, während sie an der hinteren vorhanden sind.

§ 12. Chemische Teilbarkeit, Atomtheorie. Durch die mechanische Teilung eines homogenen, d. i. gleichartigen Körpers entstehen stets nur wieder Teile gleicher Art, d. h. gleichen Stoffes. Wir mögen z. B. ein Stück Zinnober noch so fein zerreiben, so bestehen doch die kleinsten Teile wieder aus Zinnober. Und doch besteht derselbe aus Schwefel und Quecksilber, da er durch Zusammenreiben und Erhitzen dieser Stoffe erhalten wird. Dagegen kann durch chemische Einwirkung, durch Wärme oder Elektrizität ein solcher chemisch zusammengesetzter Körper in seine Bestandteile zerlegt werden. So z. B. kann der Zinnober durch Eisen zerlegt werden, indem das letztere sich mit dem Schwefel verbindet und das Quecksilber in Freiheit setzt. Quecksilberoxyd zerfällt durch bloßes Erhitzen in Sauerstoff und Quecksilber. In beiden Fällen erhält man das Quecksilber allerdings zuletzt als zusammenhängende Masse. Offenbar ist dieselbe aber erst durch Zusammenfließen aller der außerordentlich kleinen Portionen entstanden, welche nach und nach aus der Verbindung mit dem Schwefel oder dem Sauerstoff frei geworden sind. Ebenso müssen wir uns vorstellen, daß das entweichende Sauerstoffgas aus den vielen kleinen Sauerstoffteilen sich ansammelt, welche aus den kleinsten Teilen des Zinnobers einzeln frei werden.

Leitet man Wasserstoffgas über erhitztes Eisenoxyd, so trennt sich der Sauerstoff vom Eisen und verbindet sich mit dem Wasserstoff zu Wasserdampf

schlossen und so viel Quecksilber durch cd nachgegossen, bis es im Schenkel ab an die Marke m reicht.

Ist nun h die Überhöhe des Quecksilbers im Schenkel cd, H der Atmosphärendruck, so ist:

$$\frac{V + v}{V} = \frac{H + h}{H},$$

woraus:

$$V = v\frac{H}{h}.$$

Wird dann die nämliche Operation wiederholt, nachdem man vorher den Körper, dessen Volumen x gemessen werden soll, in den Ballon A gebracht hat, und ist diesmal die Überhöhe des Quecksilbers h', so ist:

$$\frac{V - x + v}{V - x} = \frac{H + h'}{H}$$

und endlich:

$$x = vH\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'}\right).$$

Hierbei ist sorgfältig auf Konstanz der Temperatur zu achten.

§ 166. Abweichungen vom Boyleschen Gesetze. Viele Physiker haben sich damit beschäftigt, das Verhalten der Gase unter größerem Drucke zu prüfen. Besonders zu erwähnen sind die Versuche von Oersted und Swendsen, Despretz, Pouillet, Arago und Dulong, Régnault, Andrews, sowie die neueren Untersuchungen von Amagat, von Mendelejeff u. a.

Um zu zeigen, daß verschiedene Gase bei gleicher Drucksteigerung eine ungleiche Verminderung des Volumens erleiden, hat Pouillet den Apparat Fig. 493 konstruiert, den wir als eine Kombination zweier geschlossener Manometer bezeichnen können.

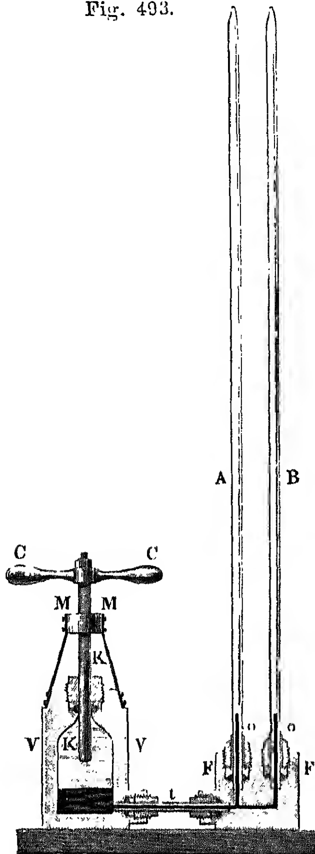
Der Hals des gußeisernen Gefäßes V ist mittels einer Stopfbüchse geschlossen, durch welche der massive Kolben K hindurchgeht; der obere Teil desselben ist mit einem Schraubengewinde versehen, welches sich in der Schraubenmutter M drehen läßt. Aus dem unteren Teile des Gefäßes V führt die eiserne Röhre t zu einem horizontalen Kanal des gußeisernen Klotzes F, auf welchen von oben her zwei vertikale Kanäle münden. Auf diese Kanäle sind die 2 m langen, genau geteilten Glasröhren A und B aufgeschraubt. Oben sind diese Glasröhren offen, aber in eine feine Spitze ausgezogen.

Der untere Teil des Gefäßes V enthält Quecksilber, der obere Teil desselben ist mit Öl gefüllt. Durch Umdrehung des Hebels C wird der Kolben K niedergeschraubt und dadurch das Quecksilber in die Röhren A und B hineingetrieben, bis es die Spitzen derselben erreicht hat. Sobald dies der Fall ist, setzt man die Spitze der einen Röhre mit einer Glocke in Verbindung, welche mit dem zu prüfenden Gase gefüllt ist, während die Spitze der anderen durch eine Trockenröhre mit der äußeren Luft in Verbindung steht. Schraubt man nun den Kolben in die Höhe, so sinkt das Quecksilber langsam in beiden Röhren; die eine füllt sich mit trockener Luft, die andere mit dem Gase der Glocke, beide aber unter dem Drucke der Atmosphäre. Sobald das Quecksilber in beiden Röhren bis zum Punkte o gesunken ist, werden

die Spitzen beider Röhren vor dem Lötrohr zugeschmolzen, und somit ist der Versuch vorbereitet.

Wird nun der Kolben K abermals niedergeschraubt, so wird in der einen der beiden Glasröhren atmosphärische Luft, in der anderen das zu prüfende Gas komprimiert, und man kann bei dieser Vorrichtung den Druck bis auf 100 Atmosphären steigern. Es zeigt sich dabei, daß Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenoxydgas sich nahezu gleich wie Luft verhalten, während diejenigen Gase, welche schon bei relativ geringer Druckerhöhung flüssig werden, wie schweflige Säure, Ammoniakgas, merklich kompressibler sind als Luft.

Fig. 493.



Arago und Dulong bedienten sich zur Prüfung des Boyleschen Gesetzes eines Verfahrens, welches mit dem in § 163 zuerst beschriebenen im wesentlichen übereinstimmte. Nur war der dazu verwendete, nach Art der Fig. 474 konstruierte Apparat mit einer Druckröhre von größerer Höhe versehen. Die genannten Forscher fanden das Volumen der komprimierten Luft stets kleiner als das nach Boyles Gesetz berechnete. Da aber die Abweichungen nur gering waren, hielten sie dies für eine Folge der Beobachtungsfehler.

Eine definitive Lösung erhielt endlich die Frage durch eine von Régnault im Jahre 1845 ausgeführte Untersuchung[1]. Der äußerst zweckmäßig und sorgfältig konstruierte Apparat, dessen er sich bediente, hatte große Ähnlichkeit mit dem in § 163 erwähnten Apparat von Arago und Dulong. Die 3 m lange Manometerröhre war im Inneren nahezu 1 cm weit; ihr unteres Ende kommunizierte mit einer 30 m hohen Druckröhre. Durch eine Druckpumpe wurde das Quecksilber von unten her gleichzeitig in die Manometerröhre und in die Druckrohre hineingepreßt.

Bei den Arago-Dulongschen Versuchen wurde die nämliche Luftmenge, welche in der Manometerröhre ursprünglich eine Länge von 2 m einnahm, durch den Druck einer Quecksilbersäule von 30 m Höhe auf die Länge von 0,0667 m zusammengedrückt, der gleiche Fehler in der Ablesung der Quecksilberkuppe wird deshalb bei hohem Druck auf die Messung des Gasvolumens einen verhältnismäßig viel nachteiligeren Einfluß ausüben als bei geringem Druck. Ein Ablesungsfehler von 1 mm z. B. mußte das ursprüngliche Volumen um $^1/_{2000}$ fehlerhaft angeben, während der gleiche Ablesungsfehler die Bestimmung des Gasvolumens bei einem Drucke von 30 m um $^1/_{66}$ fehlerhaft machte.

[1]) Mém. de l'Acad. d. Scienc. de l'Inst. de France 21.

Régnault hat diesen Übelstand auf folgende Weise vermieden. Statt das untere Manometerrohr oben zuzuschmelzen, setzte er einen sehr gut gearbeiteten, vollkommen sicher schließenden Hahn auf, durch welchen derselbe mit einem kupfernen, mit komprimiertem Gas gefüllten Reservoir in Verbindung gesetzt werden konnte. Ein Merkzeichen war am unteren Ende der Manometerröhre angebracht, und ein zweites in der Mitte derselben, so daß durch dasselbe das Volumen der Röhre vom Hahn bis zum unteren Merkzeichen in zwei gleiche Teile geteilt wurde. Um einen Versuch zu machen, wurde der Hahn am oberen Ende der Röhre, den wir h nennen wollen, geöffnet und aus dem Gasreservoir so viel Gas in die Manometerröhre hinübergetrieben, daß dieselbe bis zum unteren Merkzeichen mit Gas gefüllt war. Nun wurde der Hahn h geschlossen, das im Manometerrohre abgesperrte Gas nahm nun den Raum V_0 unter dem Drucke P_0 ein.

Jetzt ließ man die Druckpumpe spielen, bis das Quecksilber im unteren Manometerrohre die zweite Marke erreicht hatte; das Volumen des abgesperrten Gases war dadurch auf V_1 (die Hälfte von V_0) vermindert, der Druck, unter welchem es stand, aber auf P_1 erhöht worden. — Die Versuche wurden nun ganz in der gleichen Weise für einen anfänglichen Druck P_0 wiederholt, welcher nach und nach von 739 mm bis 9336 mm gesteigert wurde; es wurde also bei niederem und hohem Drucke mit gleich großem Gasvolumen operiert.

Die Endresultate der Régnaultschen Untersuchung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Sie gibt den Druck (in Metern ausgedrückt) an, welcher nötig ist, ein anfänglich unter 1 m Quecksilberdruck stehendes Gas auf $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{15}$ und $^1/_{20}$ seines ursprünglichen Volumens zu komprimieren.

Volumen	Druck: Luft m	Druck: Kohlendioxyd m	Druck: Wasserstoffgas m
1	1,0000	1,0000	1,0000
$^1/_5$	4,9794	4,8288	5,0118
$^1/_{10}$	9,9162	9,2262	10,0560
$^1/_{15}$	14,8248	13,1869	15,1359
$^1/_{20}$	19,7198	16,7054	20,2887

Nach diesen Daten werden also Luft und Kohlendioxyd bei steigendem Drucke stärker komprimiert, als nach Boyles Gesetz folgen würde, dagegen Wasserstoff weniger stark.

In bezug auf die Höhe der angewendeten Druckkräfte werden alle früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand weit übertroffen von den neueren Messungen, welche Amagat[1]) 1880 angestellt hat.

Die Beobachtungsapparate und das Quecksilbermanometer waren in einem zu Méons bei St. Etienne befindlichen Schachte von 400 m Tiefe aufgestellt. Auf dem Grunde des Schachtes befand sich die Kompressionspumpe, welche zunächst auf Glycerin und durch dieses auf das Quecksilber wirkte. Dieses

[1]) Ann. de chim. et de phys. (5) 19, 345; Fortschritte der Physik im Jahre 1880, 36, 171.

wurde in ein zweischenkeliges Manometer eingepreßt, dessen kürzerer, aus einer kalibrierten, oben geschlossenen Glasröhre bestehender Schenkel reines Stickstoffgas enthielt. Der andere Schenkel bestand aus einer nach dem Ausgange des Schachtes führenden dünnen, stählernen Röhre, welche aus vielen Stücken von mehreren Metern Länge zusammengeschraubt war. Die Gesamthöhe dieser Druckröhre betrug etwas mehr als 325 m, was einem Drucke der darin enthaltenen Quecksilbersäule von 430 Atmosphären entspricht.

Während nun ein Beobachter mittels Fernrohres den Stand der Quecksilberkuppe abzulesen hatte, wurde ein zweiter Beobachter in einem Korbe bis zu einer der Stellen gehoben, wo zwei Stücke zusammengeschraubt waren. Diese Verbindung wurde gelöst, ein Stück offenes Glasrohr angesetzt und dann gewartet, bis durch die Pumpe das Quecksilber bis in die Glasröhre getrieben war. Hierauf erfolgte die gleichzeitige Ablesung des Druckes und des Gasvolumens. Dabei wurde insbesondere für Konstanthalten der Temperatur des Gases Sorge getragen.

Das Resultat dieser Messungen am Stickstoffgase ist nachstehend in der Weise angegeben, daß für die in Metern Quecksilber von 0° gemessenen Drucke P das zugehörige Produkt PV aus Druck und Volumen beigefügt ist

Druck in Metern Quecksilber von 0° P	Produkt aus Volumen und Druck PV	
20,740	50 989	
25,337	50 897	
47,146	50 811	Minimum bei
55,482	50 857	$P = 50$
61,241	50 895	
69,140	50 987	
82,970	51 226	
96,441	51 602	
128,296	52 860	
158,563	54 214	
190,855	55 850	
221,103	57 796	
252,353	59 921	
283,710	62 192	
327,388	65 428	

Wie man sieht, nimmt das Produkt PV nicht fortwährend ab, sondern erreicht für $P = 50$ ein Minimum, um von da an nicht unbedeutend anzusteigen.

Nachdem nun so das Stickstoffgas untersucht war, konnte dasselbe zur Füllung eines geschlossenen Manometers benutzt werden, um damit andere Gase einer ähnlichen Untersuchung zu unterziehen. Sauerstoff, Luft, Äthylen, Kohlenoxyd und Grubengas zeigten hierbei insofern ein gleichmäßiges Verhalten, als die Produkte PV ein Minimum bei wachsendem Drucke erreichten. Dasselbe liegt ungefähr bei folgenden Quecksilberdruckhöhen:

Stickstoff	50 m	Kohlenoxyd	50 m
Sauerstoff	100 „	Grubengas	120 „
Luft	65 „	Äthylen	65 „

Das Minimum war bei den fünf ersten dieser Gase nur wenig ausgeprägt, dagegen außerordentlich auffallend beim Äthylen, für dieses sank der Wert des Produktes PV, welcher bei 24 m Quecksilberdruck = 21473 war, für 63,96 m Druck auf 9370 herab, um dann bei 303,02 m Druck auf 29333 anzusteigen.

Wasserstoff zeigte kein solches Minimum, doch vermutet Amagat ein solches bei geringerem Drucke.

Für Drucke unter einer Atmosphäre liegen mehrere Untersuchungen vor, welche aber nicht zu übereinstimmenden Resultaten geführt haben.

Die Arbeiten von Mendelejeff und Kirpitschoff[1]) ergaben für Luft, daß mit Abnahme des Druckes P auch das Produkt PV abnimmt. Setzt nan für $P = 646$ mm $PV = 1$, so ist nach den genannten Autoren für $P = 14,5$ mm $PV = 0,96551$. Die Volumenbestimmungen geschahen durch Wägung des in den verdünnten Raum eintretenden Quecksilbers.

Wir kommen auf diese Abweichungen und deren theoretische Deutung 'n der Wärmelehre näher zu sprechen.

§ 167. Die Luftpumpe. Zu den unentbehrlichsten und wichtigsten nstrumenten des Physikers gehört die Luftpumpe, welche seit ihrer Erfin-

Fig. 494.

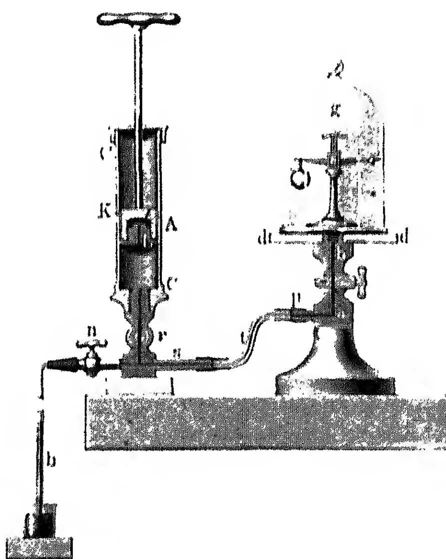
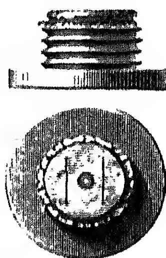


Fig. 495.



dung (1650) durch Otto von Guericke mancherlei Veränderungen und Verbesserungen erfahren hat. Wir wollen sie zunächst in einer möglichst einfachen Gestalt kennen lernen.

Fig. 494 stellt eine sogenannte Handluftpumpe dar, wie sie gewöhnlich in chemischen Laboratorien gebraucht wird. CC ist der Stiefel, d. h. ein hohler Messingzylinder, in welchem ein luftdicht schließender Kolben A auf und ab bewegt werden kann.

Von dem Boden des Zylinders führt ein vertikaler Kanal herab bis zu dem horizontalen Rohre s, welches durch ein Glasrohr t mit Hilfe von Kautschukröhren mit dem Rezipienten g, d. h. mit dem Raume in Verbindung gesetzt werden kann, aus welchem man die Luft entfernen will. Die Glasröhre t verbindet nämlich die Messingröhren s und p, von welchen letztere zu

[1]) Fortschr. d. Physik i. J. 1874, 30, 232.

dem vertikalen Kanal *ab* führt, der oben in der Mitte des eben abgeschliff Tellers *dd* mündet. Auf diesen Teller wird dann die Glasglocke *g* aufges deren unterer Rand ebenfalls eben abgeschliffen ist, und der des bess Schlusses wegen mit Talg oder Schweinefett bestrichen wird.

Der Kolben *A* besteht aus verschiedenen Stücken, nämlich erstens e zum Teil hohlen Messingstücke *K*, welches von einer Lederkappe umg ist, die fest an die Wände des Zylinders andrückt, und namentlich beim ziehen des Kolbens noch durch den von oben her wirkenden Luftdruc dieselben gepreßt wird, und zweitens aus einem von unten her in *K* geschraubten Metallstücke *L*, welches in der Mitte durchbohrt ist und Bodenplatte des Kolbens bildet.

Dieses Metallstück *L* ist nun oben mit einem Ventil versehen, we dadurch gebildet wird, daß man ein Stück Schweinsblase so über das bindet, daß es die Öffnung des vertikalen Kanales verschließt, und dann lich von dieser Öffnung zwei Einschnitte anbringt, wie Fig. 459 zeigt, w das fragliche Stück im Grund- und Aufriß darstellt.

Dieses Ventil wird fest auf die Öffnung aufgepreßt, wenn der Luftd von oben her, es wird geöffnet, wenn er von unten her stärker ist.

Wird der oben am unteren Ende des Stiefels *C* aufsitzende Kolben die Höhe gezogen, so entsteht unter dem Kolben ein luftverdünnter R und infolge davon tritt ein Teil der in *g* befindlichen Luft in den Zyli über. Wird dann, wenn der Kolben am oberen Ende des Zylinders *C* gekommen ist, der Hahn *r* geschlossen und so die Kommunikation zwis dem Stiefel *C* und dem Rezipienten *g* unterbrochen, so kann beim Ni drücken des Kolbens *A* die herübergesaugte Luft nicht wieder in den pienten zurückkehren, die Luft unter dem Kolben wird, da ihr kein Au bleibt, allmählich so verdichtet, daß sie einen stärkeren Druck ausübt al äußere Luft, sie wird also das Kolbenventil heben und durch dasselbe weichen.

Sobald der Kolben auf dem Boden des Stiefels angekommen ist, der Hahn *r* wieder geöffnet und dann durch Wiederholung derselben Oper von neuem eine Portion Luft aus dem Rezipienten *g* fortgeschafft.

Da das beständige Öffnen und Schließen des Hahnes *r* lästig ist, s man die zentrale Öffnung im Boden des Zylinders mit einem ähnlichen V versehen, wie das ist, welches sich im Kolben befindet. Dieses untere V öffnet sich beim Aufziehen und schließt sich beim Niederdrücken des Kol

In unserer Figur sehen wir unter der Glocke der Luftpumpe einen Ap stehen, welcher erst später, und zwar in demjenigen Paragraphen bespr werden wird, welcher vom Luftballon handelt.

Den Grad der Luftverdünnung, welchen man durch Auspumpen he gebracht hat, kann man durch eine sogenannte **Barometerprobe** m Für die kleinen Handluftpumpen ist die Barometerprobe so eingerichtet Fig. 494 zeigt. Eine etwa 80 cm lange Glasröhre *b* taucht mit ihrem un Ende in ein Gefäß voll Quecksilber; oben ist sie umgebogen und mittels Kautschukröhrchens an die Pumpe befestigt. Wenn der Hahn *n* geöffn so steigt das Quecksilber in die Röhre *b*, und zwar um so höher, je w die Verdünnung getrieben wird. Wenn es möglich wäre, einen ganz luftl Raum durch die Luftpumpe zu erzeugen, so würde die Höhe der im Ro gehobenen Quecksilbersäule der Barometerhöhe gleich sein.

Man begreift leicht, daß mit einem derartigen Instrumente niemals ein absolut luftleerer Raum hervorgebracht werden kann, wie vollkommen es auch konstruiert sein mag; denn wie lange man auch fortpumpen mag, so wird durch jeden neuen Kolbenzug die im Rezipienten befindliche Luft doch nur von neuem verdünnt und nie vollständig entfernt. Aber auch durch noch so lange fortgesetztes Pumpen kann man die Verdünnung der Luft im Rezipienten nicht über eine gewisse Grenze bringen, welche im nächsten Paragraphen näher bezeichnet werden soll.

Größere Luftpumpen hat man in sehr verschiedenen Formen konstruiert, welche der Hauptsache nach in zwei Hauptklassen zerfallen, nämlich in Ventilluftpumpen und Hahnluftpumpen. Bei den ersteren wird die Unterbrechung und Wiederherstellung der Kommunikation des Stiefels mit dem Rezipienten durch ein Ventil bewerkstelligt, bei den letzteren geschieht dieses durch einen Hahn.

Bei größeren Luftpumpen, seien es nun Hahn- oder Ventilluftpumpen, sind gewöhnlich zwei Stiefel angebracht, um schneller evakuieren zu können.

§ 168. Die zweistiefelige Ventilluftpumpe. Fig. 496 stellt eine zweistiefelige Ventilluftpumpe von der Seite gesehen, Fig. 497 stellt die vordere

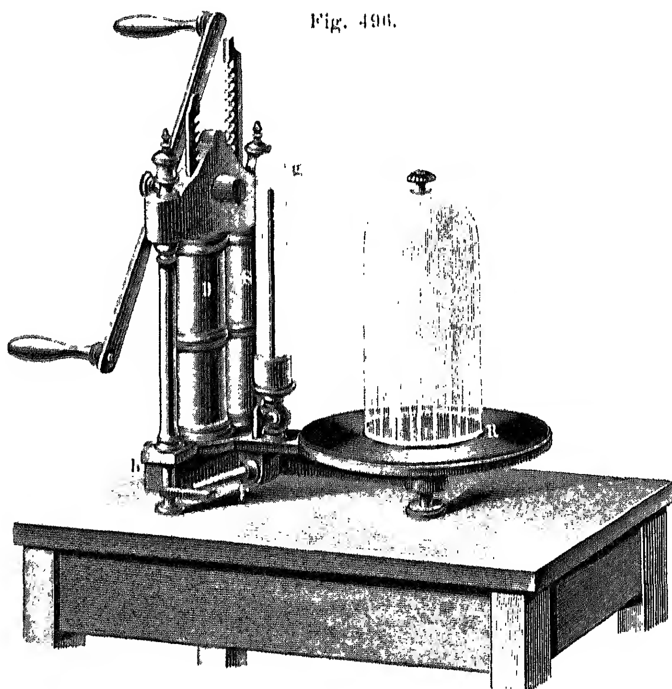


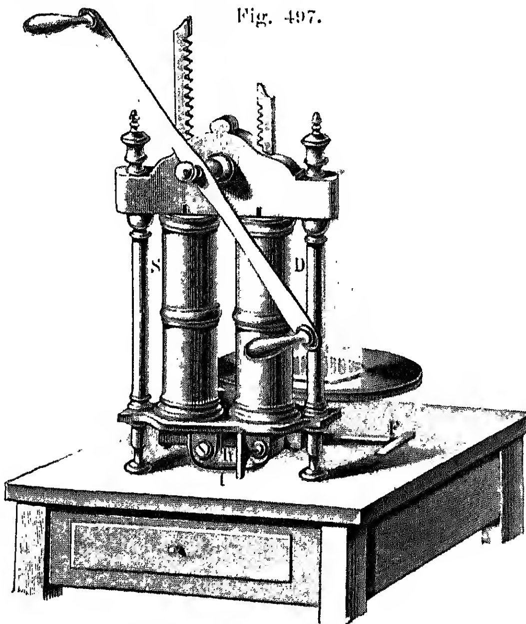
Fig. 496.

Ansicht desselben Instrumentes dar. Die innere Einrichtung einer solchen Luftpumpe erkennt man aus dem Grundriß Fig. 500 und dem Durchschnitt Fig. 498, für welchen zu bemerken ist, daß die Durchschnittsebene für den vorderen Teil des Instrumentes durch die Mitte des Stiefels D, für den hinteren Teil durch die Mitte des ganzen Instrumentes geht.

Im Kolben *B*, dessen Einrichtung aus Fig. 499 deutlicher ersehen werden kann, ist ein Ventil angebracht, welches sich durch einen Druck von unten öffnet, durch einen Druck von oben aber geschlossen wird.

Eine Stange *ca*, Fig. 498, trägt das Bodenventil. Wenn der Kolben gehoben wird, so wird die ganze Stange gehoben, bald aber stößt der Absatz *c* an die obere Platte des Zylinders, und der Kolben bewegt sich nun mit einiger Reibung längs der ganzen Stange hin. Sobald der Kolben niedergeht, wird der abgestumpfte Kegel *a* in die unter ihm befindliche konische Öffnung gedrückt, so daß die obere Fläche dieses Kegels mit dem Boden des Zylinders in eine Ebene zusammenfallt und der Kolben sich also vollkommen auf diesen Boden aufsetzen kann.

Fig. 497.



Dieselbe Einrichtung hat auch der Kolben im anderen Stiefel *S*.

Die in dem Kolben der oben beschriebenen Luftpumpe angebrachten Ventile sind allerdings schwer zugänglich, so daß ein Reinigen derselben immer ein teilweises Auseinandernehmen der Luftpumpe erfordert. Ekling in Wien hat diesem Übelstande auf folgende Weise abzuhelfen gesucht: er läßt den Kolben massig und bringt dagegen ein Ventil außerhalb des Stiefels an, zu welchem dann ein Kanal von der Bodenplatte aus führt. Dieses Ventil öffnet sich, wenn beim Niedergange des Kolbens die im unteren Teile des Zylinders befindliche Luft komprimiert wird und nun durch den besprochenen Kanal hindurch gegen die untere Fläche des Ventils drückt, um endlich durch dasselbe zu entweichen. Beim Aufziehen des Kolbens schließt sich dieses Ventil natürlich wieder.

Die Mitte des Tellers *R*, Fig. 498 und Fig. 500, welcher zum Aufsetzen von Glasglocken dient, wird durch eine Schraube gebildet, auf welche man Ballons usw. aufschrauben kann. Von hier führt ein Kanal bis *d*, wo er sich in zwei Arme teilt, von welchen der eine zum Boden des Zylinders *D*, der andere zum Boden des Zylinders *S* führt.

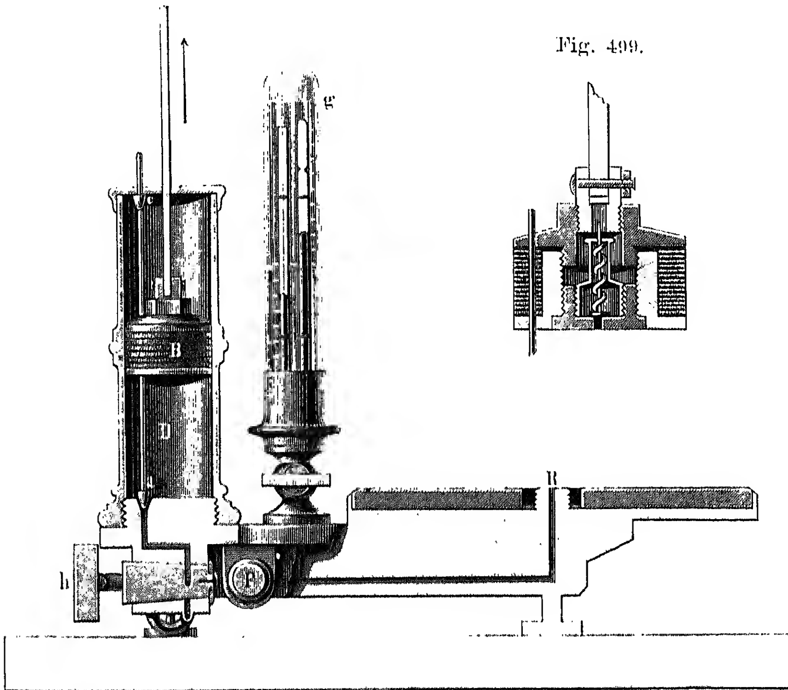
Derjenige Zylinder, in welchem der Kolben oben aufsteigt, saugt Luft aus dem Rezipienten, während in dem anderen Stiefel, in welchem der Kolben gleichzeitig niedergeht, die vorher aus dem Rezipienten gesaugte Luft durch das Kolbenventil entweicht.

Bei diesen Luftpumpen ist die Barometerprobe in der Regel von etwas anderer Einrichtung als die vorher erwähnte. Gewöhnlich ist sie ein abgekürztes Barometer, welches in eine lange, enge Glasglocke *g*, Fig. 496 und

Fig. 498, eingeschlossen ist, die mit dem Kanal der Maschine in Verbindung steht. Diese Verbindung kann mittels eines Hahnes willkürlich unterbrochen und wiederhergestellt werden. Fig. 501 stellt eine isolierte Barometerprobe von 20 cm Länge dar. Das Quecksilber füllt den zugeschmolzenen Schenkel

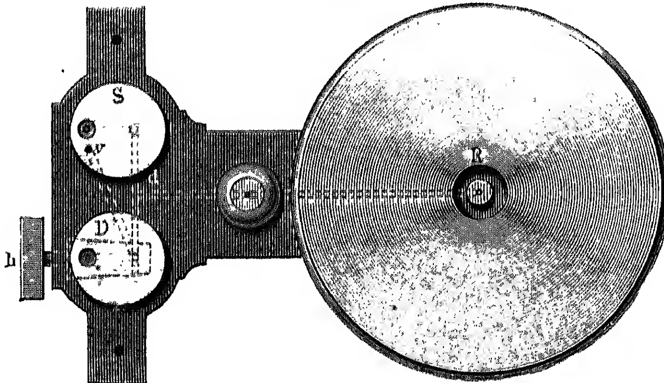
Fig. 498.

Fig. 499.



ganz aus und beginnt erst zu sinken, wenn der auf den offenen Schenkel wirkende Luftdruck bis auf $^1/_4$ Atmosphärendruck reduziert ist. Ist dieser

Fig. 500.



Grad von Verdünnung erreicht, so gibt die Barometerprobe stets den Druck der Luft im Rezipienten an, welcher der Differenz im Stande der beiden Quecksilberkuppen gleich ist. Sobald man wieder Luft zuläßt, treibt der

Druck derselben das Quecksilber mit Gewalt in die verschlossene Röhre zurück; man muß deshalb das Einströmen mäßigen, damit der Gipfel der Glasröhre nicht durchgeschlagen wird; um dies zu verhindern, ist überdies die Glasröhre an einer Stelle eingeschnürt.

Die Kolbenstangen der beiden Zylinder sind gezahnt und greifen in dasselbe Getriebe ein; wenn die eine steigt, geht die andere nieder, und diese alternierende Bewegung wird durch die Drehung einer Kurbel in alternierender Richtung hervorgebracht.

Der doppelt durchbohrte Senguerdsche Hahn F, welcher Fig. 502 für sich allein dargestellt ist, dient dazu, um den Rezipienten nach Belieben mit den Stiefeln oder mit der äußeren Luft in Verbindung zu setzen, oder endlich ihn ganz abzusperren. Während die Luftpumpe arbeitet, wird die Verbindung des Rezipienten mit den Stiefeln durch den in Fig. 502 zum Punkt verkürzten Kanal n des Hahnes hergestellt. Dreht man den Hahn aus dieser Stellung durch eine Viertelumdrehung so, daß die Öffnung o gerade auf den nach dem Rezipienten führenden Kanal stößt, so ist der Rezipient mit der äußeren Luft in Verbindung; wenn aber o gegen die Stiefel gekehrt wird, so ist der Rezipient vollständig abgesperrt.

Wie vollkommen man auch alle Teile der Luftpumpe ausarbeiten mag, so ist es doch nicht möglich, den Kolben so herzustellen, daß, wenn er auf dem Boden des Stiefels sitzt, sich nun gar kein Raum mehr zwischen dem Kolben und dem Stiefelboden befände. Ja, selbst wenn der Kolben absolut genau auf den Boden paßte, so ist noch ein namhafter Raum unmittelbar unter der unteren Fläche des Kolbenventils. Wenn nun beim Niedergange

Fig. 501.

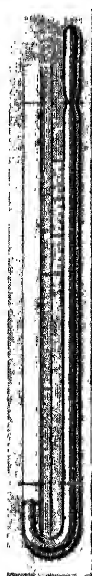


Fig. 502.

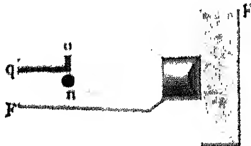


Fig. 503.

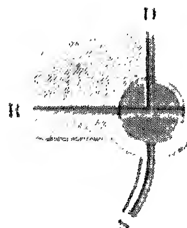
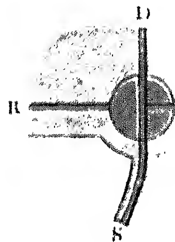


Fig. 504.



des Kolbens das Kolbenventil sich hebt, um die zusammengepreßte Luft entweichen zu lassen, so bleibt immer noch in dem erwähnten schädlichen Raume etwas Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre zurück. Denken wir uns nun während des Aufsteigens des Kolbens den Rezipienten abgeschlossen, so wird sich die Luft des schädlichen Raumes in dem ganzen Stiefelraume verbreiten, und ihre Dichtigkeit wird sich nun zur Dichtigkeit der atmosphärischen Luft gerade so verhalten wie das Volumen des schädlichen Raumes zum Volumen des ganzen Stiefels. Wenn nun die im Rezipienten zurückgebliebene Luft auch schon bis zu diesem Grade verdünnt ist, so ist klar, daß durchaus keine Luft mehr aus dem Rezipienten in den Stiefel

welcher durch den Überschuß des zugeführten Wasserstoffgases fortgeführt wird. Da das zurückbleibende Eisen bei dieser Temperatur nicht zusammenschmilzt, so bleibt es in dem Zustande zurück, wie es vom weggehenden Sauerstoff hinterlassen wird. Wir dürfen uns vorstellen, daß zwischen je zwei Eisenteilchen, wo früher ein Sauerstoffteilchen lagerte, eine Lücke bleibe. Das äußerst zarte Pulver von Eisen, welches man so erhalt, ist deshalb sehr geeignet, den Sauerstoff wieder aufzunehmen, weil jedes seiner Teilchen demselben sofort zugänglich ist. Bringt man daher solches reduziertes Eisen mit Luft oder Sauerstoff in Berührung, so oxydiert es sich sofort unter lebhafter Glüherscheinung. Ein massives Stück Eisen zeigt diese Erscheinung nicht, es kann sich nur an der Oberfläche oxydieren, und die dabei entwickelte Wärme verteilt sich so rasch auf die benachbarten Massen des Eisens, daß sie keine merkbare Temperaturerhöhung hervorzubringen imstande ist.

Diese und andere Erfahrungen der Chemiker haben dieselben veranlaßt, die sogenannte atomistische Theorie aufzustellen. Derselben liegt die Hypothese zugrunde, daß in den zusammengesetzten Stoffen gewisse sehr kleine Teile der einzelnen Stoffe aneinander gelagert seien. Diese kleinsten Teile werden Atome genannt. Je eine Gruppe von Atomen, welche miteinander verbunden als kleinste Menge des zusammengesetzten Stoffes für sich bestehen kann, heißt eine Molekel oder ein Molekül.

Die Kenntnisse über die Moleküle sind insbesondere durch das Studium des gasförmigen Zustandes gefördert worden.

Denken wir uns einen Tropfen Wasser in Dampf verwandelt; dabei wird sein Volumen um mehr als das Hundertfache vergrößert. Die kleinsten Teilchen des Wassers müssen daher entweder ebenfalls ihr Volumen in diesem Verhältnisse vergrößern, oder sie müssen sich entsprechend weiter voneinander entfernen, so daß im Wasserdampf die einzelnen Teilchen durch große Zwischenräume voneinander getrennt sind. Die letztere Annahme hat nun viel mehr Wahrscheinlichkeit für sich, was wir an dieser Stelle nicht näher nachweisen können.

Die so voneinander getrennt vorhandenen Wasserteilchen, welche die kleinsten Wassermengen sind, die im freien Zustande vorkommen können, heißen wir Wassermoleküle. Die Chemie lehrt, daß dennoch jedes dieser Moleküle aus zwei Wasserstoffatomen und einem Sauerstoffatom zusammengesetzt sei. Sie lehrt ferner noch, daß (außer beim Quecksilber und Cadmium) die Moleküle aller Stoffe aus mindestens zwei Atomen bestehen; die Moleküle der sogenannten Grundstoffe bestehen dann aus gleichen Atomen, z. B. ein Molekül Wasserstoff aus zwei Atomen Wasserstoff.

Über die absolute Größe der Atome und der Moleküle können wir nichts Genaues aussagen. Aus gewissen, nach verschiedenen sinnreichen Methoden angestellten Überlegungen und Berechnungen hat man aber in neuester Zeit geschlossen, daß die Durchmesser der Körperatome kleiner als 10^{-7} und größer als $5 \cdot 10^{-8}$ mm anzunehmen seien und daß das absolute Gewicht eines Atoms Wasserstoff auf $23 \cdot 10^{-22}$ eines Milligramms zu schätzen sei.

Demnach wären die Körperatome immer noch über 1000 mal kleiner als die unter den stärkst vergrößernden Mikroskopen noch etwa zu messenden Dicken von pathogenen Bakterien, indem z. B. diejenige von *Bacillus murisepticus* bis unter $2 \cdot 10^{-4}$ mm heruntergeht. Die Größe eines Atoms verhält sich zur Größe eines Wassertropfens ungefähr wie die Größe eines Schrot-

übergehen kann, wenn auch eine Verbindung zwischen beiden besteht, und somit ist denn die Grenze der Luftverdünnung mittels einer gewöhnlichen Luftpumpe gegeben. Hat man einmal diesen Punkt erreicht, so ist alles fernere Pumpen nutzlos, die Barometerprobe bleibt stationär.

Der nachteilige Einfluß des schädlichen Raumes läßt sich durch Vorrichtungen vermindern, welche nicht Luft von atmosphärischer Dichtigkeit, sondern nur stark verdünnte Luft in den schädlichen Raum eindringen lassen. Am einfachsten läßt sich dies dadurch erreichen, daß man den Stiefel auch oben luftdicht schließt, die runde Kolbenstange durch eine Stopfbüchse gehen läßt und in der oberen Deckplatte des Zylinders ein Ventil anbringt, welches beim Aufziehen des Kolbens die Luft aus dem oberen Teile des Zylinders entweichen, beim Niedergehen des Kolbens aber keine Luft in den Zylinder eintreten läßt. Bei dieser Einrichtung befindet sich, wenn der Kolben unten ankommt, nur verdünnte Luft über dem Kolbenventil, der schädliche Raum kann sich also auch nur mit verdünnter Luft füllen. Diese Einrichtung wendet u. a. auch Carrée bei seinen für künstliche Eisbereitung konstruierten Luftpumpen an. Auch Staudinger in Gießen und Stöhrer in Leipzig haben die oben besprochene Einrichtung bei ihren Handluftpumpen in Anwendung gebracht.

Bei den zweistiefeligen Ventilluftpumpen, wie sie oben beschrieben sind, wird derselbe Vorteil durch den Babinetschen Hahn erreicht.

Das Wesentliche dieser Einrichtung besteht darin, daß, wenn ein gewisser Grad von Verdünnung erreicht ist, die Verbindung des Stiefels D mit dem Rezipienten abgesperrt, dagegen eine Verbindung des Stiefels S mit dem Stiefel D hergestellt wird. Nun kann nur noch der Stiefel S Luft aus dem Rezipienten saugen; wenn aber der Kolben in S niedergeht und der in D steigt, so wird die unter dem Kolben in S befindliche Luft nicht verdichtet, sondern sie wird ohne Verdichtung in den Zylinder D hinübergeschafft, so daß, wenn der Kolben in S auf dem Boden ankommt, sich im schädlichen Raume keine Luft von atmosphärischer Dichtigkeit, sondern nur eine sehr verdünnte Luft befindet.

Wenn nun der Kolben in S zu steigen, der in D niederzugehen beginnt, so wird die Kommunikation zwischen den beiden Zylindern durch das Bodenventil in D unterbrochen und die in D unter dem Kolben befindliche Luft durch denselben entfernt.

In den Fig. 496 bis 498 ist der Babinetsche Hahn mit h bezeichnet; seine Einrichtung ist aus Fig. 503 und 504 näher zu ersehen. Auf den Umfang des Hahnes führen drei Kanäle; einer nach oben führt zum Zylinder D; einer nach unten führt durch ein Rohr t, welches in der vorderen Ansicht der Luftpumpe, Fig. 497, deutlich zu sehen ist, zum Boden des Stiefels S, wo es mit einer Öffnung v, Fig. 500, mündet; der dritte vom Hahn nach links gehende Kanal endlich führt zum Rezipienten. Solange der Hahn die Stellung Fig. 503 behält, welcher auch Fig. 497 und Fig. 498 entspricht, sind beide Zylinder mit dem Rezipienten in Verbindung, und jeder Zylinder saugt aus dem Rezipienten, wenn sein Kolben aufsteigt. Ist man auf diese Weise so weit gekommen, daß ein ferneres Pumpen die Barometerprobe nicht weiter fallen macht, so wird der Hahn h um 90 Grad gedreht, so daß er in die Stellung Fig. 504 kommt. Jetzt ist, wie man sieht, die Verbindung zwischen D und S, d. h. die Verbindung zwischen beiden Stiefeln, hergestellt, aber die

Verbindung zwischem dem Stiefel *D* und dem Rezipienten *R* unterbrochen. Nun wird bei weiterem Pumpen die Barometerprobe von neuem sinken, bis eine neue weitere Grenze der Verdünnung erreicht ist. Mit Hilfe des Babinetschen Hahnes läßt sich, wenn die Pumpe trocken ist, die Verdünnung ungefähr so weit treiben, daß die Barometerprobe nur noch einen Luftdruck von 1 mm anzeigt.

§ 169. Die zweistiefelige Hahnluftpumpe. Eine solche Luftpumpe ist in Fig. 505 dargestellt, welche wohl auch ohne detaillierte Beschreibung

Fig. 505.

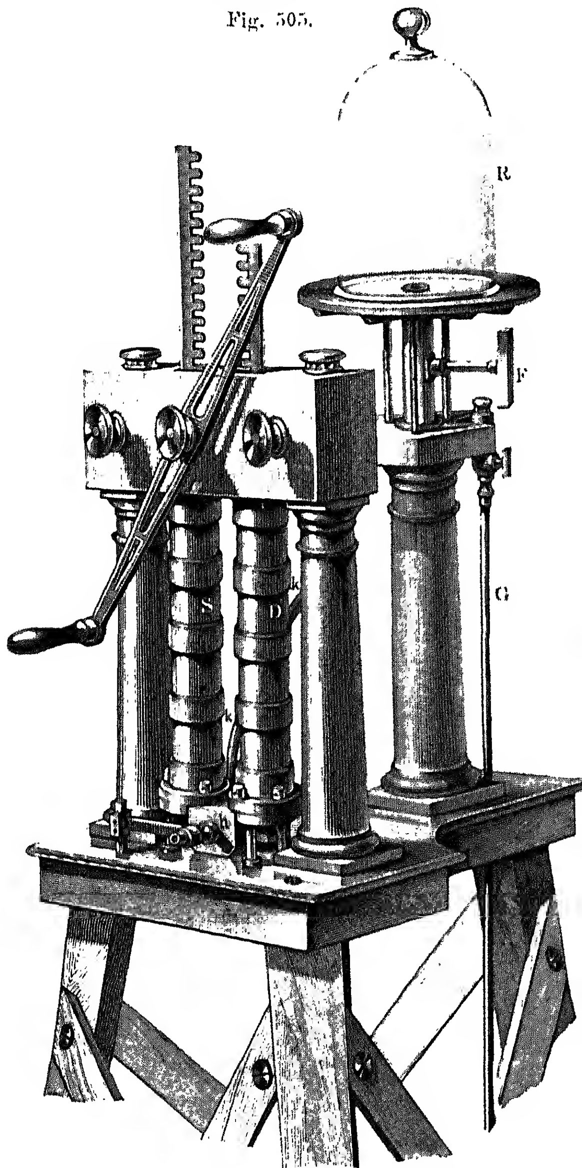


Fig. 506.

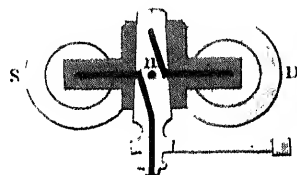


Fig. 507.

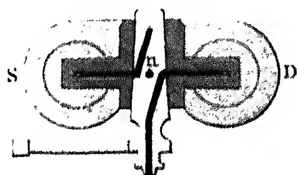
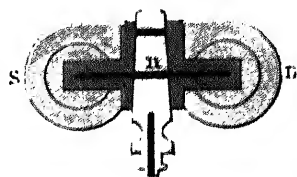


Fig. 508.



verständlich sein wird, und zwar um so mehr, da alle Teile mit denselben Buchstaben bezeichnet sind wie die entsprechenden Teile der zweistiefeligen Ventilluftpumpe. Von dem Rezipienten führt ein Rohr *k*, welches in unserer Figur nur stellenweise sichtbar ist, zu einem Hahn *h*, welcher sich in der Bodenplatte zwischen den beiden Zylindern befindet; je nachdem dieser Hahn gestellt ist, wird durch ihn die Verbindung entweder des einen oder

des anderen Stiefels mit dem Rezipienten vermittelt, wie dies Fig. 506 und Fig. 507 erläutern.

Wenn der Hahn die Stellung Fig. 506 einnimmt, so ist durch ihn der Stiefel rechts (*D*) mit dem Rezipienten in Verbindung, von dem Stiefel links (*S*) führt aber ein Kanal in die äußere Luft, dies ist also die Stellung des Hahns, wenn der bei dieser Luftpumpe nicht mit einem Ventil versehene Kolben im Stiefel *D* eben in die Höhe, der in *S* aber niedergeht.

Ist der Kolben in *D* oben, der in *S* unten angekommen, so wird der Hahn *h* durch eine halbe Umdrehung in die Stellung Fig. 507 gebracht, so daß jetzt *S* mit dem Rezipienten und *D* mit der äußeren Luft kommuniziert.

Bei jedem Umsetzen der Kolbenbewegung muß natürlich der Hahn *h* um 180 Grad gedreht werden, was bei vielen derartigen Instrumenten durch eine besondere Vorrichtung (Hahnsteuerung) bewerkstelligt wird, deren Besprechung hier nicht nötig scheint.

Grassmann hat bereits im Jahre 1819 diesem Hahn eine Einrichtung gegeben, mittels deren er tauglich wird, bei der zweistiefeligen Hahnluftpumpe dasselbe Prinzip in Anwendung zu bringen, welches dem Babinetschen Hahn bei den zweistiefeligen Ventilluftpumpen zugrunde liegt. Der Hahn ist nämlich mit einer weiteren Durchbohrung *n* versehen, welche rechtwinkelig zu der Ebene der bisher betrachteten Kanäle steht. Wird nun der Hahn aus der Stellung Fig. 506 durch eine Viertelumdrehung in die Stellung Fig. 508 gebracht, so sind nun beide Zylinder miteinander verbunden und beide sowohl vom Rezipienten als auch von der äußeren Luft abgesperrt.

Nachdem nun durch die oben beschriebenen Manipulationen, bei welchen der Hahn abwechselnd aus der Stellung Fig. 506 in die Stellung Fig. 507 gebracht wird, die so mögliche Grenze der Verdünnung erreicht ist, wird von nun an, wenn der Zylinder *S* Luft aus dem Rezipienten gesaugt hat, der Hahn aus der Stellung Fig. 507 in die Stellung Fig. 508 gebracht und also beim Niedergange des Kolbens in *S* die unter demselben befindliche Luft in den Zylinder *D* geschafft, so daß, wenn nun der Kolben in *S* unten ankommt, sich nur bedeutend verdünnte Luft im schädlichen Raume befindet. Ehe nun das Aufziehen des Kolbens in *S* wieder beginnt, wird der Hahn wieder in die Stellung Fig. 507 gebracht usw.

§ 170. Einstiefelig doppelt wirkende Luftpumpen. Gleichen Effekt wie die zweistiefeligen geben auch die einstiefeligen doppelt wirkenden Luftpumpen, d. h. solche, bei welchen, während der Kolben in die Höhe geht, die Luft aus dem Rezipienten in den unteren, während er hinabgeht, aber in den oberen Teil des Stiefels gesaugt wird. An solchen doppelt wirkenden Luftpumpen, welche übrigens weit weniger verbreitet sind als die zweistiefeligen, hat man in neuerer Zeit noch die Verbesserung angebracht, daß die auf und ab gehende Bewegung des Kolbens durch eine Kurbel vermittelt wird, deren mit einem Schwungrad versehene Achse stets in gleicher Richtung gedreht wird.

Sehr einfach und zweckmäßig ist die Konstruktion der doppelt wirkenden Luftpumpe von Bianchi, Fig. 509, deren Spiel durch die Durchschnittsfigur 510 erläutert wird. Durch einen vor *B* angesetzten Kautschukschlauch, der über eine Drahtspirale gezogen ist, wird der zu evakuierende Rezipient mit dem Stiefel verbunden. Beim Niedergange des Kolbens strömt die vom

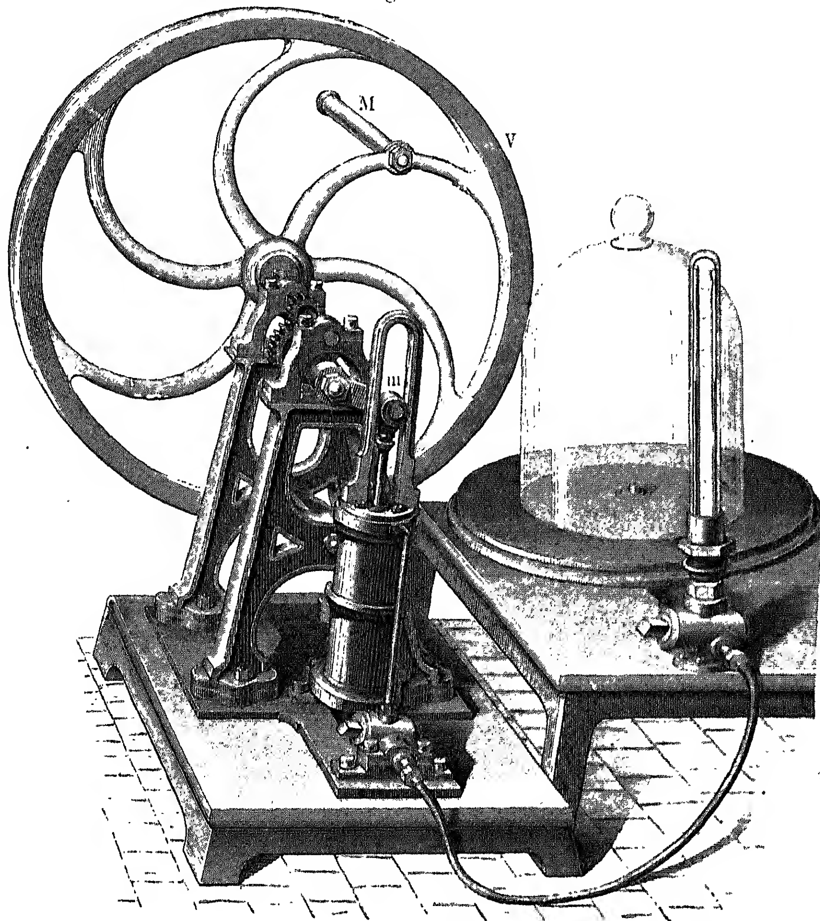
Rezipienten kommende Luft durch das Rohr C bis s in den oberen Teil des Zylinders ein, während die im unteren Teile des Zylinders komprimierte Luft durch das Ventil b und die Höhlung X der Kolbenstange entweicht.

Beim Aufgange des Kolbens strömt die vom Rezipienten kommende Luft bei s' in den unteren Teil des Zylinders ein, während die in dem oberen Teile desselben befindliche Luft durch das Ventil a entweicht.

Die auf und nieder gehende Bewegung des Kolbens wird bei der Bianchischen Luftpumpe dadurch bewerkstelligt, daß das obere Ende der Kolbenstange mit dem Kurbelarme m, Fig. 509, verbunden ist.

Durch Umdrehung des Kurbelarmes m wird aber die Kolbenstange nicht allein aufgezogen und dann wieder hinuntergeschoben, sondern ihr oberes

Fig. 509.



Ende wird auch bald nach rechts, bald nach links bewegt. Damit aber die Kolbenstange auch dieser letzteren Bewegung folgen könne, ist der Zylinder um eine mit der Bodenplatte zusammenhängende horizontale Achse drehbar, in deren vorderem Teile bei B sich der Kanal befindet, durch welchen die vom Rezipienten kommende Luft in den Stiefel eintritt, und welche in zwei Zapfenlagern ruht, von welchen in Fig. 509 nur das vordere sichtbar ist.

Wenn also die Kurbel umgedreht wird, so muß der Zylinder um diese Achse ganz so oszillieren, wie es bei oszillierenden Dampfmaschinen der Fall ist.

Da die Maschine durch ein gleichförmiges Umdrehen des Schwungrades V in Gang gesetzt wird, so bedarf sie nur einer sehr geringen Kraftanstrengung, und da der gußeiserne Zylinder derselben ziemlich bedeutende Dimensionen hat, so evakuiert sie sehr rasch.

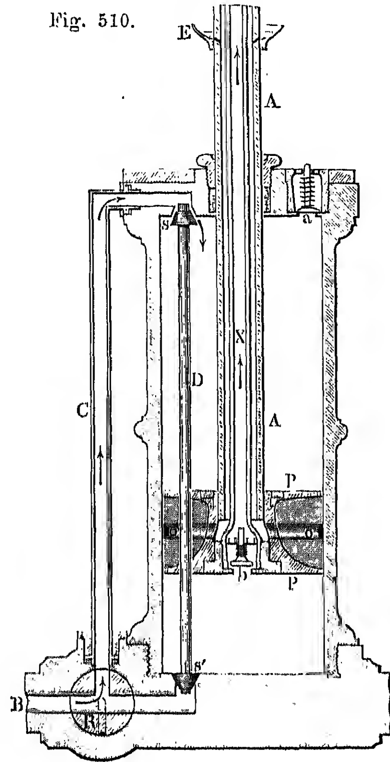


Fig. 510.

Bei R ist ein dem Babinetschen (§ 168) entsprechender Hahn angebracht, auf dessen nähere Beschreibung wir hier nicht eingehen können.

Um die Nachteile zu vermeiden, welche die Einfettung des Kolbens mit sich bringt, hat Deleuil in Paris eine einstiefelige doppeltwirkende Luftpumpe mit freiem Kolben, d. h. mit einem Kolben konstruiert, der nicht fest an die Zylinderwände anschließt. Der Stiefel ist von Glas, der Kolben von Metall. Der Durchmesser des Kolbens (6 cm) ist $^1/_{20}$ mm kleiner als der des Stiefels. Die Länge des Kolbens, auf dessen Umfang 1 cm voneinander abstehend parallel mit der Basis kleine Rinnen eingedreht sind, ist ungefähr doppelt so groß als der Durchmesser.

Die Wirksamkeit dieser Pumpe erklärt sich einerseits durch den Umstand, daß sich Luft in kapillaren Räumen nur schwer bewegt, andererseits aber dadurch, daß in doppeltwirkenden Luftpumpen die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Kolbens stets unbedeutend ist.

Die Vorteile, welche die Deleuilsche Pumpe bietet, beruhen vorzugsweise darin, daß keine Kolbenreibung stattfindet und daß alle Verunreinigung der Ventile durch Fett wegfällt. Deleuil brachte mit diesem Instrumente unter Anwendung eines Babinetschen Hahnes in einem Rezipienten von 1 Liter Inhalt eine Luftverdünnung bis zu 4 mm Quecksilberdruck hervor.

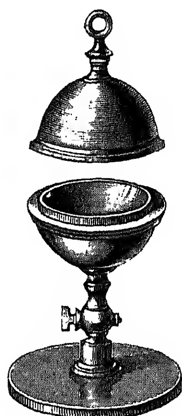
Hochgesang in Ohrdruf bei Gotha hat eine zweistiefelige doppeltwirkende Luftpumpe konstruiert, welche natürlich sehr rasch evakuiert.

§ 171. Die wichtigsten Luftpumpenversuche. Otto von Guericke machte mit seiner Maschine den merkwürdigen Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln, welcher darin bestand, eine Hohlkugel von Metall, deren Hälften, Fig. 511, nur einfach aufeinander gesetzt waren, luftleer zu machen. Ehe die Luft ausgepumpt ist, sind die beiden Hälften leicht zu trennen; wenn aber im Inneren keine Luft mehr vorhanden ist, um dem äußeren Luftdrucke das Gleichgewicht zu halten, so haften sie außerordentlich stark zusammen. Mag z. B. der Radius der Kugel nur 1 dm sein, so

beträgt der Querschnitt der Kugel 314 qcm, und demnach beträgt der äußere Druck, welcher die Hälften zusammenpreßt, mehr als 314 kg. Um den Kontakt vollständiger zu machen, beschmiert man die Ränder der Halbkugeln, welche aufeinander gesetzt werden, mit Fett, wie eine auf den Teller der Luftpumpe zu setzende Glocke; ein Hahn, welcher während des Auspumpens geöffnet ist, wird, bevor man die zusammengedrückten Halbkugeln von der Luftpumpe abschraubt, geschlossen, um den Wiedereintritt der Luft zu verhindern.

Daß der Druck der Atmosphäre es ist, welcher das Quecksilber ins Barometerrohr hinaufdrückt, läßt sich sehr schön mittels der Luftpumpe

Fig. 511.



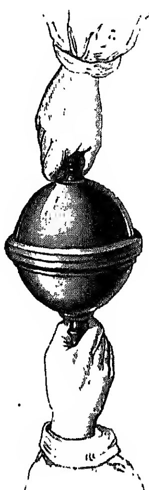
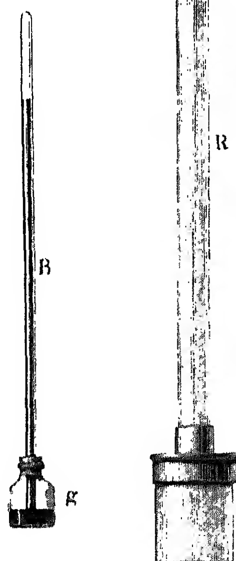


Fig. 512. Fig. 513.



zeigen. Ein Barometer von der durch Fig. 512 erläuterten Einrichtung wird unter dem langen und engen Rezipienten R, Fig. 513, auf den Teller der Luftpumpe gebracht. Wird nun evakuiert, so wird der Druck vermindert, welcher auf dem Quecksilberspiegel im Gefäße g lastet, das Quecksilber in der Röhre sinkt; es steigt wieder, sobald die Luft wieder zugelassen wird.

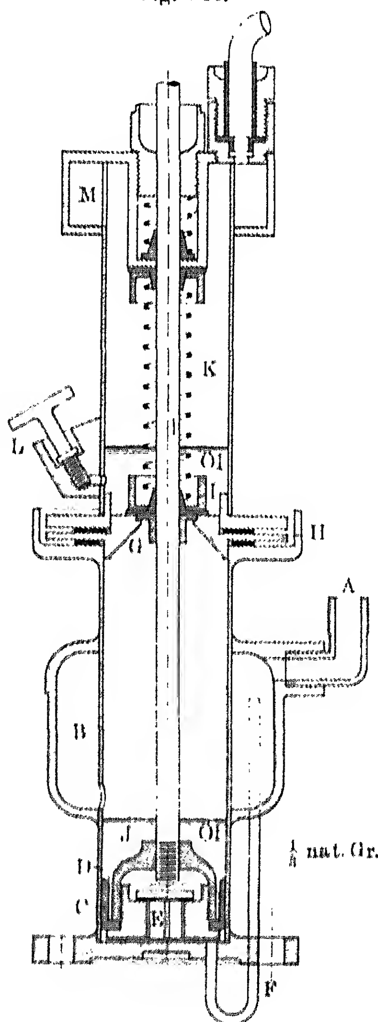
Unter den vielen Luftpumpenversuchen wollen wir nur noch einige andeuten. Man zeigt z. B. mit Hilfe der Luftpumpe, daß brennende Körper im luftleeren Raume verlöschen; daß der Rauch wie ein schwerer Körper zu Boden fällt; daß Luft im Wasser absorbiert enthalten ist; daß sich eine Luftschicht zwischen den Flüssigkeiten und den Wänden der Gefäße befindet, in welchen sie enthalten sind, denn diese Luftschicht zeigt sich durch eine Menge kleiner Bläschen, welche in dem Verhältnis wachsen, als der Luftdruck abnimmt. Mit Hilfe der Luftpumpe kann man laues Wasser zum Kochen bringen usw.

Von einigen Versuchen mit der Luftpumpe war schon früher die Rede, von anderen, wie z. B. dem Sieden unter geringem Luftdruck, dem Gefrieren durch rasche Verdampfung usw., wird noch später die Rede sein.

§ 172. Die Ölluftpumpen. Das Gemeinsame dieser Pumpen liegt darin, daß die Luft aus dem schädlichen Raume durch Öl verdrängt wird, weshalb schon mit einem einzigen Zylinder und Kolben höhere Verdünnungen erreicht werden als mit den gewöhnlichen Kolbenpumpen. Durch Kombination zweier Zylinder nach dem Babinetschen Prinzip werden die Leistungen noch weiter gesteigert.

Die erste Ölluftpumpe ist wohl die von Rob. Gill 1874 konstruierte[1]). Vor einigen Jahren kam eine von Fleuß gebaute, mit dem Namen „Geryk-pumpe" bezeichnete Ölluftpumpe von England aus nach Deutschland, wo sie seither von der Firma Arthur Pfeiffer in Wetzlar fabriziert wird. Die Fig. 514 gibt einen Vertikalschnitt durch einen der beiden Zylinder in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Größe. In der unteren Hälfte des metallischen Stiefels bewegt sich der mit einer losen Ledermanschette C gedichtete mit Öl überdeckte Kolben auf und nieder.

Fig. 514.



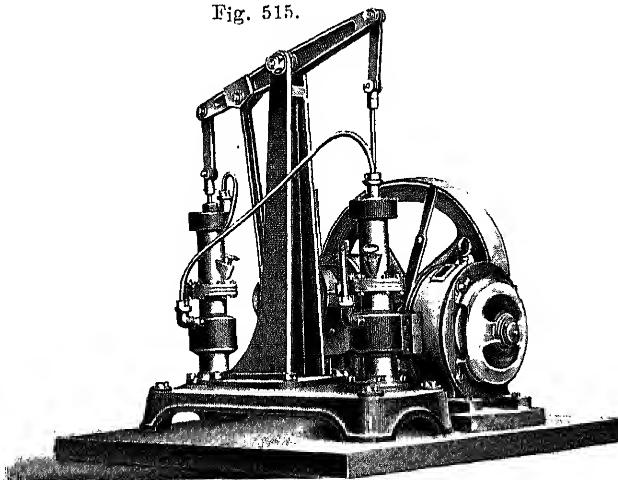
Ein unterhalb B befindliches Luftloch verbindet den Stiefelraum durch die umhüllende Kammer mit dem Saugrohr, welches zum Rezipienten führt. Im Kolben befindet sich ein Ventil E, welches aber nur beim Beginn des Auspumpens funktioniert und geschlossen bleibt, sobald der Druck auf etwa 13 mm gesunken ist. Während dieser ersten Kolbenbewegungen wird Luft durch das Saugrohr F unter den Kolben gesaugt, wodurch derselbe entlastet wird. Beim Heben des Kolbens wird das Luftloch B abgesperrt, die über dem Kolben befindliche Luft zu dem Auslaßventil G emporgetrieben. Der dadurch entstandene Druck preßt die Lederliderung fest an die Zylinderwand und verhindert das Durchtreten von Öl unter den Kolben. Sollte dennoch etwas Öl unter den Kolben gelangen, so wird es durch das Ventil E wieder über den Kolben gepreßt, sobald derselbe den Boden erreicht.

Kommt der Kolben an das obere Ende, so hebt er das Ventil G um $6^1/_2$ mm, preßt die Luft und hinterher einen Teil des Öles durch das Ventil G empor. Die Kolbenstange ist durch eine Liderung bei I, deren Flansch die Hülse G bedeckt, abgedichtet. Sobald der Kolben wieder um $6^1/_2$ mm gesunken ist, schließt sich wieder das Ventil G, nachdem vorher eine ent-

[1]) Dieselbe ist beschrieben in Fricks Physik. Technik, 6. Aufl., von O. Lehmann, S. 368.

sprechende Menge Öl in den unteren Zylinder geflossen ist. Sobald dann der Kolben so weit gesunken ist, daß das Luftloch B frei wird, strömt Luft aus dem Rezipienten durch A und B in das Innere des Zylinders. Auf diese Weise werden Verdünnungen bis zu $^1/_4$ mm erreicht. Um die Wirkung weiter zu steigern, werden zwei solche Stiefel in der Weise miteinander verbunden, daß das Saugrohr des ersten mit dem oberen Zylinderraum des

Fig. 515.



zweiten bei L kommuniziert, während das Saugrohr des zweiten erst mit dem Rezipienten in Verbindung steht. Hierdurch wird das in K befindliche Öl von aller Luft befreit. Eine solche Duplexpumpe gestattet dann angeblich, Verdünnungen bis zu 0,0002 mm Quecksilber zu erreichen. **Fig. 515** zeigt die Ausführung einer solchen Pumpe mit Schwungrad und Elektromotor. Diese Pumpe hat sich in zwölfjährigem Gebrauche sehr gut bewährt und wird als sehr handlich und unverwüstlich gerühmt [1]).

Ähnliche Ölluftpumpen sind in neuerer Zeit auch von anderen Firmen gebaut worden, doch kann auf diese Konstruktionen vorläufig hier nicht weiter eingegangen werden, da die Patentverhandlungen darüber noch nicht zur endgültigen Entscheidung gelangt sind.

§ 173. Die Quecksilberluftpumpen; Geißlers Pumpe. Schon früh hat man versucht, das Torricellische Vakuum zum Auspumpen der Luft zu benutzen, aber erst in neuerer Zeit ist es gelungen, brauchbare Quecksilberluftpumpen herzustellen.

Das Prinzip aller Quecksilberluftpumpen besteht darin, daß man den Rezipienten R, Fig. 516, aus welchem die Luft ausgepumpt werden soll, mit dem Torricellischen Raume v mittels eines Kanals in Verbindung setzt, welche Verbindung beispielsweise durch einen Hahn h hergestellt oder unterbrochen werden kann. Die Luft aus R wird sich dann zum Teil in das Vakuum begeben und dort einen Druck auf die Quecksilbersäule ausüben, wodurch die Höhe derselben, die ursprünglich op betrug, desto mehr vermindert wird, je größer der Raum R und je kleiner der Raum des Vakuums v ist.

[1]) Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr. XIV, 285; XVII, 61.

Sobald der Druck in diesen beiden Räumen gleich groß geworden, kommt auch das Quecksilber zur Ruhe. Man hat nun den Hahn *h* zu schließen und das Torricellische Vakuum aufs neue herzustellen. Je nach der Art, wie man das letztere bewerkstelligt, unterscheidet man zwei verschiedene Systeme von Quecksilberluftpumpen. Bei dem ersten System (welches wir System

Fig. 516.

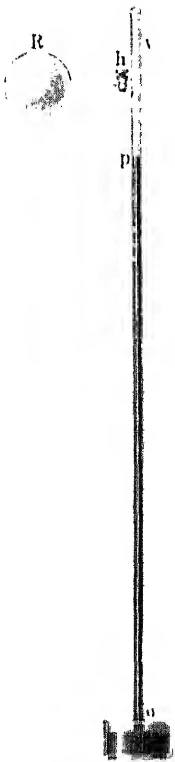


Fig. 517.

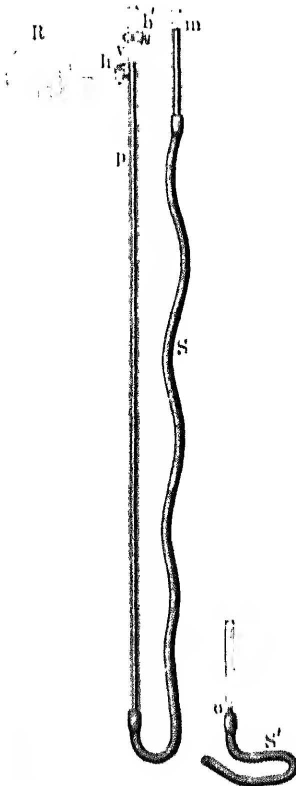
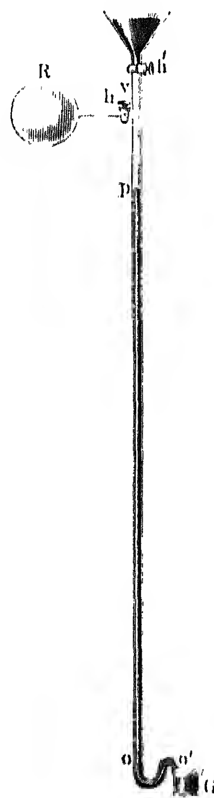


Fig. 518.



Geißler nennen wollen) nimmt man die Füllung mit dem Quecksilber von unten nach oben vor und entfernt die Luft am oberen Ende aus der Röhre. Zu diesem Zwecke kann man, wie Fig. 517 schematisch andeutet, den offenen Schenkel des Heberbarometers durch einen Kautschukschlauch mit dem verschlossenen Schenkel verbinden und durch Anheben des ersteren das Quecksilber auch in letzterem zum Ansteigen veranlassen. Zum Austritte der Luft dient der Hahn *h'* an dem oberen Ende der Röhre, bis zu dem oder über welchen hinaus man das Quecksilber steigen läßt. Schließt man dann wieder diesen Hahn, senkt den beweglichen Schenkel *S* in die Lage *S'*, so ist das Vakuum wiederhergestellt und kann durch Öffnung des Hahnes *h* wieder mit *R* in Verbindung gesetzt werden. Dieses Spiel ist so oft zu wiederholen, bis zwischen *h* und *h'* keine Luft mehr vorhanden ist.

Bei dem zweiten System von Quecksilberluftpumpen (System Sprengel) wird die Neufüllung mit Quecksilber von oben nach unten vorgenommen und die Luft am unteren Ende aus der Röhre geschafft.

Fig. 518 zeigt die dazu nötige schematische Anordnung. Das Quecksilber fließt in vollem Strahle aus dem Trichter T durch den Hahn h' in den Raum oberhalb p, drängt die Luft vor sich her nach dem unteren Ende und von dort durch die Öffnung o' hinaus. Das mit ausfließende Quecksilber wird in einem untergesetzten Gefäße G aufgefangen. Man erkennt sofort, daß es in diesem Falle nicht nötig ist, den Hahn h wechselweise mit h' zu öffnen und zu schließen. Man kann beide Hähne gleich offen lassen, solange das Auspumpen andauert. Die Luftquantitäten, welche sich zwischen die niederfließenden Quecksilbersäulen einschalten, werden immer kleiner und kleiner und verschwinden ganz, wenn das Auspumpen zu Ende ist.

Die schematisch angedeuteten Apparate, Fig. 517 und 518, erfordern eine Reihe von Vervollkommnungen, die wir nun im einzelnen kennen lernen wollen.

Die Geißlersche Pumpe ist in ihren Hauptbestandteilen durch Fig. 519 dargestellt. AC ist die feststehende Torricellische Röhre, welche bei A sich zu einem $1/_2$ bis $1\,1/_2$ Liter fassenden Gefäße erweitert. D ist der bewegliche Schenkel aus starkem, nicht vulkanisiertem übersponnenen Kautschukrohr, B das bewegliche Gefäß, welches durch eine mechanische Vorrichtung gehoben und gesenkt werden kann.

Das Gefäß A mündet bei t in eine vertikal ansteigende Röhre ti, welche sich am oberen Ende in ein trichterförmiges Gefäß i erweitert. Nahe über dem Punkte t geht nach rückwärts ein Seitenrohr, welches durch einen Glashahn h geschlossen werden kann. Dieses Rohr endet bei s in ein Schliffstück, durch welches die Verbindung mit dem Trockenapparat samt Barometerprobe und dem bei R anzusetzenden Rezipienten, welcher evakuiert werden soll, hergestellt wird. Der Trockenapparat besteht aus dem Gefäß q, welches mit den beiden aufsteigenden Trockenröhren und den Röhrenfortsätzen bis R und bis s ein Ganzes bildet. Die Hähne p und n dienen dazu, den Trockenapparat von dem Rezipienten R und der Pumpe absperren zu können. Ein Stöpsel o gestattet die Entleerung und Erneuerung der Schwefelsäure (oder Phosphorsäure) in q. Die Röhren enthalten Bimssteinstücke, welche mit Schwefelsäure befeuchtet sind. Das abgekürzte Barometer m ist mittels Schliffstückes in eine nach oben gerichtete Öffnung der horizontalen Röhre eingesetzt.

Zwischen t und i befinden sich noch zwei Hähne h' und h'', von denen der zweite nicht unbedingt erforderlich, aber zur Erreichung eines vollkommenen Vakuums sehr dienlich ist [1]). Bei i kann noch ein eingeschliffenes krummes Glasrohr k eingesetzt werden, welches die ausgepumpten Gase in eine pneumatische Wanne l überzuführen gestattet. Die vollkommene Dichtung bei i wird durch etwas eingegossenes Quecksilber sichergestellt.

Die Glashähne werden am besten durch eine Mischung von reinem Wachs mit reinstem Vaselin (einem mineralischen Fett) eingefettet. Diese Mischung kann in verschiedenem Grade von Dickflüssigkeit hergestellt werden, entwickelt keine Dämpfe und verharzt nicht [2]).

Das Auspumpen erfordert nun folgende Operationen:

---

[1]) Bei den Geißlerschen Pumpen älterer Konstruktion fehlte der zweite Hahn.

[2]) Röntgen, Wied. Ann. XXIII, S. 26.

kornes zur Größe der Erdkugel. Dieses Verhältnis ist immer noch leicht vorzustellen als das Verhältnis des Erddurchmessers, welcher $13 . 10^9$ m beträgt, zur Entfernung des uns nach der Sonne nächsten Fixsternes α Centauri, welche $41{,}1 . 10^{18}$ mm beträgt.

§ 13. Die Elemente oder Grundstoffe, ihre Bezeichnung und ihr Atomgewichte. Durch fortgesetzte Zerlegung (Scheidung) ist es den Chemikern gelungen, viele Stoffe in einfachere zu zerlegen. Als nicht weiter zerlegbar haben sich bis heute die in beistehender Tabelle[1]) (S. 33) aufgeführten 79 Elemente oder Grundstoffe ergeben. Die Elemente sind nach der Höhe ihres Atomgewichtes in Gruppen mit periodisch wiederkehrende Eigenschaften angeordnet. Ob dieselben alle wirklich einfach sind, oder durch später aufgefundene Hilfsmittel noch weiter zerlegt werden können, läßt sich nicht entscheiden. Die nähere Beschreibung dieser Grundstoffe, ihr Vorkommen und ihre Reindarstellung gehört ausschließlich der Chemie an.

Die Bedeutung der unter der Aufschrift „Atomgewicht“ aufgeführte Zahlen soll nun erklärt werden.

Indem die Chemiker die zusammengesetzten Stoffe nicht bloß in ihr Bestandteile zerlegten, um diese kennen zu lernen (qualitative Analyse sondern dabei auch die Mengenverhältnisse bestimmten, mit welchen die einzelnen Grundstoffe in den Verbindungen vorkommen (quantitative Analyse erkannten sie bald ein überaus wichtiges Gesetz, welches die chemische Verbindungen charakterisiert und von den mechanischen Gemengen wesentlich unterscheidet.

Während nämlich die mechanischen Gemenge im allgemeinen nach unendlich vielen Mischungsverhältnissen zusammengesetzt sein können, finde sich die chemischen Verbindungen in der Regel nur nach wenigen bestimmte und konstanten Verhältnissen zusammengesetzt.

Die relativen Gewichtsmengen, mit welchen die Elemente in den Verbindungen vorkommen, sind entweder durch die in der Tabelle angeführte Zahlenwerte oder durch ganze, einfache Multipla dieser Zahlen gegeben.

So z. B. verbinden sich[2]):

14	Massenteile	Stickstoff mit	8	Massenteilen	Sauerstoff zu	Stickoxydul,
14	"	" "	16	"	" "	Stickoxyd,
14	"	" "	24	"	" "	Salpetrigsäure-anhydrid,
14	"	" "	32	"	" "	Stickstoffdioxyd,
14	"	" "	40	"	" "	Salpetersäure-anhydrid.

Die Quantitäten Sauerstoff, die sich mit einer Quantität Stickstoff z durchaus verschiedenen Substanzen verbinden, stehen also in den einfache Verhältnissen von 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Dieselbe charakteristische Menge von Stickstoff, welche sich mit den angeführten Mengen von Sauerstoff verbindet, tritt aber auch bei der Vereinigung mit anderen Elementen auf. So verbinden si

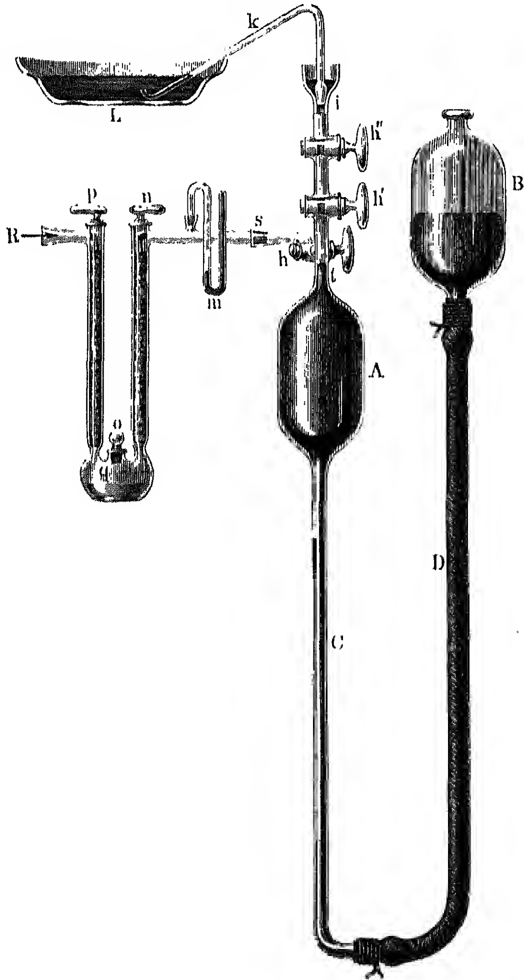
14	Massenteile	Stickstoff mit	1	Massenteil	Wasserstoff zu	Ammoniumnitrid,
14	"	" "	2	Massenteilen	" "	Hydrazin,
14	"	" "	2	"	" "	Ammoniak,

[1]) Nach H. Erdmann, Lehrb. d. anorg. Chemie, 2. Aufl., S. 61, 1900.

[2]) Indem wir die gebräuchlichen auf ganze Zahlen abgerundeten Atomgewicl verwenden.

Die Hähne p, n, h' und h'' sind offen, h wird geschlossen, das Gefäß B so weit gehoben, daß das Quecksilber von A über den Hahn h' emporsteigt. Nun wird h' geschlossen, B gesenkt, h geöffnet. A füllt sich mit Luft aus dem Rezipienten R. Hierauf wird wieder h geschlossen, h' geöffnet und B gehoben wie früher und so fort. Ist auf diese Weise beinahe alle Luft hinausgeschafft, was man daran erkennt, daß beim Ansteigen des Quecksilbers in t nur noch ein kleines Bläschen übrig bleibt, wobei auch die Barometerprobe m nahezu den Druck Null anzeigt, so kann man, wenn nötig, die Evakuierung noch weiter vervollkommnen, indem man von jetzt an auch den obersten Hahn h'' mit benutzt, welcher bisher offen gestanden hat. Man läßt zu diesem Behufe das Quecksilber bis über h'' ansteigen, schließt dann h'', senkt B, bis das Quecksilber unter h' gesunken, schließt nun h' und senkt dann erst bis zur Entleerung des Gefäßes A. Öffnet man nun h und schließt wieder, hebt dann das Quecksilber wiederum bis zum Hahn h', so kann man die dort zusammengedrückte Spur von Luft durch Öffnen von h' mit dem Vakuum zwischen h' und h'' in Verbindung setzen. Hierdurch wird dieselbe verhindert, am Glase zu adhärieren, von wo sie sich sonst bei Wiederherstellung des Vakuums in A in demselben ausbreiten könnte. Das Vakuum zwischen den Hähnen h' und h'' wirkt also analog der Vorrichtung von Babinet.

Fig. 519.



Beim Gebrauch der Pumpe ist Vorsicht nötig, damit das Quecksilber nicht zu rasch in das Vakuum einströme, da sonst durch den harten Anprall des Quecksilbers das Gefäß zerschlagen werden könnte.

Statt der oben beschriebenen Einrichtung mit den Hähnen h und h' findet man manchmal eine abweichende Konstruktion, bei welcher diese beiden Hähne durch einen einzigen nach dem Prinzip des Senguerdschen durchbohrten Hahnes ersetzt sind.

Fig. 520 zeigt diese ältere Konstruktion [1]), Fig. 521 den Hahn für sich. Je nach Stellung des Hahnes ist durch ihn die Verbindung zwischen t und r oder t und p hergestellt. Das Spiel des Apparates ist dann folgendes:

Fig. 520.

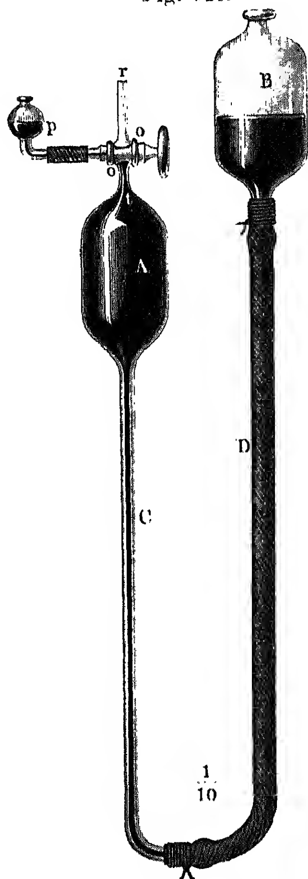
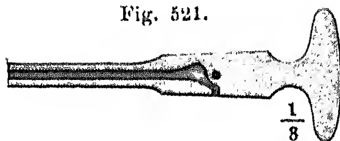


Fig. 521.



Wenn der Hahn bei o so gestellt ist, daß Verbindung zwischen A und p besteht, wird das mit Quecksilber gefüllte Gefäß B langsam gehoben, so daß sich zuerst A und dann auch p ungefähr so weit füllt, wie es die Figur zeigt. Alsdann wird der Hahn um 45° gedreht (an welcher Drehung auch die Kugel p teilnimmt) und dadurch alle Verbindung von A nach oben abgesperrt. Wird nun B allmählich gesenkt, so sinkt auch das Quecksilber in A, und es entsteht hier eine Torricellische Leere, mit welcher man den Rezipienten durch eine abermalige Drehung des Hahnes um 45° (durch welche nun die Kugel p in eine solche Lage gebracht wird, daß ihr Mittelpunkt in gleicher Höhe mit der Achse des Hahnes sich befindet) in Verbindung setzt.

Ist dann ein Teil der Luft aus dem Rezipienten nach A übergegangen, so wird der Hahn zunächst wieder um 45° zurückgedreht und durch Hebung von B die Luft in A komprimiert, welche dann nach abermaliger Rückdrehung des Hahnes um 45° (also nachdem er wieder in seine Anfangsstellung gebracht worden ist) durch das Quecksilber in p ausgetrieben wird, worauf dann dieselbe Reihe von Operationen wiederholt wird.

Statt des Glashahnes wird wohl auch ein solcher aus Stahl verwendet, wie dies z. B. bei den Quecksilberluftpumpen von Morren und von Jolly der Fall ist. Die Abbildung des letzteren Instrumentes in Fig. 522 läßt zugleich die mechanische Einrichtung ersehen, wodurch das Heben und Senken des Gefäßes B bewerkstelligt wird. Das Gefäß A ist oben und unten in eiserne Fassungen eingekittet, deren obere den Teller T trägt, und mit dem Hahn o versehen, während die untere mit dem eisernen Rohre C verbunden ist. Der Hahn o, dessen Einrichtung Fig. 523 und 524 deutlicher zeigt, unterscheidet sich von dem in Fig. 521 dargestellten dadurch, daß er noch einen Kanal K hat, welcher rechtwinklig steht zu der gerade durchgehenden, mit dem Griffe des Hahnes o parallel laufenden Bohrung.

---

[1]) Die neueren Geißlerschen Pumpen mit Senguerdschem Hahn haben noch einen zweiten gewöhnlichen Hahn oberhalb des ersteren.

Auf der einen Seite der vorderen Hahnenfläche ist eine Linie eingefeilt, welche mit K parallel läuft. Wird der Hahn so gedreht, daß der eingefeilte Strich

Fig. 522.

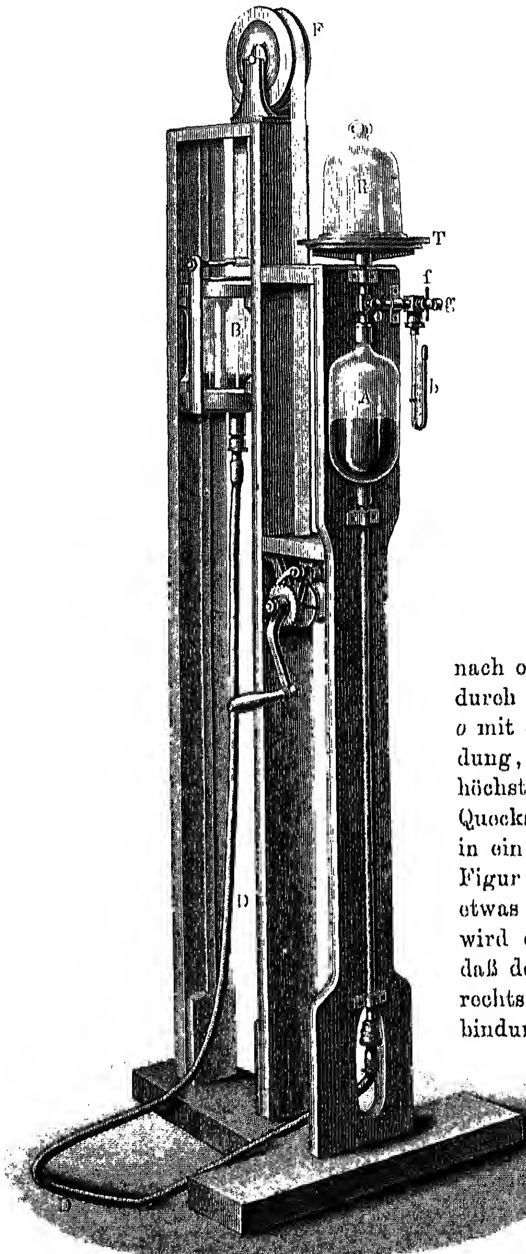


Fig. 523.

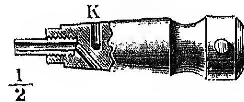


Fig. 524.

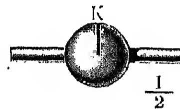
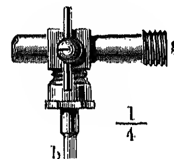


Fig. 525.



nach oben gerichtet ist, so steht A durch den schiefen Kanal des Hahnes o mit der äußeren Luft in Verbindung, und wenn sich B in seiner höchsten Stellung befindet, so läuft Quecksilber durch das Röhrchen n in ein kleines Gefäß, welches in der Figur nicht sichtbar ist. Nachdem etwas Quecksilber ausgeflossen ist, wird der Hahn um 45° so gedreht, daß der eingefeilte Strich nach oben rechts geht. Nun sind alle Verbindungen abgeschlossen, und wenn B bis in seine tiefste Stellung herabgelassen wird, so sinkt das Quecksilber in A, und über demselben bildet sich ein Torricellisches Vakuum, in welches die Luft aus dem Rezipienten R einströmt, sobald man den Hahn um 45° weiter dreht, so daß der Griff des Hahnes vertikal steht und der eingefeilte Strich horizontal nach rechts schaut. Jetzt ist auch die Barometerprobe b mit A in Verbindung, und man

kann den Grad der Verdünnung ablesen. Hat sich alles ins Gleichgewicht gestellt, so wird der Hahn *o* wieder um 45° zurückgedreht, *B* in seine höchste Stellung gebracht, der Hahn *o* nochmals um 45° zurückgedreht, um abermals etwas Quecksilber auslaufen zu lassen usw.

Über der Barometerprobe ist ein zweiter Hahn *f* angebracht, welcher dem Hahn *o* bis auf den Umstand ganz gleich ist, daß der schiefe Kanal mit der Mündung *n* ganz fehlt. In der Stellung des Hahnes *f*, wie ihn Fig. 522 (deutlicher Fig. 525) zeigt, ist die Barometerprobe mit *A* in Verbindung; wird aber der Hahn *f* um 90° so gedreht, daß der Griff wagerecht steht und der eingefeilte Strich nach unten gerichtet ist, so steht die Barometerprobe auch mit der Mündung des eisernen Rohres bei *g* in Verbindung.

In dieser Stellung bleibt der Hahn *f*, wenn es sich darum handelt, kleinere Räume, etwa Geißlersche Röhren und dergleichen, zu evakuieren. Es wird dann bei *g* eine eiserne Fassung angeschraubt, in welche die Enden der luftleer zu machenden Röhren eingekittet sind. Der Rezipient *R* wird entfernt und die Röhrenmündung in der Mitte des Tellers zugeschraubt. Wie der Hahn *o* während der Operation zu verstellen ist, bedarf nach dem Obigen keiner weiteren Erläuterung.

Der Umstand, daß das Quecksilber im Gefäße *B* mit der Luft der Atmosphäre in Verbindung kommt, hat den Übelstand zur Folge, daß es sich dabei oxydiert und auch Spuren von Feuchtigkeit aufnehmen kann.

Das letztere kann man durch Anbringung eines Chlorcalciumrohres verhindern. A. P. Weinhold hat, um die Kommunikation mit der Atmosphäre zu vermeiden, das Gefäß *B* gänzlich verschlossen und daselbst nur eine kleine Luftblase zurückbehalten, welche den harten Anschlag des Quecksilbers zu verhindern bestimmt ist. Begreiflicherweise muß dann aber die Höhe des Schenkels *D* um die Höhe des Barometerstandes vergrößert werden, indem man zwischen dem Gefäße *B* und dem Schlauche *D* noch eine Röhre von entsprechender Länge einschaltet. Hierdurch bekommt allerdings das ganze Instrument eine unbequeme Höhe.

Die Geißlersche Pumpe hat noch mancherlei Modifikationen erfahren, so hat z. B. v. Babo den Hahn durch Ventile ersetzt. Bei der im nächsten Paragraphen zu beschreibenden Pumpe von Töpler sind diese Ventile selbst wiederum durch Quecksilbersäulen vertreten, welche selbsttätig wirken.

Statt das Quecksilber in *A* dadurch anzuheben, daß man den kommunizierenden beweglichen Schenkel emporhebt, kann man auch das Quecksilber in letzterem durch einen eingetauchten Körper verdrängen. Bei einer von dem Innsbrucker Mechaniker Kravogl noch vor dem Bekanntwerden der Geißlerschen Pumpe konstruierten Quecksilberluftpumpe [1]) wurde durch einen Mechanismus ein Stahlzylinder durch eine Stopfbüchse von unten in das Gefäß *A* hineingeschoben und wieder zurückgezogen und hierdurch das den Stahlzylinder bedeckende Quecksilber gehoben und gesenkt. Die Pumpe ähnelt dann der oben beschriebenen Ölpumpe, in der das Öl durch Quecksilber ersetzt ist.

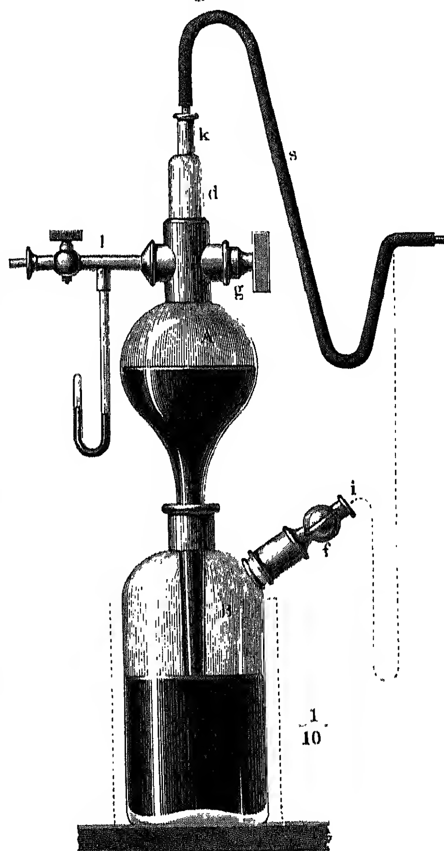
---

[1]) Beschrieben von A. v. Waltenhofen (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1861, Bd. 44).

Endlich kann die Hubhöhe des Quecksilbers in der Torricellischen Röhre nach Poggendorff[1]) dadurch vermindert werden, daß man eine gewöhnliche Luftpumpe zu Hilfe nimmt.

Der Körper des Poggendorffschen Instrumentes, Fig. 526, besteht aus zwei Teilen, einer Glasflasche *B* und einem eiförmigen Glasgefäß *A* mit einem kurzen Hals nach oben und einem langen nach unten, welcher in den Hals der Flasche *B* eingeschliffen, fast auf den Boden derselben hinabreicht.

Fig. 526.



Auf dem oberen Halse von *A* ist eine eiserne Fassung aufgekittet, welche durch einen Hahn geschlossen werden kann, dessen Bohrung ähnlich der des Geißlerschen ist. Je nach seiner Stellung vermittelt er die Verbindung zwischen *A* und dem Glasfläschchen *d*, oder zwischen *A* und der Röhre *l*, welche jedoch so befestigt ist, daß sie an der Drehung des Hahnes *g* nicht teilnimmt. An dem freien Ende der Röhre *l* werden die zu evakuierenden Räume samt Zubehör befestigt.

In die obere Fassung der kleinen Flasche *d* kann ein hohler Metallzapfen luftdicht eingesteckt werden, welcher das eine Ende des zur Luftpumpe führenden Gummischlauches *s* bildet.

Auf die Tubulatur der Flasche *B* ist eine durch den Hahn *f* verschließbare Fassung aufgekittet, in welche dasselbe Ende des Kautschukrohres *s* eingesteckt werden kann, welches jetzt in *k* steckt.

Zunächst wird der Hahn *g* so gestellt, daß *A* und *d* verbunden sind, und der Schlauch *s* bei *k* eingesteckt. Wird nun, während der Hahn *f* geöffnet bleibt, die Luftpumpe in Bewegung gesetzt, so steigt das Quecksilber aus *B* nach *A*. Man fährt mit Pumpen fort, bis auch *d* mit Quecksilber gefüllt ist.

Nun wird durch eine Drehung des Hahnes *g* um 45° alle Verbindung von *A* nach oben abgesperrt, der Schlauch *s* bei *i* eingesteckt und die Luftpumpe abermals in Tätigkeit gesetzt. Das Quecksilber geht von *A* nach *B* herab, und in *A* entsteht ein Torricellisches Vakuum, mit welchem der Rezipient durch eine abermalige Drehung des Hahnes *g* um 45° in Verbindung gebracht wird usw.

---

[1]) Pogg. Ann., Bd. 125.

Der Sicherheit halber ist das Gefäß B in ein weiteres Holzgefäß eingestellt, welches in unserer Figur durch Punktierung angedeutet ist.

Dasselbe Prinzip kommt bei den komplizierteren Quecksilberluftpumpen, welche von Mitscherlich [1]), Neesen [2]), A. Schuller [3]) u. a. angegeben wurden, zur Anwendung. Schullers Pumpe ist mit einer sehr sinnreichen Steuerung versehen, welche automatisch wirkt, so daß man nur die Hilfspumpe (welche auch eine Wasserluftpumpe sein kann) in Gang zu setzen braucht.

§ 174. Töplers Quecksilberluftpumpe ohne Hahn und Ventil. Eine sehr sinnreiche Abänderung der Geißlerschen Pumpe, wodurch die Hähne und Ventile ganz vermieden werden, hat A. Töpler [4]) angegeben. Wir beschreiben dieselbe hier mit einigen nachträglichen Verbesserungen, welche von Neesen [5]) und Bessel-Hagen [6]) angebracht worden sind. Die Fig. 527 läßt in perspektivischer Abbildung folgende Teile erkennen:

KA die Torricellische Röhre mit dem Vakuumraum K.

SQ den beweglichen Schenkel mit dem anhebbaren Quecksilberreservoir Q.

XY die Anhebevorrichtung mit Gestell und Winde.

DO ein seitliches Verbindungsrohr (von Neesen eingeführt, um die heftigen Stöße des Quecksilbers beim Eintritte der Luft aus dem Rezipienten zu vermeiden).

OBC das Auslaßrohr, welches den Auslaßhahn ersetzt. Dasselbe besteht aus einer Röhre in Form eines Heberbarometers [7]), deren längerer Schenkel B 2 mm weit und 815 mm lang, dessen kürzerer, oben in ein offenes Chlorcalciumrohr mündender Schenkel C 13 mm weit und 250 mm lang ist.

PJG_1 die Verbindungsvorrichtung, welche die Kommunikation zwischen dem Vakuumraum K und dem Rezipienten R vermittelt. Dieselbe besteht aus der 110 cm langen, oben offenen Steigröhre PJ (siehe Fig. 528), dem daran befestigten, als Quecksilberwanne fungierenden Gefäße F und der verkehrt U-förmigen Röhre G_1 bzw. G_2, welche mit ihrem weiteren Schenkel über das Steigrohr PJ darüber gestülpt ist, so daß sie in das Quecksilber in F eintaucht.

M das mit wasserfreier Phosphorsäure beschickte Trockengefäß.

H das Verbindungsrohr, welches mit dem Rezipienten R (hier als Geißlersche Röhre angenommen) entweder durch Anschmelzen (Fig. 527) oder durch Schliffstücke und Hähne (Fig. 528) verbunden ist.

---

[1]) Pogg. Ann., Bd. 150, S. 420.

[2]) Wied. Ann., Bd. 13, S. 304, dann Zeitschrift für Instrumentenkunde 1882, S. 285.

[3]) Wied. Ann., Bd. 13, S. 528.

[4]) A. Töpler, Dingl. polyt. Journ., Bd. 163, S. 426, 1862.

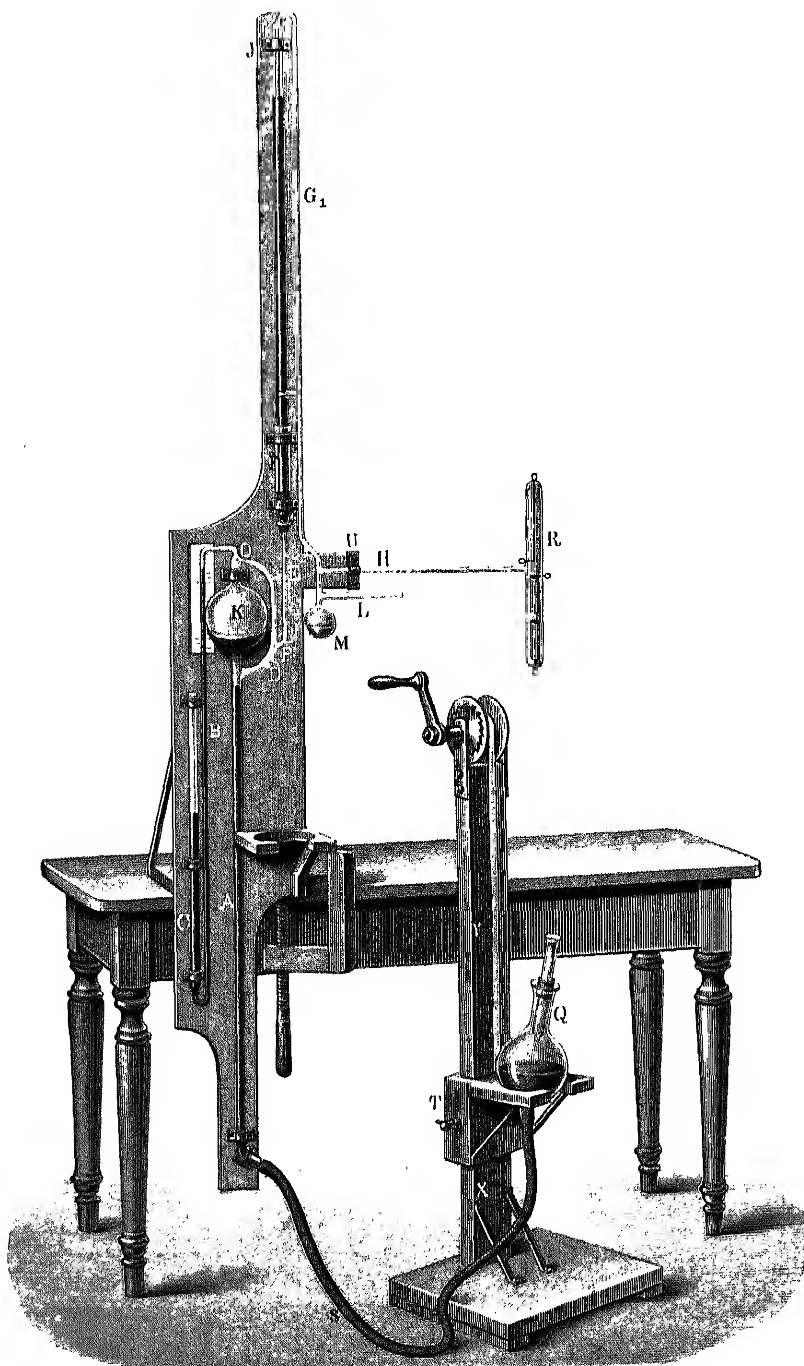
[5]) Neesen (Wied. Ann., Bd. 3, S. 608, 1878) verwendete zuerst das Rohr DO (Fig. 527) bei seiner Quecksilberventilluftpumpe.

[6]) E. Bessel-Hagen (Wied. Ann., Bd. 12, S. 425, 1881). Dessen Abhandlung ist auch die Fig. 527 entnommen.

[7]) Töpler hatte ursprünglich die Form eines Gefäßbarometers angewendet.

L (Fig. 527) ist eine Öffnung, welche zur Einbringung der Phosphorsäure dient und dann dünn ausgezogen und zugeschmolzen wird.

Fig. 527.

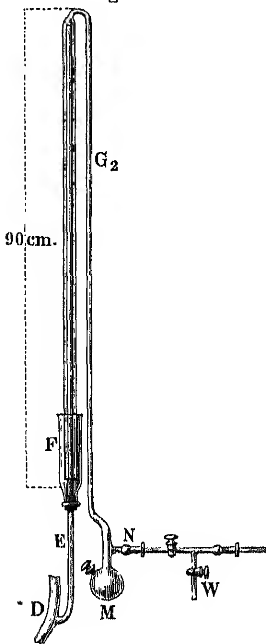


Durch dieselbe Öffnung läßt man wiederum Luft ein, indem man die Spitze abbricht.

Soll jeder Hahn gänzlich vermieden und die höchste Verdünnung erreicht werden, so dient das Verbindungsrohr G_1 (Fig. 527), im anderen Falle G_2 (Fig. 528).

Die Bestandteile C, B, K, A, P bis J bilden zusammen ein ganzes Stück aus Glas, welches auf einem vertikalen Brett derart befestigt ist, daß der untere Teil der Kugel K mit einem Metallband umgeben und mit Gips in letzteres eingebettet ist. Die übrigen Rohrteile sind mittels nicht zu enger Metallbänder auf das Holz aufgeschraubt. Auf der Rückseite ist ein horizontales, durch Stützen abgesteiftes Brett angebracht, um die Pumpe an den Experimentiertisch anzuschrauben. Die Hebevorrichtung für das Reservoir Q steht separat auf dem Boden.

Fig. 528.



Der Gebrauch der Pumpe ist nun folgender: Man befestigt den zu evakuierenden Rezipienten durch Anschmelzen an das vom Apparate abgehobene Rohr G_1 (oder mittels Schliffstück an das Rohr G_2), beschickt die Kugel M durch L mit Phosphorsäure (eventuell Schwefelsäure) und schmelzt L zu. Das Auspumpen kann nun beginnen und besteht lediglich in einem Heben und Senken des Quecksilbergefäßes Q. Hebt man dasselbe, so wird, sobald das Quecksilber im Rohre A bis zur Einmündungsstelle P des zum Rezipienten führenden Steigrohres gestiegen ist, die Verbindung der Kugel K mit dem Rezipienten durch die im Rohre PJ aufsteigende Quecksilbersäule unterbrochen, während die in K enthaltene Luft zusammengepreßt und genötigt wird, in Blasen durch das im Auslaßrohr BC befindliche Quecksilber zu entweichen. Ist das Quecksilber in K bis O gestiegen, so wird Q wieder gesenkt, das Quecksilber fließt aus K und PJ zurück, die Einmündungsstelle P wird frei, und die im Rezipienten enthaltene Luft kann neuerdings nach K übertreten. Gleichzeitig steigt im Auslaßrohr B das Quecksilber aus C und ebenso aus der Wanne F in den zwischen Steigrohr PJ und Überstülprohr G vorhandenen Raum empor, und zwar bis zu einer Höhe, welche der Spannungsdifferenz zwischen der Atmosphäre und der Luft des Rezipienten entspricht. Während des nun folgenden Wiederanhebens des Quecksilbers Q steigt sofort auch Quecksilber in das Rohr PJ und unterbricht dadurch die Verbindung mit dem Rezipienten, gleichzeitig fällt die Quecksilbersäule in B, bis schließlich wiederum die Luft aus K durch B und C hinausgepreßt wird. Diese Art des Pumpens wird so lange fortgesetzt, bis bei C keine oder nur unbedeutende Luftblasen entweichen. Es bleibt dabei das Rohr B mit Luft gefüllt, deren Spannung gleich ist jener der Atmosphäre, vermehrt um die kleine Quecksilbersäule in C. Diese Luft entspricht jener des schädlichen Raumes anderer Luftpumpen. Um sie zu eliminieren, wird von jetzt an das Gefäß Q nur noch langsam höher, und zwar so weit gehoben, bis das Queck-

silber aus K in das Rohr B eintritt und die Luft vor sich her bei C hinaustreibt. Bringt man hierauf Q wieder in die tiefste Lage, so entsteht nun in K eine Torricellische Leere, welche mit dem Rezipienten in Verbindung gelangt, sobald die Stelle P frei wird. Sollte aus K so viel Quecksilber nach C gelangt sein, daß die Höhendifferenz der Quecksilbersäulen in B und C kleiner geworden, als dem Atmosphärendruck entspricht, so wird durch den letzteren von selbst Quecksilber nach K zurückgedrückt werden, bis das Gleichgewicht eingetreten ist. Damit dabei keine haftend gebliebene Luft zurückgeführt werde, muß die weitere Röhre C nicht halbkugelförmig, sondern trichterförmig an B angesetzt sein. Bei Beginn des Pumpens ist Q so weit zu heben, bis das Quecksilberniveau in Q um die Säule C höher steht als O; später ist nur eine geringere Erhebung nötig. Man gibt zweckmäßig dem das Quecksilbergefäß Q tragenden Träger T durch Einstecken von Anschlagstiften in eines der Löcher X und Y der Holzsäule nur eine solche Bewegungsweite auf- und abwärts, daß das Quecksilberniveau in Q bei der höchsten und tiefsten Stellung des Trägers nahezu um Barometerhöhe tiefer steht als die obere bzw. untere Einmündungsstelle des Rohres D. Zum Hinausschaffen der letzten Luftreste hebt man dann noch vorsichtig mit der Hand das Gefäß Q aus dem Träger, damit nicht zu heftige Stöße des Quecksilbers erfolgen.

Wie man sieht, ist Töplers Pumpe als eine Kombination von drei Barometern anzusehen; man kann sie aber auch mit einer Kolbenluftpumpe vergleichen, in welcher das Rohr AK als Stiefel, das Quecksilber in A als Kolben, das in CB und in PJ als Ventile wirken.

Ein wesentlicher Vorteil der Töplerschen Pumpe besteht darin, daß dieselbe bei jedem einzelnen Hube eine Messung der übrig gebliebenen Spannung der Luft im Raume K zu machen gestattet [1]). Die gewöhnlichen abgekürzten Barometer (Barometerproben) sind dazu nicht geeignet, da die zu messenden Spannungen bis unter 0,000 01 mm Quecksilber hinabreichen und überdies die Barometer selten so vollkommen luftfrei gefüllt sind, daß sie nicht negative Drucke anzeigen, sobald die Verdünnung einen hohen Grad erreicht hat. Bei Töplers Pumpe geschieht die Druckmessung der restierenden Luft nach dem Prinzip von Arago (§ 158). Zu diesem Zwecke ist das Rohr B mit einer Skala versehen, welche auf der einen Seite mit Millimeterteilung, auf der anderen Seite mit einer Volumteilung versehen ist, welche von dem Einmündungspunkte O an beginnt und nach Zehntel-Cubikcentimetern fortschreitet. Außerdem ist das gemeinschaftliche Volumen der Kugel K und des Rohres D zwischen O und P bestimmt. Um eine Druckmessung vorzunehmen, hat man folgende drei Ablesungen zu machen:

1. Während das Quecksilber in K so tief steht, daß eben noch die Verbindung bei P frei ist, wird der Stand der Quecksilberkuppe in B notiert.
2. Während das Quecksilber in K bis O steht, wird wiederum der Stand in B notiert.
3. Gleichzeitig wird daselbst das Volumen v abgelesen.

[1]) A. Töpler (Sitzungsber. der naturw. Ges. Iris in Dresden 1877, S. 135).

Ist h die Differenz der Ablesungen in 1. und 2. [1]),
v das zurückgebliebene Volumen,
V das Volumen der Kugel K samt Rohr D,
x der zu bestimmende Druck, welcher die erreichte Luftverdünnung mißt, so ist nach dem Boyleschen Gesetze:

$$Vx = v(x + h), \text{ woraus } x = \frac{v}{V - v} h,$$

oder, da v neben V verschwindend klein ist, $x = \frac{v}{V} h$.

Gegen die volle Richtigkeit dieser Methode ließe sich nach unserer Meinung nur der eine Einwand erheben, daß während des Ansteigens des Quecksilbers in K infolge Zunahme des Druckes von x auf $x + h$ bereits ein Teil der Luft an die Wände sich anlegen oder von dem Quecksilber absorbiert werden kann, so daß infolgedessen etwas zu niedrige Werte für den Druck, also zu hohe Verdünnungen gefunden werden.

§ 175. Sprengels Quecksilberluftpumpe. Nachdem wir das Prinzip dieser Luftpumpe im § 173 erörtert haben, erübrigt uns nur noch, ein wirklich brauchbares Instrument dieser Art zu beschreiben. Eine nach dem Schema der Fig. 518 konstruierte Pumpe hätte vor allem den Nachteil, daß, wenn das Quecksilber in dem Trichter einmal ganz ausginge, sofort Luft in den Rezipienten eindringen würde und die ganze Arbeit des Auspumpens von vorn an wiederholt werden müßte. Am vollkommensten ausgebildet wurde die Sprengelsche Pumpe wohl von Gimingham [2]), dessen Apparat von Crookes zu seinen Experimenten benutzt worden ist. Die in Fig. 529 in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe abgebildete von A. Weinhold [3]) ist als eine Vereinfachung derselben zu betrachten. Ihre Bestandteile sind:

- f Die Fallröhre von 2 mm Weite, in deren oberem, weiterem Teile, dem Saugrohr, sich das Vakuum bilden soll.
- r Die Zuführungsröhre für das Quecksilber, verbunden mit dem beweglichen Schenkel aus Kautschuk und dem Reservoir T.
- E Das Trockengefäß, welches einerseits mit der Fallröhre f, andererseits mit dem Rezipienten durch R, außerdem mit dem Manometer B durch Schliffstücke in Verbindung steht.
- g Ein Sammelgefäß mit zwei nach aufwärts gebogenen seitlichen Ausflußröhren, wovon die obere zum Austritt der Luft, die untere zum Ausfluß des Quecksilbers dient. Die Fallröhre mündet natürlich unterhalb der Höhe der letzteren Ausflußöffnung.

Das Trockengefäß E wird durch die Schliffőffnung des Manometers B mit Schwefelsäure oder Phosphorsäure gefüllt. Es ruht auf dem Kork k

---

[1]) Die Niveauänderung im Rohre C kann bei der Messung von h vernachlässigt werden, da C viel weiter ist als B.

[2]) Proc. Roy. Soc. XXV, p. 396. Eine Beschreibung und Abbildung dieses zwar sehr sinnreichen, aber auch sehr komplizierten (aus 20 größtenteils durch Schliffstellen verbundenen Glasteilen zusammengesetzten) Apparates findet sich in Wiedem. Beibl., Bd. 1, S. 175, 1877.

[3]) A. Weinhold, Physik. Demonstr., S. 171.

Name des Elementes	Zeichen	Atomgewicht	Name des Elementes	Zeichen	Atomgewicht
Wasserstoff	H	1,00	Zirkonium	Zr	89,72
Helium	He	4,00	Niob (Kolumbium)	Nb	93,02
Lithium	Li	6,97	Molybdän	Mo	95,26
Beryllium	Be	9,01	Ruthenium	Ru	100,91
Bor	B	10,86	Rhodium	Rh	102,23
Kohlenstoff	C	11,91	Palladium	Pd	106,00
Stickstoff	N	13,93	Silber	Ag	107,11
Sauerstoff	O	15,88	Cadmium	Cd	111,55
Fluor	F	18,91	Indium	In	113,10
Neon	Ne	19,86	Zinn	Sn	118,10
Natrium	Na	22,88	Antimon	Sb	119,52
Magnesium	Mg	24,10	Jod	J	125,89
Aluminium	Al	26,91	Tellur	Te	127,10
Silicium	Si	28,18	Xenon	Xe	127,10
Phosphor	P	30,75	Cäsium	Cs	131,89
Schwefel	S	31,83	Baryum	Ba	136,39
Chlor	Cl	35,18	Lanthan	La	137,59
Kalium	K	38,82	Cer	Ce	138,00
Argon	Ar	39,70	Praseodym	Pr	139,41
Calcium	Ca	39,76	Neodym	Nd	142,52
Scandium	Sc	43,78	Samarium	Sa	149,20
Titan	Ti	47,79	Gadolinium	Gd	155,57
Vanadium	V	50,99	Terbium	Tb	158,80
Chrom	Cr	51,74	Erbium	Er	164,70
Mangan	Mn	54,57	Thulium	Tu	169,40
Eisen	Fe	55,60	Ytterbium	Yb	171,88
Nickel	Ni	58,41	Tantal	Ta	181,45
Kobalt	Co	59,07	Wolfram	W	183,00
Kupfer	Cu	63,12	Osmium	Os	189,55
Zink	Zn	64,91	Iridium	Ir	191,66
Gallium	Ga	69,50	Platin	Pt	193,41
Germanium	Ge	71,93	Gold	Au	195,74
Arsen	As	74,45	Quecksilber	Hg	198,50
Selen	Se	78,58	Thallium	Tl	202,61
Brom	Br	79,34	Blei	Pb	205,36
Krypton	Kr	81,00	Wismut	Bi	206,54
Rubidium	Rb	84,75	Radium	Ra	225,00
Strontium	Sr	86,95	Thor	Th	230,80
Yttrium	Y	88,35	Uran	U	237,77
			Polonium	Po	?

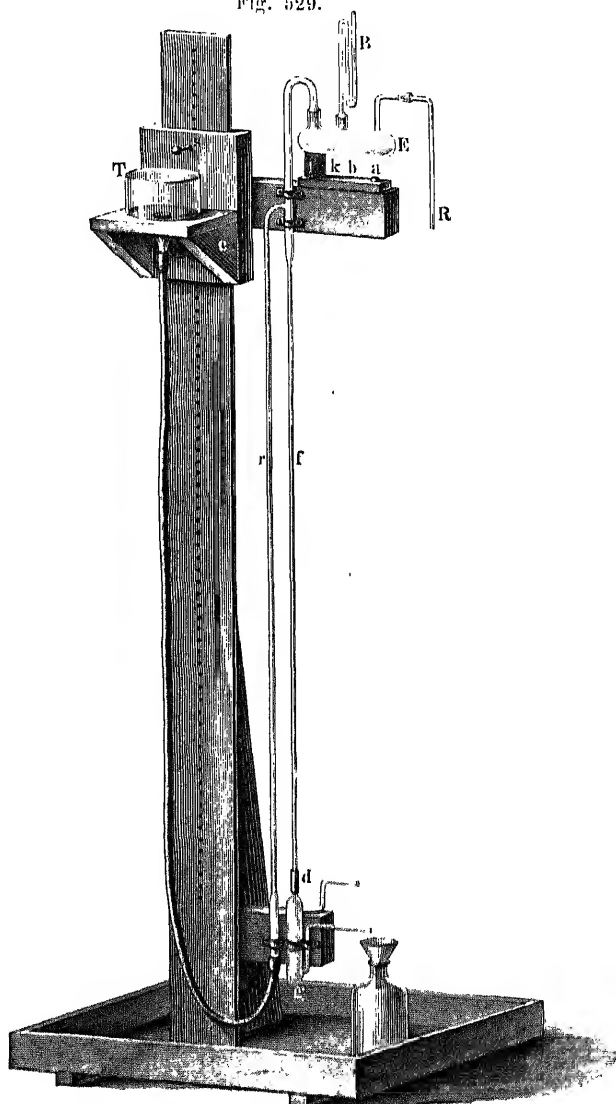
und andererseits verbinden sich

1 Massenteil Wasserstoff mit 8 Massenteilen Sauerstoff zu Wasser,
1 „ „ „ 16 „ „ „ Wasserstoffsuperoxyd.

Diese Beispiele, die sich sehr vermehren ließen, zeigen, daß die relativen Mengen der in Verbindung tretenden Massen stets ganze Multipla der als

auf, welcher auf dem Brettchen b festgeleimt ist. Dreht man letzteres um die Schraube a, so kann das Trockengefäß nach abwärts losgelöst werden. Da außerdem das Trockengefäß um das Schliffstück der Saugröhre wie um eine vertikale Achse, ferner das Verbindungsrohr R um sein Schliffstück als horizontale Achse gedreht werden können, so ist dadurch dem Verbindungsrohr allseitige Beweglichkeit gesichert.

Fig. 529.



Beim Gebrauche wird der Träger c des Quecksilberreservoirs T anfangs so hoch an dem Stativ befestigt, daß das Niveau etwas über der Einmündungsstelle des Rohres r in das Fallrohr f steht. Sowie die Entleerung fortschreitet, senkt man nach und nach das Reservoir T so weit, daß oben noch immer Quecksilber durch den Luftdruck nach der Fallröhre hinübergetrieben wird. Gegen Ende wird das Niveau von T um die Barometerhöhe tiefer stehen als die Einmündungsstelle. Das unten ausfließende Quecksilber wird in der Flasche aufgefangen und oben wiederum aufgegossen. Man beobachtet an dem Kleinerwerden der mitgerissenen Luftblasen und dem härteren Klange des aufschlagenden Quecksilbers den Fortschritt des Auspumpens.

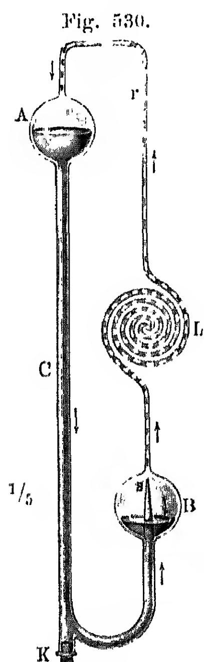
Bei der oben erwähnten Giminghamschen Pumpe sind der rascheren Verdünnung wegen statt einer einzigen Fallröhre drei nebeneinander vorhanden. Ferner ist diese Pumpe mit einem Apparat zur Messung der Verdünnung nach Mc Leod ausgerüstet, welcher auf demselben Prinzip wie jener an der Töplerschen Pumpe beruht und im nächsten Paragraphen beschrieben wird.

§ 176. Sprengels Pumpe mit selbsttätiger Quecksilberanhebung. System Schantel-Kahlbaum. Wie bei den Quecksilberpumpen nach Geißlerschem Prinzip, so sind auch für jene nach dem Sprengelschen Prinzip selbsttätige Vorrichtungen zur Wiederanhebung des Quecksilbers angebracht worden, welche durch die (später zu beschreibende) Bunsensche Wasserluftpumpe betrieben werden können [1]).

Das Prinzip der Hebevorrichtung ist dasselbe, welches schon seit lange bei einem von den Glasbläsern als Paradestück angefertigten Apparate, dem Zirkulationsheber, in Anwendung steht.

Fig. 530 zeigt einen solchen Apparat. Die etwa fingerdicke Glasröhre *C* ist oben mit dem Reservoir *A* verbunden, unten ist sie umgebogen und endet mit einer engen Röhrenmündung *s* innerhalb des Reservoirs *B* nahe beim Eingang in die Kapillarröhre *L*, welche mehrfach in beliebiger Form gewunden durch das Rohr *r* von oben in das Reservoir *A* mündet. Bei *K* wird gefärbter Weingeist eingegossen, bis die Röhre *C* und ungefähr die Hälfte von *A* damit ausgefüllt erscheint, und dann mittels Korks verschlossen. Man hängt den Apparat zuerst umgekehrt auf, damit sich alle Flüssigkeit in *A*, *C* und *r* sammelt. Dann bringt man ihn in die dargestellte Lage. Die Flüssigkeit fließt nun, durch den hydrostatischen Druck getrieben, an der Röhrenspitze bei s aus, verdrängt aus dem Reservoir die Luft in die Kapillare, wodurch abwechselnd mit Luft Tropfen der gefärbten Flüssigkeit in die Kapillare eingeführt werden, welche, den Windungen derselben entlang wandernd, einen niedlichen Anblick gewähren.

Fig. 530.



Da der hydrostatische Gegendruck dieser durch Luftblasen unterbrochenen Flüssigkeitssäule nur so groß ist wie die Summe der einzelnen Flüssigkeitssäulen, aus denen sie besteht, so erklärt sich, daß die Flüssigkeit höher ansteigen kann, als sie von *A* aus gesunken ist. Sie steigt daher durch *r* nach *A* und vereinigt sich mit der dortigen Flüssigkeit. Endlich ist das Reservoir *B* mit Flüssigkeit gefüllt, worauf die Bewegung derselben aufhört.

Die Fig. 531 zeigt uns eine Sprengelsche Pumpe mit automatischem Quecksilberanhub nach dem System Kahlbaum, mit den Abänderungen, welche L. Zehender [2]) daran angebracht hat, in $^1/_{10}$ d. n. Gr. Auf einem vertikalen Holzrahmen, dessen Fuß in der Figur fortgelassen ist, sind folgende Bestandteile befestigt: das Sprengelsche Fallrohr *F* mit der Einströmungsvorrichtung *A f* und der Ausmündung in das Gefäß G_2; das Zuführungsrohr R_1 mit dem Luftfang *L*, welcher oben durch ein Ventil (oder Hahn) H_1 verschlossen, unten durch den mit der Klemme *K* verschließbaren Schlauch mit dem Gefäße G_1 verbunden ist; das Steigrohr R_2, welches aus dem Gefäße G_2 bis zum Scheidungsgefäße G_3 aufsteigt, von welchem letzteren das von der Luft befreite Quecksilber in das Gefäß G_1

[1]) Von L. v. Babo 1878, von Schantel 1888, von Kahlbaum 1891.
[2]) L. Zehender, Ann. d. Phys. 10, 623, 1903.

abfließt; das Verbindungsrohr s_2, welches durch die Trockenflasche T_3 hindurch mit der Wasserluftpumpe (in der Figur nicht gezeichnet) in Ver-

Fig. 531.

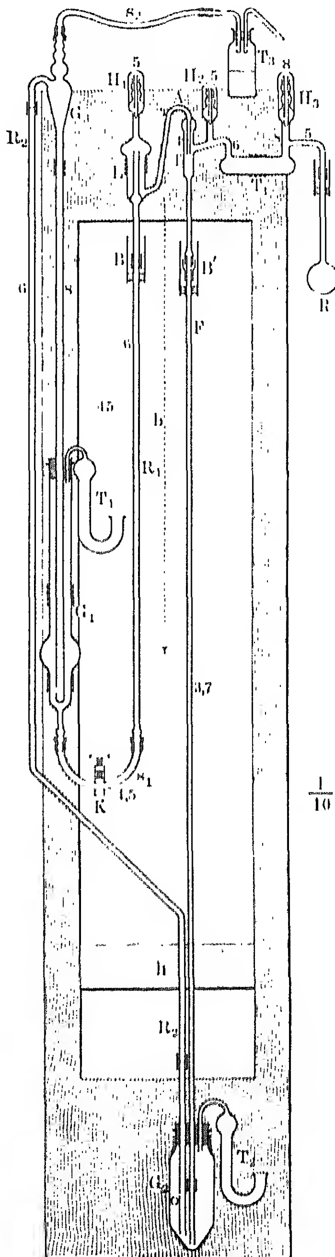


Fig. 532.

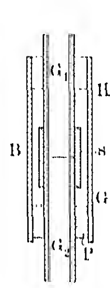


Fig. 533.

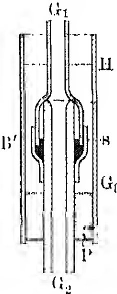


Fig. 534.

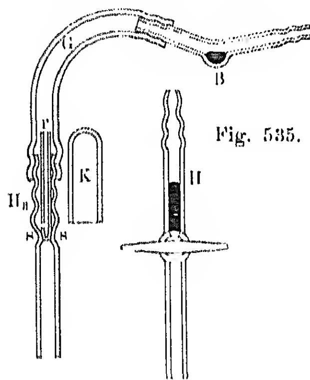


Fig. 535.

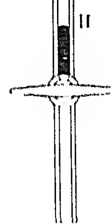
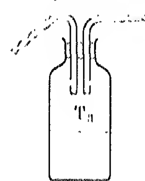


Fig. 536.



bindung steht; endlich der auszupumpende Rezipient R, welcher durch das Trockengefäß T_4 mit der Fallröhre in Verbindung steht. Außerdem sind noch zwei Trockenröhren T_1 und T_2 und noch zwei Ventile oder Hähne H_2 und H_3 an den aus der Figur ersichtlichen Stellen angebracht. Die lichten Weiten der Röhren sind in Millimetern daneben angeschrieben. Die Verbindung der einzelnen Teile kann, wenn es sich um die höchsten Leistungen in kürzester Zeit handelt, durch Anschmelzen bewerkstelligt werden, doch führt auch die in der Figur angedeutete Verbindung zum Ziele. Dieselbe

ist aus den Figuren 532 und 533 ersichtlich, welche in größerem Maßstabe gezeichnet sind. In Fig. 532 sind die aneinanderstoßenden Röhren durch einen Kautschukschlauch S verbunden und mittels des Korkes P eine weitere Glasröhre darüber gesteckt. Der Zwischenraum wird bis zur Höhe H mit Quecksilber gefüllt, welches einen luftdichten Verschluß herstellt. Ähnlich, aber noch sicherer, ist die Verbindung Fig. 535, welche das obere Stück des Fallrohres mit dem unteren verbindet. Die Ventile H_1, H_2 und H_3 sind nach Fig. 534 konstruiert. Dieselbe zeigt überdies, wie man eine solche Röhre durch den Schlauch G mit einem anderen Raume verbinden kann, worauf man durch Hebung bzw. Senkung der Röhre r, die man durch den Schlauch hindurch erfaßt, die Kommunikation herstellen und unterbrechen kann. Der bei B vorhandene Tropfen Quecksilber fällt beim Aufrichten des Schlauches in den Raum oberhalb der Einschnürung und dichtet die Schliffstelle vollkommen. Dieses Quecksilber kann durch die Röhre r wieder abgesaugt werden. Die nach Wegnahme des Schlauches aufzusetzende Kappe K schützt das Ventil vor Staub. Statt dieses Ventiles kann aber auch der bequemer zu handhabende, mit einer Mischung von Paraffin und Vaselinöl geschmierte und durch Aufgießen von etwas Quecksilber gedichtete Hahn H, Fig. 535, angebracht werden. Das Trockengefäß T_3, Fig. 536, ist mit Schwefelsäure gefüllt. Damit durch allzu rasche Strömung der Luft dieselbe nicht verspritzt wird, haben die an den Enden verschlossenen Zuführungsröhren nur seitlich angebrachte feine Öffnungen. Endlich haben wir als wesentlichen Bestandteil noch eine feine, schlitzförmige Öffnung o im Steigrohr R_1 innerhalb des Gefäßes G_2 anzuführen, welche durch einen über die Nachbarröhre gestülpten Schlauch in ihrer Weite reguliert werden kann.

Vor Benutzung der Pumpe sind alle Teile sorgfältigst zu reinigen und zu trocknen, das Trockengefäß T_4 mit wasserfreier Phosphorsäure, T_1 und T_2 mit Chlorcalcium zu beschicken. Hierauf wird das Gefäß G_2 so hoch mit trockenem Quecksilber gefüllt, daß die untere Öffnung des Fallrohres F eben verschlossen ist. Ebenso wird das Gefäß G_1 voll gefüllt und hierauf die Klemme K geschlossen. Man schließt Ventil (oder Hahn) H_2 durch Eingießen von Quecksilber und läßt nun die Wasserluftpumpe durch das Trockengefäß T_3 hindurch auf das Gefäß G_3 und die Steigröhre R_2 wirken, bis die Grenze der hierdurch erreichbaren Verdünnung (etwa 15 mm Druck) erreicht ist. Hierauf öffnet man langsam die Klemme K, das Quecksilber steigt in den Luftfang L hinauf; bevor es in das Fallrohr F bei A überzufließen beginnt, schließt man K. Ist der Luftfang ganz gefüllt, so schließt man auch das Ventil H durch Aufgießen von Quecksilber.

Nun kann das Evakuieren beginnen, indem man K öffnet. Die Wasserluftpumpe saugt fortwährend aus dem Gefäß G_2 durch die untere Öffnung der Röhre R_2 Quecksilber und durch die Seitenöffnung o Luft ein, hebt die unterbrochenen Quecksilbersäulen in das Gefäß G_3, von wo die Luft durch s_2 abgeführt, das Quecksilber in das Gefäß G_1 übergeführt wird, aus welchem es in R_1 wieder emporsteigt, mitgerissene kleine Luftmengen im Luftfang abgibt und so vollständig entlüftet in die Fallröhre gelangt. Die aus dem Rezipienten angesaugte Luft wird durch die Fallröhre in das Gefäß G_2 geschafft und entweicht durch T_2.

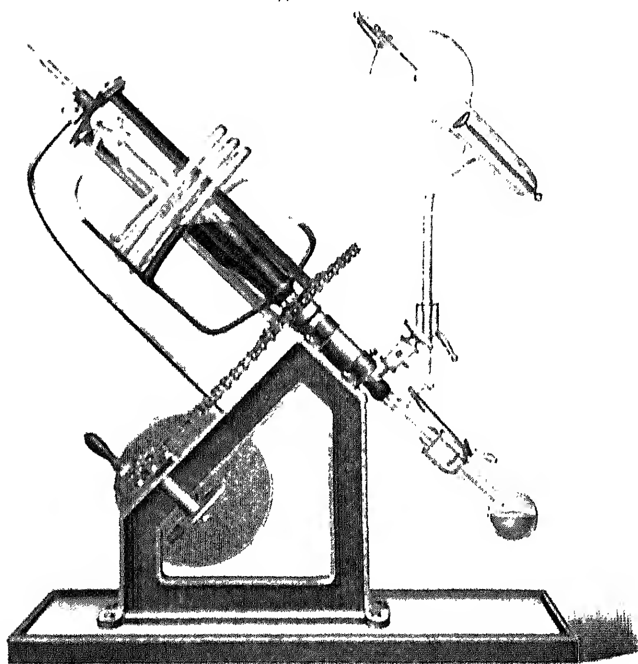
Zum Abstellen der Pumpe schließt man K, läßt das in G_2 angesammelte überflüssige Quecksilber möglichst nach G_3 hinübersaugen, zieht den Sauge-

schlauch vom Trockengefäß T_3 ab und sperrt zuletzt die Wasserluftpumpe ab. Beim Evakuieren größerer Räume arbeitet man mit der Wasserluftpumpe allein vor, indem man sie mit dem Hahn H_2 verbindet.

Die beschriebene Pumpe braucht weniger als 3 kg (220 cm³) Quecksilber und pumpt einen Rezipienten von 600 cm³ in 20 bis 25 Minuten bis auf 0,001 mm Quecksilberhöhe aus. Sie hat sich bestens bewährt; nur kommt es nicht selten, wie bei der Sprengelschen Pumpe überhaupt, vor, daß die Fallröhre — vielleicht durch elektrische Entladungen — zersprengt wird. Zehender hat deshalb das Fallrohr dickwandiger genommen. Auch ist dasselbe durch ein Stahlrohr ersetzt worden.

§ 177. Rotierende Quecksilberpumpe von W. Kaufmann. Von den vielen außer den eben beschriebenen noch aufgetauchten Kon-

Fig. 537.



struktionen von Quecksilberpumpen wollen wir hier noch die rotierende Quecksilberluftpumpe von Prof. W. Kaufmann in Bonn[1]) besprechen. Fig. 537 gibt eine perspektivische Ansicht der mit einem Elektromotor ausgerüsteten Pumpe in etwa $^1/_{10}$ der natürlichen Größe, Fig. 538 eine schematische Durchschnittszeichnung der Hauptteile. Denken wir uns zum leichteren Verständnis zunächst den unterhalb des Zahnkranzes ZZ befindlichen Teil fort und den auszupumpenden Raum an der Spitze bei K angesetzt, also an der Rotation des Apparates teilnehmend. Dreht man denselben der Pfeilrichtung entgegen ein- bis zweimal um seine Achse, so entleert sich

[1]) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1905, S. 129.

ist aus den Figuren 532 und 533 ersichtlich, welche in größerem M
gezeichnet sind. In Fig. 532 sind die aneinanderstoßenden Röhre
einen Kautschukschlauch S verbunden und mittels des Korkes P ein
Glasröhre darüber gesteckt. Der Zwischenraum wird bis zur Höh
Quecksilber gefüllt, welches einen luftdichten Verschluß herstellt.
aber noch sicherer, ist die Verbindung Fig. 533, welche das obere S
Fallrohres mit dem unteren verbindet. Die Ventile H_1, H_2 und
nach Fig. 534 konstruiert. Dieselbe zeigt überdies, wie man ein
Röhre durch den Schlauch G mit einem anderen Raume verbinden kan
man durch Hebung bzw. Senkung der Röhre r, die man durch den
hindurch erfaßt, die Kommunikation herstellen und unterbrechen ka
bei B vorhandene Tropfen Quecksilber fällt beim Aufrichten des Se
in den Raum oberhalb der Einschnürung und dichtet die Schliffste
kommen. Dieses Quecksilber kann durch die Röhre r wieder a
werden. Die nach Wegnahme des Schlauches aufzusetzende Kappe K
das Ventil vor Staub. Statt dieses Ventiles kann aber auch der l
zu handhabende, mit einer Mischung von Paraffin und Vaselinöl ge
und durch Aufgießen von etwas Quecksilber gedichtete Hahn H.
angebracht werden. Das Trockengefäß T, Fig. 536, ist mit Schw
gefüllt. Damit durch allzu rasche Strömung der Luft dieselbe ni
spritzt wird, haben die an den Enden verschlossenen Zuführungsroh
seitlich angebrachte feine Öffnungen. Endlich haben wir als wes
Bestandteil noch eine feine, schlitzförmige Öffnung o im Steigrohr R
halb des Gefäßes G_2 anzuführen, welche durch einen über die Nach
gestülpten Schlauch in ihrer Weite reguliert werden kann.

Vor Benutzung der Pumpe sind alle Teile sorgfältigst zu reini
zu trocknen, das Trockengefäß T_1 mit wasserfreier Phosphorsäure, T
mit Chlorcalcium zu beschicken. Hierauf wird das Gefäß G_2 so
trockenem Quecksilber gefüllt, daß die untere Öffnung des Fallrohre
verschlossen ist. Ebenso wird das Gefäß G_1 voll gefüllt und hie
Klemme K geschlossen. Man schließt Ventil (oder Hahn) H_2 du
gießen von Quecksilber und läßt nun die Wasserluftpumpe durch das T
gefäß T_3 hindurch auf das Gefäß G_2 und die Steigröhre R_2 wirken
Grenze der hierdurch erreichbaren Verdünnung (etwa 15 mm Druck)
ist. Hierauf öffnet man langsam die Klemme K, das Quecksilber
den Luftfang L hinauf; bevor es in das Fallrohr F bei A über
beginnt, schließt man K. Ist der Luftfang ganz gefüllt, so schli
auch das Ventil H durch Aufgießen von Quecksilber.

Nun kann das Evakuieren beginnen, indem man K öffnet. Die
luftpumpe saugt fortwährend aus dem Gefäß G_2 durch die untere
der Röhre R_2 Quecksilber und durch die Seitenöffnung o Luft e
die unterbrochenen Quecksilbersäulen in das Gefäß G_3, von wo
durch s_1 abgeführt, das Quecksilber in das Gefäß G_1 übergeführt w
welchem es in R_1 wieder emporsteigt, mitgerissene kleine Luftme
Luftfang abgibt und so vollständig entlüftet in die Fallrohre gela
aus dem Rezipienten angesaugte Luft wird durch die Fallrohre in d
G_2 geschafft und entweicht durch T_2.

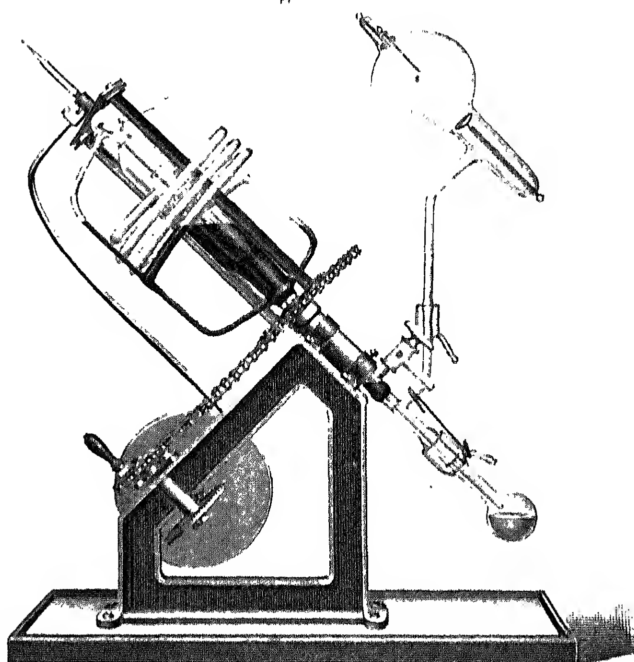
Zum Abstellen der Pumpe schließt man K, läßt das in G_2 ange
überflüssige Quecksilber möglichst nach G_3 hinübersaugen, zieht de

chlauch vom Trockengefäß T_3 ab und sperrt zuletzt die Wasserluftpumpe
.b. Beim Evakuieren größerer Räume arbeitet man mit der Wasserluft-
umpe allein vor, indem man sie mit dem Hahn H_2 verbindet.

Die beschriebene Pumpe braucht weniger als 3 kg (220 cm³) Quecksilber
ınd pumpt einen Rezipienten von 600 cm³ in 20 bis 25 Minuten bis auf
),001 mm Quecksilberhöhe aus. Sie hat sich bestens bewährt; nur kommt
s nicht selten, wie bei der Sprengelschen Pumpe überhaupt, vor, daß die
'allröhre — vielleicht durch elektrische Entladungen — zersprengt wird.
Zehender hat deshalb das Fallrohr dickwandiger genommen. Auch ist
asselbe durch ein Stahlrohr ersetzt worden.

§ 177. Rotierende Quecksilberpumpe von W. Kaufmann. Von
ıen vielen außer den eben beschriebenen noch aufgetauchten Kon-

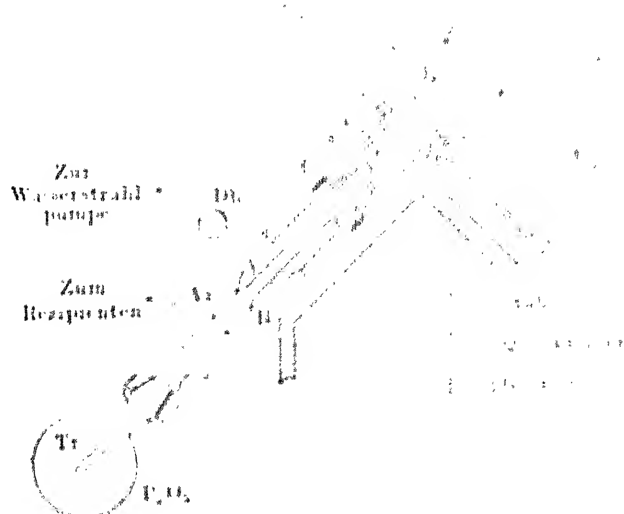
Fig. 537.



truktionen von Quecksilberpumpen wollen wir hier noch die rotierende
Quecksilberluftpumpe von Prof. W. Kaufmann in Bonn[1]) besprechen.
'ig. 537 gibt eine perspektivische Ansicht der mit einem Elektromotor
usgerüsteten Pumpe in etwa $^1/_{10}$ der natürlichen Größe, Fig. 538 eine
chematische Durchschnittszeichnung der Hauptteile. Denken wir uns zum
eichteren Verständnis zunächst den unterhalb des Zahnkranzes ZZ befind-
chen Teil fort und den auszupumpenden Raum an der Spitze bei K angesetzt,
so an der Rotation des Apparates teilnehmend. Dreht man denselben der
'feilrichtung entgegen ein- bis zweimal um seine Achse, so entleert sich

[1]) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1905, S. 129.

mindestens [illegible] wegen fortge[illegible] den wir das Vakuum [illegible] s_1 (s_2) und die Spirale [illegible]



In diesem Zustande wurde der Apparat [illegible] pumpe) bis auf etwa [illegible] Quecksilberdruck ausgepumpt. [illegible] den Apparat der Pfeilrichtung [illegible] 25 [illegible] Minute, später, wenn der Druck auf etwa [illegible] 15 Touren pro Minute, [illegible] die Verbindung zwischen s_1 und [illegible] die Luft vor sich her in den Raum [illegible] aus s_1 nachgesaugt wird, bis [illegible] T_1 wieder schließt. So wird bei jeder [illegible] Spirale eingesaugt, abgesperrt und durch das [illegible] treibende Quecksilber entleert [illegible] den Raum K. [illegible] ausgelaufen, so gelangt zunächst [illegible] aber nur bis zu der Oberfläche [illegible] der nächsten Quecksilbersäule, [illegible] von dieser mit der abgesperrt gewesenen Luft [illegible] förmige Luftfalle verhindert ein Mitreißen der Luft aus [illegible] und ins Vakuum.

Bisher dachten wir den auszupumpenden Rezipienten bei K angesetzt und mitrotierend. Da dies nicht angängig ist, so muß eine anderweitige Verbindung hergestellt sein. Von dem Raum K aus erstreckt sich das Rohr C durch die Pumpe hindurch bis zum Barometerverschluß B, so daß K durch C hindurch mit dem Trockengefäß Tr und dem Ansatzrohr Ar mit dem Rezipienten kommuniziert. Der Raum V' über dem Außenniveau des Barometerverschlusses steht bei entsprechender Stellung des Dreiweghahnes Dh einerseits mit der Wasserstrahlpumpe, andererseits durch den engen ringförmigen Kanal A zwischen C und D mit dem Raum V in Verbindung. Der rotierende Teil des Apparates ist in einen Stahlkonus eingekittet, welcher selbst in einen Hohlkonus eingeschliffen ist. Die Dichtung wird durch Quecksilber, welches den ringförmigen Raum r erfüllt, vervollständigt. Das Ausfließen dieses Quecksilbers wird durch die kapillare Depression des schmalen Spaltes verhindert. Die Montierung des ganzen Apparates ist eine derartige, daß das Übergewicht des Oberteiles durch ein Achsenlager getragen wird. Die Rotation erfolgt entweder von freier Hand durch Kettenübertragung oder durch Antrieb eines elektrischen Motors. Die Füllung mit Quecksilber geschieht durch die geöffnete Spitze des Rohres K, welches nachher zugeschmolzen wird.

Die Vorteile dieser Quecksilberpumpe sind folgende: Sie ist von geringen Dimensionen, bedarf nur gegen 250 ccm Quecksilber und ist leicht transportabel. Sie gestattet die Erreichung sehr hoher Verdünnungen in sehr kurzer Zeit, so daß z. B. eine Röntgenröhre von 12 cm Durchmesser in 12 Minuten wirksam wird und in 20 Minuten keine Entladung mehr durchläßt. Gefährdung durch Quecksilberstöße ist ausgeschlossen, das Quecksilber kommt nur mit Glas in Berührung und bleibt folglich rein [1]).

§ 178. Die mit Quecksilberluftpumpen erreichbaren Verdünnungen; Nebenapparate. Während die gewöhnlichen Luftpumpen selten gestatten, die Verdünnung so weit zu treiben, daß der Druck bis unter 1 mm Quecksilbersäule herabsinkt, weshalb denn auch die gewöhnliche Prüfung mittels des abgekürzten Barometers genügt, ist bei den Quecksilberpumpen eine viel weiter gehende Verdünnung zu erreichen, für deren Messung dann auch feinere Beobachtungsmethoden nötig werden.

A. v. Waltenhofen hat bereits 1861 [2]) an der Quecksilberluftpumpe von Kravogl ein Verfahren angewendet, bei welchem der erreichte Minimaldruck in dem verdünnten Raume aus dem Volumen ermittelt wurde, welches die zurückgebliebene Luft nachher bei Atmosphärendruck einnahm. Zu diesem Zwecke war an den aus einem weiten kalibrierten Glasrohr bestehenden Rezipienten eine enge kalibrierte Röhre angesetzt und die Einrichtung so getroffen, daß der evakuierte Rezipient von der Pumpe abgenommen und mit der Mündung unter Quecksilber geöffnet werden konnte. Die weite Röhre und ein Teil der engen wurde durch den Luftdruck mit Quecksilber gefüllt und aus dem restlichen Volumen der Luft nach bekannten Grundsätzen die Verdünnung berechnet.

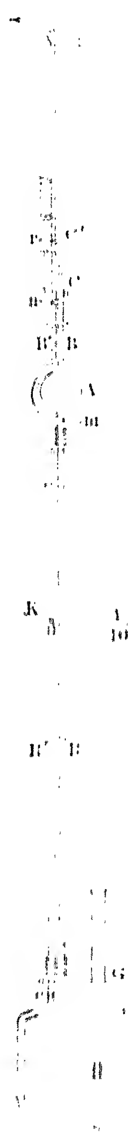
Verwandte Methoden wurden oben bei Töplers Pumpe beschrieben und bei Giminghams Pumpe (Mc Leods Apparat) erwähnt.

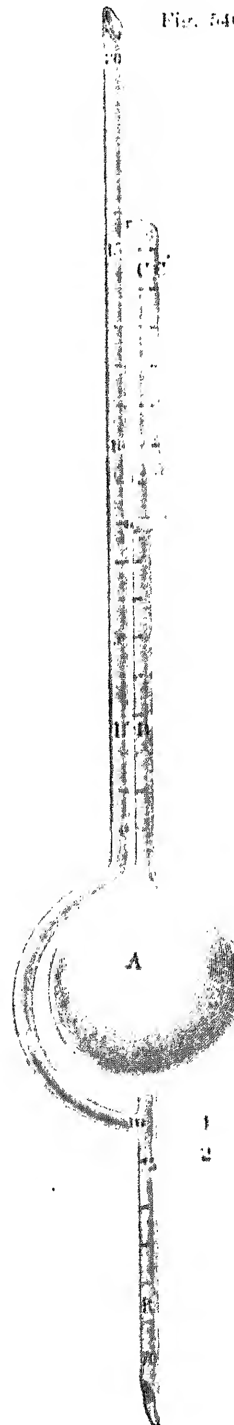
---

[1]) Die Pumpe wird von der Firma Geißlers Nachfolger in Bonn geliefert.

[2]) Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1861, Bd. 44.

Mc Leods Vakuummesser ist in der von Zehender beschri
Ausführung[1]) in Fig. 539 in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe und ein Best





desselben in Fig. 540 in
natürlichen Größe abgebilde
Röhre R ist am unteren zu
gebogenen Ende durch den Sc
s mit dem Gefäße G verb
welches höher oder tiefer
werden kann. Oben münd
Röhre R in ein kugelförmig
faß A, welches sich nach o
eine Röhre B und weiter o
eine engere Röhre C fortsetzt,
verschlossen ist. Unterhal
Kugel A bei m ist ein Seitenr
angesetzt, welches parallel
emporsteigt und mit dem
Ende in den Raum einmündet
Verdünnungsgrad gemessen
soll. Mit diesem Rohr B' kor
ziert bei n und r das engere
parallele Rohr C'. B und B'
C und C' sind genau gleic
um gleiche Kapillarwirkunge
zuheben. Endlich steigt vo
Stelle s des Rohres R ein par
gleich weites Rohrstück R'
Höhe, welches oben bei K n
verschlossen ist. Nahe bei s b
sich in o der Nullpunkt
Längenteilung, welche z
einige Centimeter umfaßt und
halb m eine Fortsetzung hat
sind die Röhren B und B',
C' mit übereinstimmenden I
teilungen versehen, welche o
A bei a ihren Nullpunkt
Will man nun eine Verd
zunächst annähernd messen,
man das Gefäß G, bis das Quec
in dem Rohr R' bei o steh
beobachtet den Stand in der l
Die Differenz zwischen der a
achteten Quecksilbersäule u
Barometerhöhe gibt den Dr
verdünnten Raum. Um dann e

[1]) Zehender, Ann. d. P
623, 1903.

Atomgewichte bezeichneten Zahlenwerte [illegible] letzteren mit A, B, C..., so sind alle [illegible] gegeben durch die Formel

$$mA + nB + pC \ldots$$

wobei m, n, p ganze Zahlen sind, die in der [illegible] hinausgehen, bei den Kohlenstoffverbindungen [illegible] 30 und darüber) erreichen.

Dieser Satz heißt das Gesetz der multiplen Proportionen [illegible]

Auf der Anwendung dieser [illegible] Zeichen [illegible] der erwähnten Bedeutung beruht die [illegible]

Fig. 43.

In der zweiten [illegible] diese Zeichen angeführt. [illegible] Algebra [illegible] m, n, p als [illegible] zu [illegible]

Demnach [illegible] H_2O_4 [illegible] chem[illegible] Verbindung von [illegible] Schwefel [illegible] viermal 16 Massenteilen [illegible] Schwefel [illegible]

Das Gesetz der [illegible] nach [illegible] durch die [illegible] atomistische Theorie [illegible] und die Theorie [illegible] scheinlich [illegible]

Die [illegible] an, daß [illegible] Atom [illegible] relativ [illegible] [illegible]

Unter Atomgewicht [illegible] dern stets nur das relative Gewicht [illegible] Atomgewicht des Wasserstoffs [illegible]

Wenn man also sagt, das Atomgewicht [illegible] ist damit ausgedrückt, daß die kleinste Menge [illegible] Grundstoffen in Verbindung treten kann, [illegible] Menge von Wasserstoff, welche [illegible]

[1] Hanns wird das Atom[illegible] alle Atomgewichte im Verhältnis [illegible] Tabelle [illegible]

Verdünnungen genauer zu messen, hebt man G, bis das Niveau in die Röhre B oder C gestiegen ist, und mißt die Überhöhe in B' bzw C'. Wie aus den auskalibrierten Volumen der Kugel A und der Röhrenteile in B und C mit Hilfe der erwähnten Beobachtungen die Verdünnung zu berechnen ist, ist bereits im § 174 an der Töpler-Pumpe erklärt worden.

Wir müssen jedoch darauf aufmerksam machen, daß die auf solche Weise gefundenen Minimaldrucke sich nur auf den Druck der zurückgebliebenen Luft, nicht auf den Gesamtdruck beziehen, der sich aus dem Druck der Luft und dem Druck des Quecksilberdampfes zusammensetzt.

Nach Hertz und nach Pfaundler beträgt die Spannung des gesättigten Quecksilberdampfes:

bei $0^0 c$ — 0,0002 mm
„ $20^0 c$ — 0,0013 mm.

Demnach kann der Gesamtdruck im Inneren der Pumpe bei Zimmertemperatur von 20^0 nicht unter 0,0013 mm herabgesetzt werden

Steht mit der Pumpe ein Rezipient in Verbindung, der nur ein Gas, aber kein Quecksilber (oder andere Flüssigkeit) enthält, so kann demnach dieses Gas auch nicht weiter als auf etwa 0,0013 mm verdünnt werden. Anders steht die Sache, wenn durch Diffusion oder auf andere Weise auch das im Rezipienten enthaltene Gas mit Quecksilberdämpfen gesättigt wurde. Es kann dann auch in diesem zwar nicht der Totaldruck, wohl aber der vom Gase allein ausgeübte Partialdruck ebenso weit herabgesetzt werden wie im Torricellischen Raume der Pumpe.

Wir verdanken Bessel-Hagen [1]) vergleichende Messungen der Minimal-Partialdrucke der Luft, welche durch die Quecksilberluftpumpen nach Geißlers alter und neuer Konstruktion, dann mittels der Töplerschen Pumpe erreicht werden, welchen Angaben in der nachfolgenden Tabelle noch die mit einer Sprengel-Giminghamschen, sowie mit einer Kravoglschen Pumpe erreichten Druckminima hinzugefügt sind. Die Messungen Bessel-Hagens geschahen in der Weise, daß eine Töplersche und eine Geißlersche Pumpe miteinander verbunden wurden, so zwar, daß zuerst die erstere, dann die letztere als Rezipient diente, während zuerst die letztere, dann die erstere als Pumpe funktionierte. Die Druckmessung geschah dann an der Töplerschen Pumpe in der oben beschriebenen Weise. Die Angabe für die Kravoglsche Pumpe ist den v. Waltenhofenschen Messungen entnommen.

Die Resultate sind in der Rangordnung der erreichten Verdünnungen in der umstehenden Tabelle aufgeführt:

Zur Erreichung solcher hoher Verdünnungsgrade ist eine vollständige Trockenheit aller Apparatenteile, sowie eine vollkommen dichte Verbindung zwischen Rezipient und Pumpe erforderlich. Verbindungen mittels Kautschukröhren genügen nicht; in der Regel werden die einzelnen Glasbestandteile durch Aneinanderschmelzen vereinigt. Um denselben trotzdem eine, wenn auch eng begrenzte Verschiebbarkeit zu sichern und hierdurch die Gefahr des Zerbrechens zu vermindern, verwendet man zu den Verbindungen entweder spiralförmig gewundene Glasröhren oder besser die von A. Kundt [2]) eingeführten „Glasfedern".

---

[1]) Wiedem. Ann. 12, S. 441, 1881.
[2]) Pogg. Ann. 155, S. 364.

Instrument	Beobachter	Minimum des erreichten Partialdruckes der Luft in Millimetern	Grenz[e] der erreic[hten] Verdün[nung] in Bruch[teilen] einer Atmo[sphäre]
Geißlers Pumpe älterer Konstruktion	Bessel-Hagen	0,11	1 / 690[0]
Kravogls Pumpe	v. Waltenhofen	0,0316 [1]	1 / 24 00[0]
Geißlers Pumpe neuerer Konstruktion	Bessel-Hagen	0,0052	1 / 29 [illegible]
Sprengels Pumpe oben beschriebener Konstruktion	Zehnder	0,00085 [2]	1 / 950 00[0]
Sprengel-Giminghams Pumpe	Crookes	0,000045	1 / 17 000 [illegible]
Töplers Pumpe neuerer Konstruktion	Bessel-Hagen	0,0000093 [3]	1 / 84 000 [illegible]
Sprengel-Giminghams Pumpe mit einer weiteren Verbesserung [4]	Prof. Ogden N. Rood vom Columbia College in New York	0,0000007	1 / 1100 000 [illegible]

Fig. 541 und 542 zeigen im Aufriß und in Perspektive eine Kundtsche Glasfeder in ungefähr ¹/₂ der natürlichen Größe. Eine

Fig. 541.

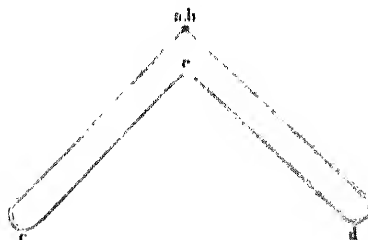


Fig. 542.



dünne Glasröhre wird zweimal U-förmig gebogen, so daß die beide[n] ... einer Ebene liegen, aber bei e einen rechten Winkel miteinander ...

[1]) Diese Zahl folgt durch Rechnung aus dem Grade der Verdünnung, ... wie oben angegeben, bestimmt wurde.

[2]) Bei Anwendung von Kautschukverbindungen 0,001 bis 0,004.

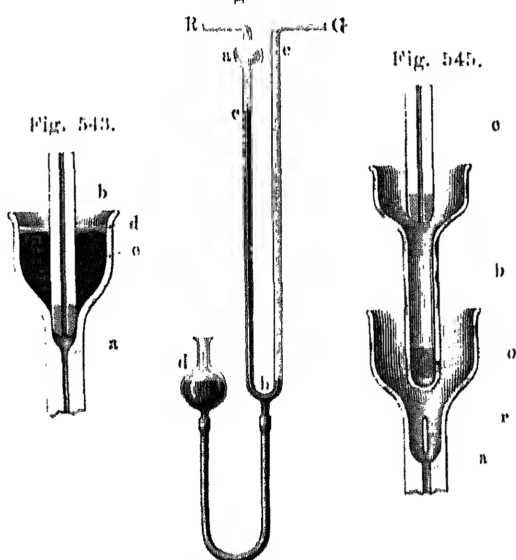
[3]) Im Mittel aus sechs Versuchen wurde erhalten Druck = [illegible] ... sprechend einer Verdünnung gleich ¹/₆₃ Millionstel Atmosphäre. Wie weit ... kung der Töplerschen Pumpe in der ursprünglichen Form geht, ist nicht ... worden.

[4]) Die Verbesserung soll darin bestehen, daß das Quecksilber aus eine[m] ... kuierten Gefäße in das Fallrohr gelangt; dies ist aber schon bei der ursprün[glichen] ... Gimingham-Pumpe der Fall (Rood, The New York Times, 19. Nov. 18.. Sp. 3). Das angegebene Minimum wurde nur in einem Falle erreicht u[nd] ... zu ¹/₉₄ Millionstel Atmosphäre bestimmt.

Die beiden Enden *a* und *b* der Röhre sind senkrecht zur Ebene der U umgebogen, so daß sie in eine Gerade zu liegen kommen. Denkt man sich das Ende *a* festgehalten, so ermöglicht das U-Rohr *c* dem Ende *b* eine Bewegung in der Richtung *ed*, ebenso das U-Rohr *d* eine Bewegung nach *ec*. Da außerdem *a* und *b* sich etwas voneinander entfernen können, so ist innerhalb gewisser Grenzen für eine allseitige Beweglichkeit des Endes *b* gegenüber dem Ende *a* vorgesorgt. Bei einer 1,8 m langen, 6 mm weiten Röhre beträgt der Spielraum mehrere Centimeter. Engere Röhren können entsprechend kürzer genommen werden.

Größere Beweglichkeit erhält man durch Anwendung zweier ineinander gesteckter Kautschukschläuche, deren Zwischenraum durch Quecksilber ausgefüllt ist.

Lösbare Verbindungen werden mittels Quecksilbers dicht erhalten. Eine solche Verbindungsweise wurde bei der Töplerschen Pumpe, andere oben in Fig. 532 bis 534 beschrieben, wieder eine andere bei der Geißlerschen Pumpe angewendete ist in Fig. 543 abgebildet. Die Glasröhre *b* ist in den Trichter *a* eingeschliffen. Der Trichter wird mit Quecksilber *c* gefüllt und, wenn man recht sicher gehen will, mit einer Schicht von Schwefelsäure *d* überdeckt, welche hindert, daß Luft zwischen Quecksilber und Glas eindringe. Statt der gewöhnlichen Glashähne sind ebenfalls mit Quecksilber hergestellte Vorrichtungen anzuwenden. Eine solche von Bessel-Hagen vorgeschlagene ist in Fig. 544 abgebildet; sie kann dazu dienen, den evakuierten Rezipienten *R* aus einem Gasometer *G* mit einem anderen Gase zu füllen. Zwischen *R* und *G* befindet sich die U-Röhre *abc* mit einer kugelförmigen Erweiterung bei *a*. Am tiefsten Punkte der U-Röhre ist eine Abzweigung nach abwärts, welche mittels Kautschukrohr zum Reservoir *d* führt. Von *b* bis *c* ist Barometerhöhe. Die Quecksilbersäule *bc* sperrt den Zutritt zum Rezipienten hermetisch; senkt man aber das Reservoir *d*, so entleert sich der Schenkel *c* und erniedrigt sich die Quecksilbersäule *bc* so weit, daß das bei *G* zugeführte Gas eintreten kann. Die Erweiterung *a* verhindert das Übersteigen von Quecksilber nach *R*.



Eine andere, einen Hahn ersetzende, durch Quecksilber gedichtete Verbindungsweise ist der „Vakuumzapfen" von Gimingham, welcher an dessen Pumpe mehrfach verwendet wurde. Derselbe ist in Fig. 545 im zerlegten Zustande abgebildet; er besteht aus den drei Glasteilen *a*, *b* und *c*. *b* und *c* wirken zusammen ganz ebenso wie die Vorrichtung Fig. 543 und werden ebenso mit Quecksilber und Schwefelsäure gedichtet.

Das mittlere Stück *b* hat jedoch am unteren verschlossenen En[de ein] seitliches Loch *o*, das unterste Stück *a* besitzt bei *r* eine vertikale R[inne]. Sobald die Schliffstellen ineinander gesteckt sind, kann das Mittelstü[ck so] gedreht werden, daß dasselbe durch das Loch *o* und die Rinne *r* m[it dem] unteren Stück *a* kommuniziert, oder aber so, daß das Loch verspe[rrt ist]. Der Trichter des unteren Stückes wird ebenfalls mit Quecksilber und Se[hwefel]säure gedichtet.

Wird das Stück *c* weggenommen, so fällt Quecksilber in den [unteren] Teil von *b* und bedeckt das Loch *o* auch von innen, wodurch ei[n voll]kommener Verschluß bewerkstelligt wird, währenddem an das Stück *c* [andere] Apparate angesetzt werden können. Vor dem Wiedereinsetzen des „Za[pfens“] wird das Quecksilber aus *b* mittels Pipette und amalgamierten Messingd[rahtes] wieder entfernt.

Als Schmiermittel für Glashähne, welches nicht ausgepreßt wird, [nicht] erhärtet und keine Dämpfe entwickelt, wird neuestens von Travers ein [durch] Zusammenschmelzen von 2 Tln. Kautschuk, 1 Tl. Vaselin und ½ Tl. [Paraffin] bereitetes Gemisch [1] empfohlen.

§ 179. Bunsens Wasserluftpumpe. Wassertrommelge[bläse].

Statt der fallenden Quecksilbersäule hat Bunsen schon früher eine f[allende] Wassersäule zur Konstruktion einer Luftsaugepumpe (Wasse[rluft]pumpe) benutzt. Dieselbe ist in ihrer ursprünglichen Form in F[ig. 546] abgebildet. Aus einem oben offenen Wasserbehälter oder der Wasser[leitung] strömt das Wasser durch ein Bleirohr *a*, Fig. 546, das verbindende [Kaut]schukrohr *b* und das Glasrohr *c* in das weitere Glasrohr *d*, um da[n von] hier aus weiter durch das 9 bis 12 m lang vertikal hinabreichende u[nd etwa] 8 mm weite Bleirohr *f* hinabzufallen. Das weitere Rohr *d* ist oben mit [einem] wohl schließenden Kautschukstopfen geschlossen, durch welchen ein [enges] Glasrohr *mn* bis in den unteren Teil des weiteren Rohres *d* hinabreic[ht. (Bei] den gegenwärtig ausgeführten Wasserluftpumpen ist das Glasrohr *mn* [in das] obere Ende von *d* luftdicht eingeschmolzen.) Der Raum, aus welch[em die] Luft ausgesaugt werden soll, wird mit dem Glasrohr *st* in Verb[indung] gesetzt, welches andererseits durch eine Kautschukröhre mit *mn* ver[bunden] ist. So zieht dann die in *f* herabfallende Wassersäule die Luft au[s dem] Rezipienten durch die Röhren *st* und *mn* nach. Der Grad der e[rzielten] Luftverdünnung kann an dem Quecksilbermanometer *pq* abgelesen [werden]. Alle am Apparate befindlichen Kautschukverbindungen bestehen aus z[iemlich] engen, aber sehr dickwandigen Röhrenstücken.

Die Bunsensche Luftsaugepumpe wird in chemischen Laboratorie[n unter] anderem zur Beschleunigung des Auswaschens von Niederschlagen geb[raucht]. Zu diesem Zwecke wird die Röhre des Trichters, auf welchem das Fil[ter mit] dem Niederschlage liegt, mittels eines Kautschukstopfens luftdicht [in den] Hals eines Glasgefäßes *A*, Fig. 547, eingesetzt. Dieser Kautschukstop[fen hat] aber noch eine zweite Durchbohrung, an welcher ein durch ein dickw[andiges] Kautschukrohr *K* mit dem Glasrohr *st*, Fig. 546, in Verbindung zu se[tzendes] Glasröhrchen steckt. Sobald nun die Luftpumpe funktioniert, wird [...]

---

[1] Experimentelle Untersuchung von Gasen von M. W. Travers, [deutsch] von Dr. Estreicher. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1905.

den Trichter gegossene Wasser durch den Niederschlag und das Filter hindurchgesaugt und so ein rasches Auswaschen des Niederschlages bewirkt. Damit das Filter nicht reiße, wird seine Spitze in einen kleinen, aus dünnem

Fig. 546.

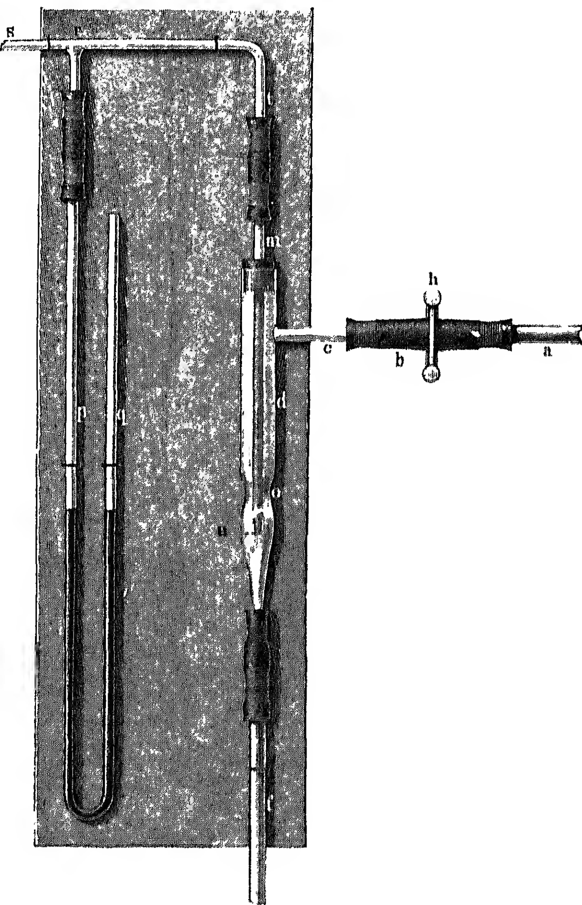


Fig. 547.

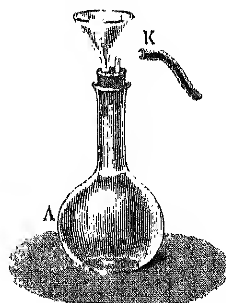


Fig. 548.

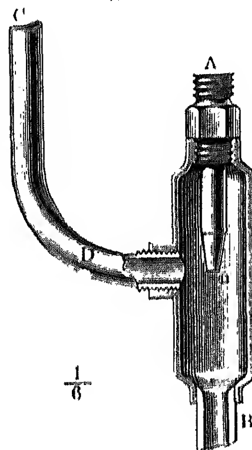


Fig. 549.



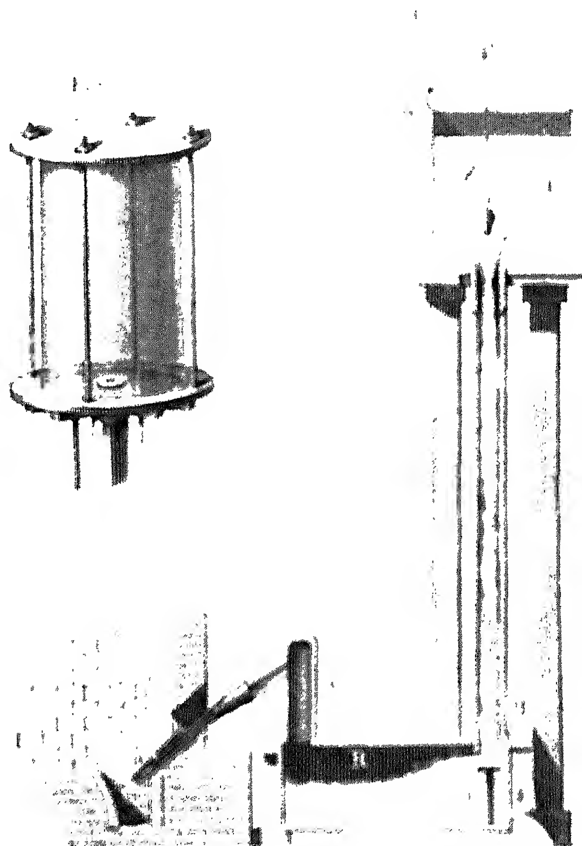
Platinblech zusammengelegten Hohlkegel eingesetzt und nur eine mäßige Verdünnung in Anwendung gebracht.

Die Menge des zuströmenden Wassers muß mit Hilfe des Quetschhahnes *h* gehörig reguliert werden.

Hagenbach hat in der physikalischen Anstalt des Bernoullianums zu Basel eine Wasserluftpumpe in größerem Maßstabe konstruiert, deren wesentlichster Teil in Fig. 548 dargestellt ist. Bei *A* wird das Rohr *An* an die Wasserleitung angeschraubt, welche einen Druck von ungefähr drei Atmosphären hat, während bei *B* das 13 m lange Abflußrohr angesetzt ist, welches in einen Schacht führt, in welchem das Wasser versickert. Es ist zweckmäßig, wenn das Rohr unten in ein gefülltes Gefäß mündet, damit, wenn der Wasserzufluß aufhört, das Wasser im Ablaufrohr stehen bleibt. Am oberen Ende des 0,5 m hohen Rohres *DC* wird der Rezipient angesetzt, aus welchem

die Luft [illegible] ist nicht [illegible] solche in Fig. 5[illegible]

Bei freiem Zutritt [illegible] während eine zweistiefelige [illegible]



und eine Bunsensche Wasserluftpumpe [illegible] Luft [illegible] gleichen Zeit einsaugt.

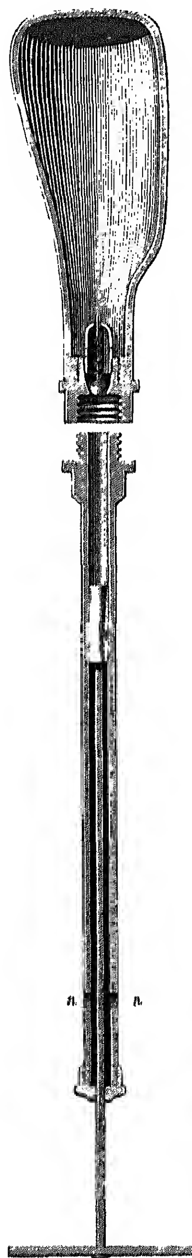
Was die Grenze der Verdünnung betrifft, welche man mit den [illegible] luftpumpen erreichen kann, so ist klar, daß im günstigsten Falle [illegible] leerenden Gasraume nur bis zu einem Drucke gleich der Spannkraft [illegible] Pumpe füllenden Wasserdampfes entleert werden können.

Ähnliche Wasserluftpumpen, bei denen [illegible] geringere [illegible] saugt, sind von Arzberger und Zulkowsky konstruiert und we[illegible] Bequemlichkeit in Laboratorien vielfach verwendet.

Die Wasserluftpumpe kann jedoch auch als Kompressionspu[illegible] blase) gebraucht werden, indem man die durch das Wasser fo[illegible] Luft wirken läßt. Fig. 5[illegible] zeigt eine solche statt des Blaseb[illegible] Schmiedefeuern unter dem Namen Wassertrommelgebläse [illegible] dete Vorrichtung. Aus dem Wasserbehälter stürzt das Wasser d[illegible]

Röhre in den Windkasten B, welcher oben geschlossen ist, unten aber eine Ausflußöffnung hat. Das herabstürzende Wasser saugt nun Luft durch die Löcher A ein und reißt sie mit Gewalt in den Windkasten B, aus welchem sie durch die Düse D ausströmt, während das Wasser bei F ausfließt. Dieser Apparat gehört also zu den Gebläsen, die wir in § 183 besprechen werden.

Fig. 552.



§ 180. Kompressionspumpen. Um die Luft in einem Rezipienten zu verdichten, kann man jede Hahnluftpumpe gebrauchen, nur muß der Hahn entgegengesetzt gestellt werden wie beim Verdünnen, d. h. derjenige Stiefel, in welchem der Kolben gerade in die Höhe geht, muß mit der äußeren Luft, derjenige, in welchem der Kolben niedergeht, muß mit dem Rezipienten in Verbindung stehen.

Ballons, in welchen die Luft komprimiert werden soll, werden auf der Schraube in der Mitte des Luftpumpentellers aufgeschraubt; Rezipienten aber, welche auf den Teller aufgesetzt werden, müssen in der in Fig. 551 dargestellten Weise auf den Teller der Luftpumpe aufgedrückt und auf ihm festgehalten werden.

Bei Ventilapparaten, welche zum Verdichten der Luft dienen sollen, müssen sich die Ventile nach der entgegengesetzten Seite öffnen, wie bei der Luftpumpe.

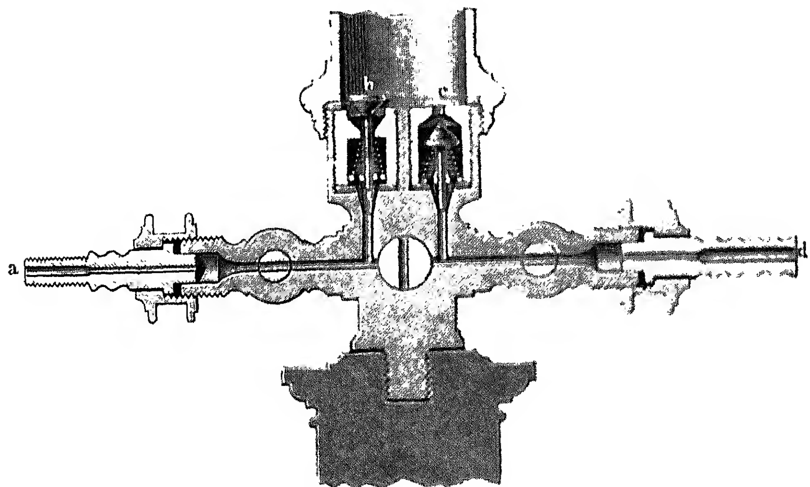
Eine der bekanntesten Formen der Kompressionspumpe ist die, welche man zum Laden der Windbüchse anwendet. Der Rezipient der Windbüchse ist aus Schmiedeeisen oder Stahl verfertigt; ein Ventil, welches sich nach innen öffnet, läßt die Luft zwar eintreten, hindert aber ihren Austritt. An diesen Rezipienten wird ein Rohr angeschraubt, wie man in Fig. 552 sieht, in welchem ein Kolben luftdicht auf und ab geschoben werden kann. Wenn sich der Kolben am unteren Ende des Laderohres befindet, so kann Luft durch zwei seitliche Löcher a eintreten; diese Luft wird nun beim Hinauftreiben des Kolbens in das Reservoir hineingepreßt. Zieht man den Kolben wieder nieder, so kann die Luft aus dem Reservoir nicht zurücktreten, die Röhre aber füllt sich mit einer neuen Portion Luft, die nun auch in das Reservoir gepreßt wird usw.

Wenn man mit Hilfe der Kompressionspumpe die Luft im Rezipienten der Windbüchse bis auf 8 oder 10 Atmosphären komprimiert hat, wird ein Lauf angeschraubt, welcher der Kugel die Richtung geben soll. Das Ventil, welches den Rezipienten verschließt, wird durch Anziehen des Drückers momentan geöffnet, so daß ein Teil der eingeschlossenen Luft mit großer Gewalt entweicht und die Kugel fort-

treibt; das Ventil schließt sich aber ... Mit einer
Windbüchse kann man eine Kugel mit annähernd ebenso großer Geschwindigkeit fortschießen wie mit einem Feuergewehr. Man kann, ohne von neuem zu komprimieren, mehrere Schüsse nacheinander tun, und zwar um so mehr, je größer der Rezipient ist.

Fig. 553 zeigt die Einrichtung einer kleinen, von Silbermann jun. konstruierten Kompressionspumpe, welche dazu dient, Gas aus einem Raume in einen anderen zu bringen. Das zu entleerende Reservoir wird bei a, der

Fig. 553.



zu füllende Rezipient wird bei d angeschraubt. Beim Aufziehen des massiven Kolbens öffnet sich das Ventil b, um das Gas in den Zylinder zu saugen, von welchem unsere Figur nur den untersten Teil zeigt. Beim Niederdrücken des Kolbens wird b geschlossen, das Ventil c aber geöffnet und das Gas durch b in den Rezipienten getrieben.

Kompressionspumpen zur Verflüssigung von Gasen werden wir in der Wärmelehre beschreiben.

§ 181. Heronsball und Heronsbrunnen. Der Heronsball ist ein Gefäß, aus welchem ein Wasserstrahl durch den Druck komprimierter Luft hervorgetrieben wird. Ein Heronsball einfachster Form ist die Spritzflasche der Chemiker, Fig. 554. Eine Glasröhre abc, welche bei a zu einer feinen Spitze ausgezogen ist, geht luftdicht durch den Kork, welcher den Hals eines Glasballons verschließt, und zwar geht sie fast bis auf den Boden des zum Teil mit Wasser gefüllten Gefäßes herab. Wenn nun durch ein zweites Rohr df, welches dicht unter dem Korke mündet, Luft eingeblasen wird, so wird dadurch die Luft im oberen Teil des Ballons komprimiert und durch ihren Druck ein Wasserstrahl aus der Öffnung der Röhre cba hervorgetrieben.

Durch Blasen mit dem Munde kann man natürlich keine starke Kompression im Ballon bewirken und also nur einen schwachen Wasserstrahl hervortreiben. Wenn es sich um die Erzeugung eines kräftigeren Wasserstrahles auf diesem Wege handelt, muß man der größeren Festigkeit wegen

Kompressionspumpe benötigen. Einen derartigen Heronsball stellt Fig. 555 dar. Nachdem das Gefäß etwas über die Hälfte mit Wasser gefüllt und das Spritzrohr aufgeschraubt ist, wird die Ausflußspitze entfernt und dann auf den Apparat eine Kompressionspumpe aufgeschraubt, mit Hilfe derer man so viel Luft einpumpt, daß der Druck derselben zwei bis vier Atmosphären beträgt. Nun wird der Hahn, welcher in dem Spritzrohre angebracht ist, geschlossen, und nachdem die Kompressionspumpe von dem Apparat entfernt

Fig. 554.

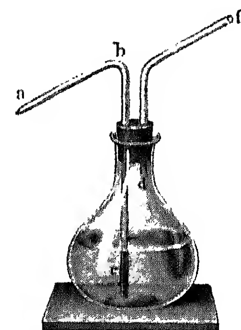


Fig. 555.

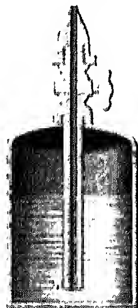


Fig. 556.

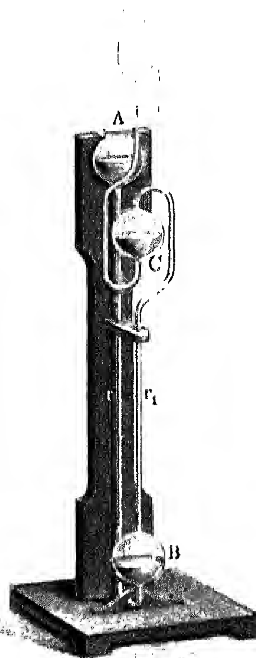
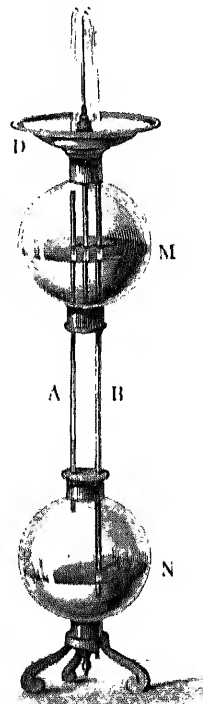


Fig. 557.



ist, die Ausflußspitze wieder auf das Spritzrohr aufgeschraubt. Ein kräftiger Wasserstrahl entsteigt dem Spritzrohr, sobald man den Hahn öffnet.

Wenn man die Einrichtung trifft, daß die Luft im Heronsball durch den Druck einer Wassersäule komprimiert wird, so erhält man einen **Heronsbrunnen**. Fig. 556 stellt einen möglichst einfach konstruierten Heronsbrunnen dar. Wenn man in die Kugel *A* Wasser eingießt, so wird es durch das Rohr *r* in das Gefäß *B* herabfließen und die Luft aus demselben verdrängen. Der dadurch erzeugte Druck pflanzt sich durch das Rohr *r* zum Heronsball *c* fort und bewirkt so das Springen des Wassers aus demselben.

Die Fig. 557 zeigt den Heronsbrunnen in der Form, wie er in Salons zu Blumentischen verwendet wird. Man findet dabei manchmal auch die Einrichtung, daß nach Ablauf des Wassers in das untere Gefäß durch Drehen beider Gefäße um eine horizontale Achse, welche die nötigen Kommunikationen enthält, der Springbrunnen wieder in Gang gesetzt werden kann.

Wegen der vielfachen Reibung erreicht der Wasserstrahl meist nu Hälfte der theoretischen Steighöhe. Um diese zu erhöhen, kann mar selbe Prinzip wiederhol Anwendung bringen. Fi zeigt dies schematisch, Fi bei einem aus Blech a führten Heronsbrunnen. Gefäße sind durch Ve wände in zwei Hälften g Das aus c (Fig. 558) du niedergehende Wasser drängt die Luft aus B i Raum über A′, und ihr addiert sich zu dem Wassersäule, welche die aus B′ nach A drängt. das Wasser in A wird ein Druck ausgeübt, de Summe der Wassersäule spricht.

Fig. 558.

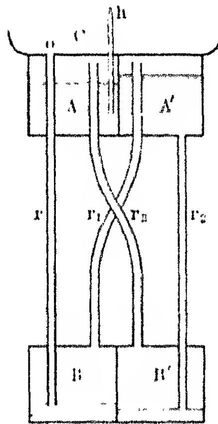
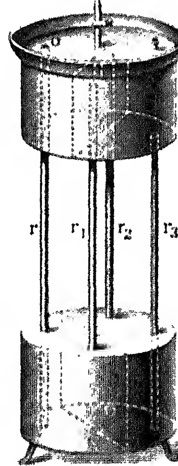
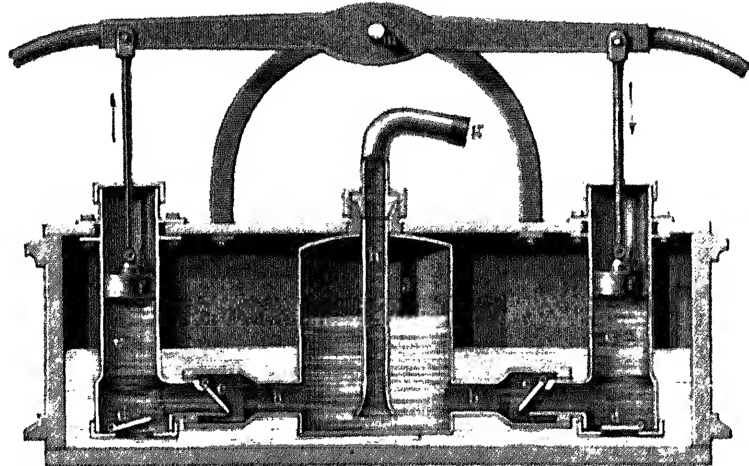


Fig. 559.



§ 182. **Die Feuerspritze**, Fig. 560, ist eine Verbindung der I pumpe mit dem Heronsball. Die Pumpenstiefel, von denen wir vorde nur den einen rechts betrachten wollen, stehen in einem mit Wasser ge Kasten. Wenn der Kolben *f* aufgezogen wird, so hebt sich die Klappe *c*

Fig. 560.



das Wasser dringt in den Stiefel. Beim Niedergange des Kolbens s sich das Ventil *d*, die Klappe *e* wird geöffnet, und das Wasser wird dur Gurgelrohr *b* in den Windkessel *a* gepreßt. Dieser Windkessel ist anderes als ein großer Heronsball: je mehr Wasser in den Windkes pumpt wird, desto mehr wird die Luft im oberen Teile desselben kompr Das Rohr *h* reicht fast bis auf den Boden des Windkessels, bei *g* wi

Das Molekulargewicht wird erhalten, indem man die Atomgewichte der in einem Molekül enthaltenen Elemente addiert. So z. B. ist das Molekulargewicht des Wassers $H_2O = 2 + 16 = 18$, das des Schwefelsäurehydrates $SH_2O_4 = 32 + 2 + 4 . 16 = 98$, das des freien Wasserstoffs $HH = 1 + 1 = 2$.

Es ist nicht uninteressant, zu erfahren, in welchen Mengenverhältnissen die Elemente auf der Erde vorkommen. Dabei ist die Erdkruste bis zur erforschten Tiefe, das Weltmeer und die Atmosphäre mit in Betracht gezogen. Die nachstehende Tabelle und das statistische Diagramm, Fig. 43, gibt darüber Aufschluß.

Element	Feste Erdkruste Proz.	Weltmeer Proz.	Atmosphäre ohne Wasserdampf Proz.	Gesamtbetrag Proz.
Sauerstoff	47,29	85,79	23,22	49,98
Silicium	27,21	—	—	25,30
Aluminium	7,81	—	—	7,26
Eisen	5,46	—	—	5,08
Calcium	3,77	0,05	—	3,51
Magnesium	2,68	0,14	—	2,50
Natrium	2,36	1,14	—	2,28
Kalium	2,40	0,04	—	2,23
Wasserstoff	0,20	10,67	—	0,94
Titan	0,33	—	—	0,30
Kohlenstoff	0,22	—	0,02	0,21
Chlor	0,01	2,08	—	0,15
Phosphor	0,10	—	—	0,09
Mangan	0,08	—	—	0,07
Schwefel	0,03	0,09	—	0,04
Baryum	0,03	—	—	0,03
Stickstoff	0,01	—	75,46	0,02
Chrom	0,01	—	—	0,01
Argon	—	—	1,30	0,00

Beim Chlorgehalt des Meerwassers sind 0,008 Proz. Brom mitgerechnet. Im Gesamtmittel verschwindet das Argon und die übrigen Elemente. Man könnte also sagen, die Erde besteht, soweit wir sie kennen, rund zur Hälfte aus Sauerstoff, zu ein Viertel aus Silicium. Da aber die mittlere Dichte der Erde höher ist als die mittlere Dichte der Erdkruste, so enthält das Erdinnere sicherlich größere Anteile an den spezifisch schweren Elementen.

Die Wichtigkeit der Elemente steht in ganz anderem Verhältnis als ihre Menge. Der Kohlenstoff beträgt nur wenig über $^1/_5$ Proz. der Erdmasse, trotzdem ist er für uns wichtiger als das Silicium, denn im Verein mit dem Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und noch einigen Elementen ist er der Hauptbestandteil aller organisierten Körper und der Träger des Lebens auf der Erde.

Röhre mit enger Öffnung, der Schwanenhals, oder ein Wasserschlauch angeschraubt. Durch den Druck, welchen die im Windkessel komprimierte Luft auf das Wasser in demselben fortwährend ausübt, wird ein starker Wasserstrahl aus der Öffnung des Schwanenhalses hervorgetrieben. An eine Öffnung, welche sich in der Wand des Windkessels nahe am Boden befindet, kann ein längerer Schlauch mit einer metallenen Mündung angeschraubt werden, mit welcher man sich dem Feuerherde nähern kann.

Der Auf- und Niedergang der Kolben wird durch einen zweiarmigen Hebel bewerkstelligt.

In unserer Figur ist die Spritze in einem Moment dargestellt, in welchem der Kolben rechts niedergeht, während der Kolben auf der linken Seite steigt; auf der linken Seite wird also gerade Wasser in den Stiefel eingesaugt, während auf der rechten Seite eben Wasser in den Windkessel eingepreßt wird.

Es ist nicht gerade notwendig, daß eine Feuerspritze zwei Zylinder habe, und in der Tat werden kleinere Feuerspritzen nur mit einem Zylinder gebaut; in diesem Falle ist freilich der Wasserzugang in den Kessel intermittierend, dessen ungeachtet aber wird aus dem Rohre des Windkessels ein kontinuierlicher Wasserstrahl hinausgetrieben, weil die komprimierte Luft auch noch wirkt, während der Kolben aufgezogen wird. Es finden dabei allerdings Schwankungen in der Kraft statt, mit welcher der Wasserstrahl hervordringt, denn diese nimmt allmählich ab, während der Kolben in die Höhe geht.

Die neueren Feuerspritzen werden meist so gebaut, daß sie nach Bedarf das Wasser statt aus dem Kasten direkt aus einem Kanale oder Flusse ansaugen können. Zu diesem Zwecke werden die Öffnungen der Ventile *d* mit einem gemeinsamen Rohre verbunden, an welches ein dickes Kautschukrohr angeschraubt werden kann, dessen anderes Ende unter die Wasseroberfläche versenkt wird. Im Prinzip stimmt eine solche Feuerspritze ganz mit der S. 424 beschriebenen Saug- und Druckpumpe überein, nur daß daran ein Windkessel vorhanden ist.

§ 183. Gasbehälter. Apparate, welche dazu dienen, um Gase aufzubewahren, werden meistens mit dem wenig passenden Namen Gasometer, d. i. Gasmesser, bezeichnet, während man die eigentlichen Gasmesser mit dem Namen Gasuhren belegt. Es gibt verschiedene Formen von solchen Gasbehältern.

Fig. 561 stellt ein Gasometer nach Pepy dar, wie es in chemischen Laboratorien gewöhnlich gebraucht wird. *B* ist ein Zylinder von lackiertem Blech von 40 bis 50 cm Höhe und 25 bis 30 cm Durchmesser, dessen oberer Deckel etwas nach oben gewölbt ist. Auf diesem Deckel ruht auf Stützen *cc* ein zweiter, oben offener Zylinder *A*, dessen Höhe aber nur $^1/_3$ von der des unteren ist. Der obere Zylinder ist mit dem unteren durch zwei Röhren verbunden, von denen die eine, *b*, gerade in der Mitte des Deckels sich befindet. Sie darf durchaus nicht in den unteren Zylinder hineinragen. Eine zweite Verbindungsröhre *a* geht fast bis auf den Boden des unteren Zylinders. In jeder dieser Röhren befindet sich ein Hahn, vermittelst dessen man nach Belieben die Verbindung der beiden Zylinder herstellen und unterbrechen kann. Bei *e* befindet sich eine kurze horizontale Röhre, welche ebenfalls durch einen Hahn verschlossen werden kann und an welcher vorn ein

Schraubengewinde eingeschnitten ist, um andere Röhren und Ausströ
öffnungen anschrauben zu können. Nahe am Boden des unteren Zy
befindet sich bei *d* eine schief nach aufwärts gerichtete Öffnung,
mittels einer Schraube oder eines Korkes verschlossen werden kann.

Wenn man den Behälter mit einem Gase füllen will, füllt man il
mit Wasser, und zwar auf folgende Weise. Die Öffnung bei *d* wir

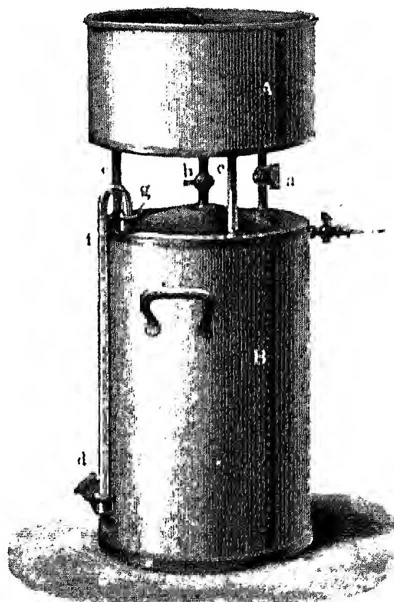


Fig. 561.

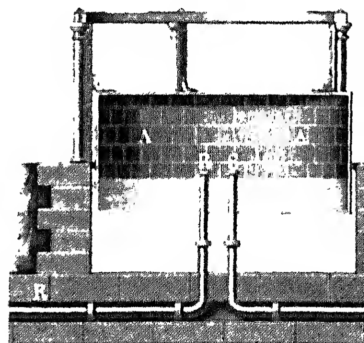


Fig. 562.

schlossen, die drei Hähne werden g
und in das obere Gefäß Wasser ge
Das Wasser fließt in den unteren Zy
und wenn dieser so weit gefüllt i
Wasser bei *e* auszufließen beginnt,
man diesen Hahn. Der Rest vo
welcher nun noch im Zylinder sich b
entweicht durch das Rohr *b*. Ist der
Zylinder auf diese Weise mit
gefüllt, so werden die Hähne der Verbindungsröhren geschlossen u
Schraube oder der Kork bei *d* weggenommen. Wasser kann hier nic
fließen, weil keine Luftblasen eindringen können. Wenn man aber be
Gasleitungsrohr einsteckt, so wird neben diesem Rohre das Wasser aus
während aus demselben fortwährend Gasblasen in den oberen Teil
hälters aufsteigen. Auf diese Weise füllt sich der untere Zylinder me
mehr mit Gas. Wie weit der Zylinder mit Gas gefüllt ist, sieht man
Glasrohre *fg*, welches mit dem Gefäße *B* oben und unten in Verb
steht, so daß das Wasser in diesem Glasrohre gleiche Höhe hat
Zylinder.

Nachdem der Behälter mit Gas gefüllt ist, wird die Öffnung bei
schlossen, der Hahn der Verbindungsrohre *a* geöffnet. Sobald nun a
Hahn *e* geöffnet wird, strömt das Gas hier mit einer dem Drucke der W
säule in der Röhre *a* entsprechenden Geschwindigkeit aus.

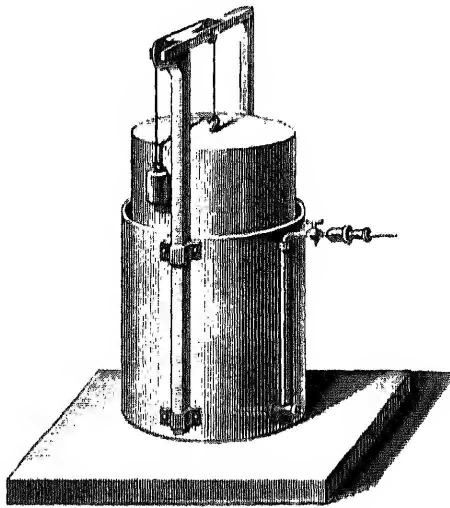
Diese Gasometer haben zwei Übelstände, deren einer darin beste
das Gas während des Ausströmens nicht unter konstantem Drucke
deren anderer in der Unbequemlichkeit beruht, daß bei jeder Füllu
Wassermasse entleert werden muß.

Von diesen Übelständen frei sind die **Glockengasometer**. Fi
zeigt ein solches von der Art, wie sie zur Aufbewahrung des Leuc

Verwendung finden. In ein mit Wasser gefülltes Bassin ist ein unten offener, oben geschlossener,* aus zusammengenieteten Platten von Eisenblech gebildeter Zylinder A eingetaucht. Von unten her ragen zwei Röhrenleitungen RR und SS in diesen umgestülpten Zylinder hinein, deren Mündung sich über dem Wasserspiegel im Bassin befindet. Durch die Röhrenleitung RR strömt, während die andere durch einen Hahn verschlossen ist, das Leuchtgas aus den Retorten, in welchen es erzeugt wird, durch die Reinigungsapparate in die Höhlung des Zylinders A ein. In dem Maße aber, in welchem das Gas einströmt, muß der ganze Zylinder A aus dem Wasser des Bassins emporsteigen. Fünf eiserne, an dem Rande des Bassins angebrachte Säulen dienen, wie aus der Figur leicht zu ersehen ist, dem Zylinder zur Führung, so daß er sich beim Steigen nicht auf die Seite neigen kann.

Ist das Gasometer gefüllt, so wird das Zuströmungsrohr geschlossen, der Hahn des Abströmungsrohres, welches sich in viele enge, zu den Gasschnäbeln führende Röhren teilt, wird geöffnet; das Gas strömt nun durch die Röhrenleitung SS ab, indem es durch das Gewicht des Blechzylinders A komprimiert wird, infolgedessen dann auch der Wasserspiegel in A um mehrere Centimeter tiefer steht als außen. In dem Maße, in welchem das Gas durch die Röhrenleitung SS abströmt, sinkt der Zylinder A wieder allmählich nieder. Bei größeren Gasometern dieser Art wird der mittlere Teil des Wasserbassins durch Mauerwerk ausgefüllt, so daß nur ein ringförmiges Bassin überbleibt, in welches die Glocke einsinkt.

Fig. 563.



Nach demselben Prinzip werden auch kleinere Gasometer für Laboratorien konstruiert. In Fig. 563 ist ein solcher Apparat abgebildet, und wohl ohne weitere Erklärung verständlich. Es befindet sich hier meist nur eine Zuleitungsröhre, aus welcher man erst das Gas ein- und nachher auch wieder ausströmen läßt.

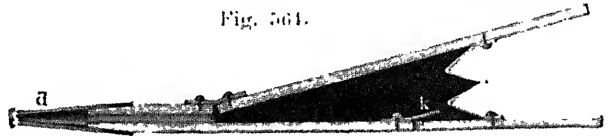
Auch bei diesen Apparaten ist es vorteilhaft, den mittleren Wasserraum durch einen hohlen Blechkörper auszufüllen, wodurch das Gewicht des Ganzen sehr verringert wird.

Manchmal benutzt man zur Aufsammlung von Gasen luftdichte **Säcke aus Kautschukstoff**, so insbesondere zur getrennten Aufbewahrung von Wasserstoff und Sauerstoff zum Zwecke der Erzeugung des **Drummond**schen Lichtes (Optik). Man gibt diesen Säcken am bequemsten die Form eines Keilpolsters und legt sie beim Gebrauch zwischen zwei durch Scharnier verbundene Bretter, deren oberes belastet wird, sobald das Gas ausströmen soll. Diese Säcke lassen aber stets nach und nach die Gase hindurch diffundieren und sind deshalb nicht allgemein als Gasbehälter verwendbar.

§ 184. Gebläse. Unter Gebläsen versteht man Vorricht
welche dazu dienen, an eine bestimmte Stelle einen mehr oder minder
Luftstrom hinzuleiten.

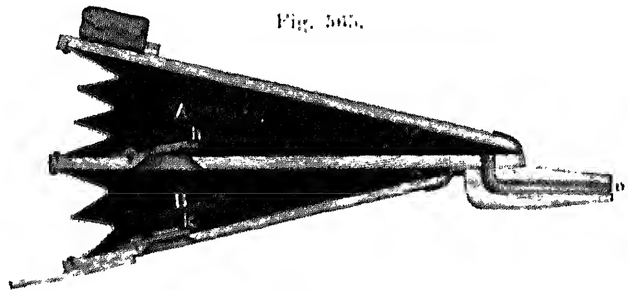
Die bekannteste Form des Gebläses ist der Blasebalg, wel
Fig. 564 in seiner einfachsten Form dargestellt ist. Beim Aufzieh
Deckels hebt sich das im Boden angebrachte Ventil *k*, es dringt von

Fig. 564.



her Luft in den inneren Raum des Blasebalges, welche beim Niederdrück
Deckels durch die Düse *d* ausgetrieben wird, weil sich bei diesem
drücken die Klappe *k* schließt. Mit einem einfachen Blasebalge ka
aber keinen kontinuierlichen Luftstrom erzeugen, wie dies in Schmiede
in chemischen Laboratorien usw. nötig ist: man wendet in diesem Fa
sammengesetzte Blasebälge an, welche konstruiert sind, wie Fi

Fig. 565.



zeigt. Die in der oberen Abteilung *A* (dem Reservoir) eines solchen
balges enthaltene Luft wird durch Gewichte, welche auf dem oberen
liegen, komprimiert; sie kann aber nur durch die Düse *o* entweiche
das Ventil *h* zwischen *A* und *B* sich schließt, sobald die Luft in *A*
komprimiert ist als in *B*. Wenn man die untere Platte des Raumes
Schöpfers) hebt, so wird die Luft in *B* komprimiert, sie hebt das
führende Ventil *h* und dringt in den oberen Raum. Beim Niedergan
untersten Platte schließt sich das Ventil *h* wieder, das Ventil *k* öffn
und *B* füllt sich von neuem mit Luft, welche durch Aufziehung der un
Platte abermals in den oberen Raum geschafft wird. Man begreift
daß das Ausströmen der Luft aus *A* durch die Düse nicht unterbroche
während *B* von neuem sich mit Luft füllt.

Fig. 566 zeigt eine ähnlich aber kräftiger wirkende Vorrichtun
Kautschukgebläse. Die längliche Birne, welche an beiden End
Ventilen versehen ist, die sich in der Richtung des Luftstromes öffnen,
die Luft von außen, wenn sie sich durch ihre Elastizität ausgedeh
Beim darauffolgenden Komprimieren mit der Hand wird die Luft in das
förmige Reservoir geschafft, welches sie aufbläst, während sie gleichz
der Pfeilrichtung weitergetrieben wird. Die Birne und die Kugel spiel
dieselbe Rolle wie der Schöpfer und das Reservoir des zusammenge
Blasebalges. Ein Netz schützt die Kugel vor zu starker Ausde

Solche Kautschukgebläse liefern Luftspannungen bis zu 40 cm Quecksilberhöhe.

Das vollkommenste aller Gebläse ist das Zylindergebläse, welches in Fig. 567 abgebildet ist. In einem wohlausgebohrten gußeisernen Zylinder *A*, in welchem ein Kolben *C*, an den Wänden luftdicht schließend, auf und nieder bewegt werden kann, geht die Kolbenstange *a* luftdicht durch die in

Fig. 566.

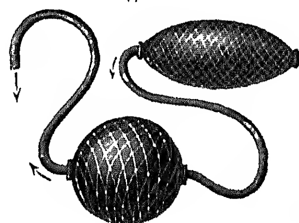
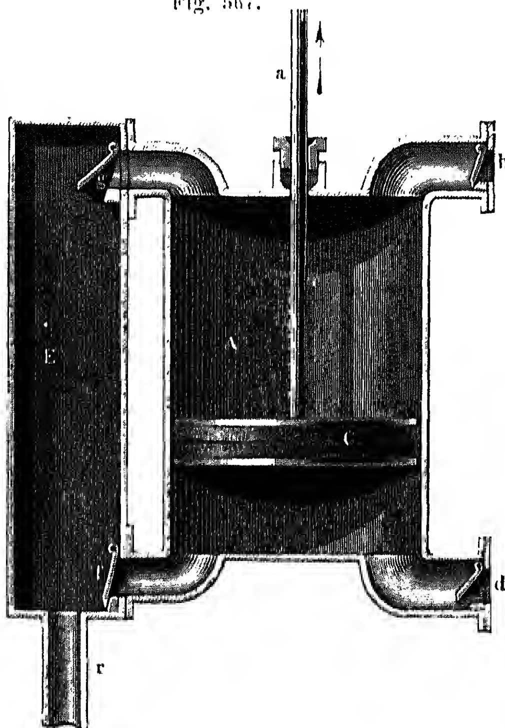


Fig. 567.



der Mitte des oberen Deckels befindliche Stopfbüchse. Durch die Öffnung bei *b* kommuniziert der obere, durch die Öffnung bei *d* der untere Teil des Zylinders mit der freien Luft; die Öffnungen bei *g* und *f* aber verbinden den Zylinder mit einem viereckigen Kasten *E*. Bei *b* und *d* befinden sich Klappen, die sich nach innen, bei *g* und *f* aber solche, die sich nach außen öffnen. Wenn nun der Kolben niedergeht, schließt sich die Klappe bei *d*, die bei *f* aber öffnet sich, und alle Luft aus dem unteren Teile des Zylinders wird in den Raum *E* getrieben. — Unterdessen dringt aber durch die Klappe bei *b* Luft von außen her in den oberen Teil des Zylinders. Wenn der Kolben wieder in die Höhe geht, schließt sich *b*, und alle Luft, die beim Niedergang des Kolbens hier eingedrungen war, wird durch die Öffnung bei *g* in den Kasten *E* geschafft, während *f* geschlossen ist und sich der untere Teil des Zylinders wieder durch die geöffnete Klappe *d* mit Luft füllt. Die in *E* komprimierte Luft strömt durch ein am unteren Ende von *E* befestigtes Rohr nach dem Feuerraume.

Die Geschwindigkeit des Kolbens ist am größten, wenn er die Mitte des Zylinders passiert, sie nimmt um so mehr ab, je mehr er sich der oberen oder unteren Grenze seines Weges nähert. Daraus geht hervor, daß der Wind, welchen ein solcher Zylinder liefert, nicht gleichmäßig ausströmt. Da aber für die meisten Schmelzprozesse ein gleichmäßiger Windstrom nötig ist, so muß man dafür sorgen, ihn zu regulieren. Man erreicht dies entweder dadurch, daß man an demselben Windkasten *E* drei Zylinder anbringt, deren Kolben nicht gleichzeitig die Mitte ihres Weges passieren, oder auch dadurch, daß man die Luft aus *E* erst in einen Behälter, z. B. eine Gasometerglocke,

treten läßt, dessen Rauminhalt sehr groß ist im Vergleich zum Volumen Zylinders. Je größer dieser Lufthbehälter ist, welcher den Namen Regul führt, desto weniger Einfluß hat die Unregelmäßigkeit der Kolbenbewe auf die Gleichmäßigkeit des aus dem Regulator austretenden Luftstrome

Um den Druck zu messen, welchem die Gase in den verschiedener hältern und Gasleitungsröhren ausgesetzt sind, bedient man sich der M meter (§ 164), welche bei Gebläsen auch den Namen der Windme führen.

Das Wassertrommelgebläse haben wir bereits im § 179 beschrieben

Rotationsgebläse. Hierher gehören insbesondere die Schraul gebläse und das Zentrifugalgebläse. Die Schraubengebläse, w

Fig. 568.

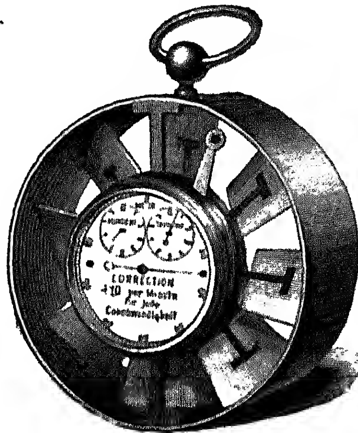


Fig. 569.

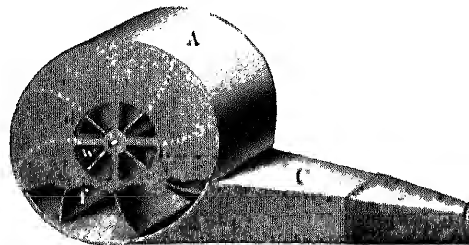
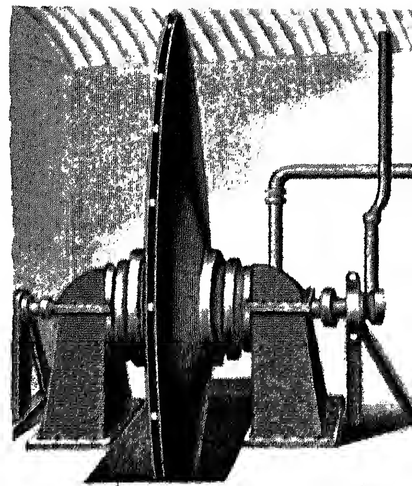


Fig. 570.



als Ventilatoren häufige Anwendung finden, bestehen aus einem zylindrischen Gehäuse, in dem durch äußere Kraft eine Achse mit Flügeln in Form von Schraubenflächen in Rotation versetzt werden kann. Die Luft, welche die Schraubenflächen umgibt, spielt hierbei die Rolle der Schraubenmutter und wird längs der Achse in Bewegung gesetzt, wenn die Schraubenspindel rotiert. Derselbe Apparat dient umgekehrt als Windmesser oder Anemometer[1]), Fig. 568. Die längs der in die Röhre eintretende Luft versetzt die Schraube in Rotation, und ein angefügtes Zählwerk kann die Anzahl der Umgänge, welche proport der durch den Windmesser hindurchgeströmten Luftmasse ist, gezählt we Ähnliche Vorrichtungen finden sich häufig am oberen Rande der Fenster gesetzt, wo sie durch das Ausströmen der wärmeren Stubenluft ins Fre

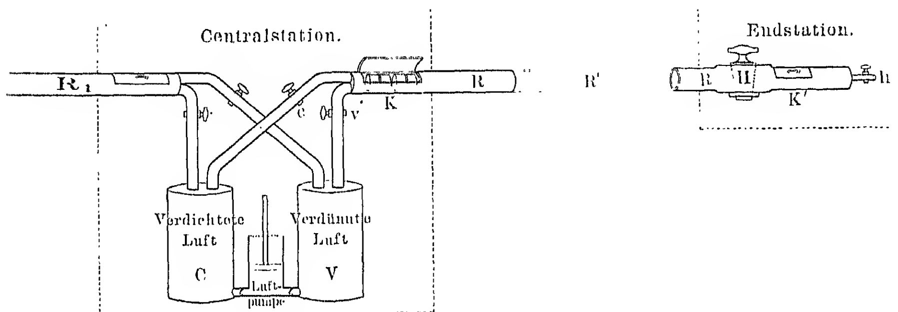
[1]) Der Windmesser für freien Wind wird in der Meteorologie beschi werden.

Rotation gesetzt werden. Den Namen Ventilator verdienen sie hierbei allerdings nicht, denn sie hemmen vielmehr den Austritt der Luft, welche schneller ausströmen würde, wenn ihr kein Hindernis in den Weg gestellt wäre.

Wirksamer sind die Zentrifugalgebläse. Innerhalb eines zylindrischen Gehäuses *A*, Fig. 569, wird ein Flügelrad in rasche Rotation versetzt. Die zwischen den Flügeln *f*, *f* vorhandene Luft wird durch Zentrifugalkraft gegen die Mantelfläche des Gehäuses gedrückt und entweicht daselbst durch ein tangential angesetztes Röhrenstück *C*. Rings um die Achse ist das Gehäuse offen und läßt bei *w* neue Luftmassen eintreten. Dasselbe Prinzip ist auch zu Luftpumpen verwendet worden, welche ohne Kolben, ohne Hahn und ohne Ventil funktionieren. Fig. 570 zeigt eine solche, wie sie im Londoner Zentralpostamt zum Betriebe der pneumatischen Post in Verwendung steht. Sie besteht aus zwei großen Eisenscheiben, welche auf einer horizontalen Achse befestigt sind. Ihr Zwischenraum ist durch radiale Wände in Kanäle geteilt. Die Achse ist auf einer Seite hohl und mit dem Raum in Verbindung, welcher ausgepumpt werden soll. Mittels einer aufgekeilten Riemenscheibe wird der Apparat durch eine Dampfmaschine oder einen anderen Motor in rasche Rotation versetzt.

§ 185. Die Luft als Motor. Die komprimierte Luft wird vielfach als Motor benutzt, wovon wir bereits in § 180 bei der Windbüchse ein Beispiel beschrieben haben. Die Anwendung der komprimierten (oder auch verdünnten) Luft bietet dabei den Vorteil, daß die Apparate zur Verdichtung

Fig. 571.



(oder Verdünnung) der Luft entfernt von dem Orte aufgestellt sein können, wo ihre bewegende Kraft benutzt wird, indem man die Luft durch Röhren der Verbrauchsstelle zuführt, wobei auch oft nebenbei die abkühlende und ventilierende Wirkung der ausströmenden Luft zum Vorteil gereicht. So z. B. werden die Bohrmaschinen beim Tunnelbau und in Bergwerken vielfach durch komprimierte Luft betrieben, welche dabei in ähnlicher Weise zur Anwendung kommt, wie der Wasserdampf bei den Dampfmaschinen. Eine hierher gehörige Anwendung ist die pneumatische Post (Rohrpost), welche den rascheren Briefverkehr innerhalb großer Städte vermittelt. Wir wollen die Einrichtung einer solchen Rohrpostanlage an der Hand der schematischen Figur 571 kennen lernen.

Im Mittelpunkte der Stadt befindet sich in Verbindung mit dem Hauptpostamt eine Zentralstation, in deren Kellerräumen sich zwei große Luftbehälter *V* und *C* befinden, sowie eine durch Maschinenkraft betriebene Luft-

pumpe, die fortwährend die Luft des einen Behälters V herauspumpt den anderen Behälter C hineindrückt. (In der Fig. 571 sind die B und die Pumpe im Verhältnis zu den Röhren zu klein gezeichnet.) V Zentralstation führen unterirdisch Röhren von $6^{1}/_{2}$ cm Durchmesse allen Endstationen, wo Postnebenämter vorhanden sind. Jede dieser ist in der Zentrale durch zwei Rohrleitungen mit den beiden Behäl Verbindung. Die Fig. 571 zeigt dies für zwei Rohrleitungen. Diese Zulei sind durch Hähne v, c verschließbar; ebenso sind die äußeren Enden de leitungen mit Hähnen h verschlossen. Sowohl in der Zentralstation jeder Endstation ist die Rohrleitung an der Oberseite durch einen h schließenden Deckel k, k' zu öffnen. Durch diese Öffnung können nun m zylindrische, mit überzogene Büchsen die mit leichter F nahe luftdicht der wandung anliegen ihrem Inneren u 20 Briefe aufzunehm mögen, hintereinand gelegt werden. S solche Sendung vo nach der Endstation fordert werden, so g Beamte an der Z zuerst ein telegrap Zeichen, der Beam Endstation öffnet die H und h, der erstere den Deckel in k, öffn auf den Hahn c, und jagt die komprimier die Büchsen mit d schwindigkeit von in der Minute unt Straßen, Kellern u nalen der Stadt hin in den Kasten k' d station. Dort schli Beamte zuerst den I

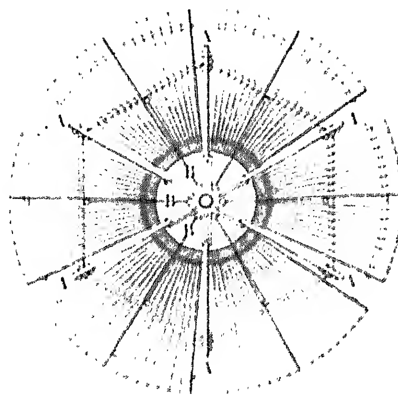


Fig. 572.

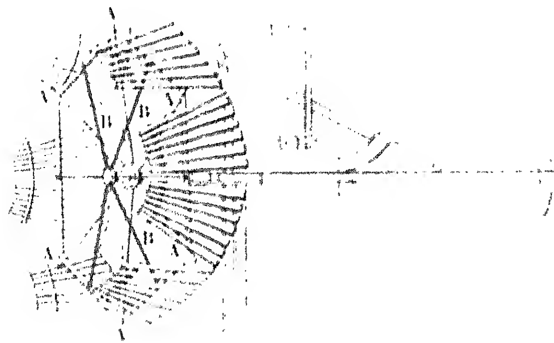


Fig. 573.

öffnet dann den Deckel k' und nimmt die Sendung in Empfang. nun Briefe in die Zentrale schicken, so legt er die gefüllten Büchsen ein, schließt den Deckel, öffnet die Hähne h und H und gibt der Z ein telegraphisches Zeichen, wonach der dortige Beamte den Hahn c s aber v öffnet. Sofort drückt die Atmosphäre die Büchsen gegen den K wo sie nach Schließen des Hahnes v herausgenommen und nötigenfalls andere Endstation weiterbefördert werden. Auf diese Weise ist es m alle Stationen untereinander in raschen Verkehr zu setzen.

In den vierziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts hat man i land und Frankreich sogar versucht, ganze Eisenbahnzüge auf

se durch Luft in Bewegung zu setzen (atmosphärische Eisenbahn), doch
len diese Versuche wegen technischer und finanzieller Schwierigkeiten
wieder aufgegeben. Dagegen werden ausnahmsweise dort, wo Rauch-
vickelung ausgeschlossen werden muß, Lokomotiven durch komprimierte
in Bewegung gesetzt.

Die älteste Anwendung der Luft als Motor ist wohl die direkte Aus-
ung der Winde bei den Segelschiffen und Windmühlen. Während
ersteren schon von den Alten benutzt wurden, sind die letzteren wahr-
inlich erst im Mittelalter in Deutschland in Gebrauch gekommen. Man
rscheidet bei den Windmühlen die Bockwindmühlen, bei welchen das
e Gehäuse zusammen mit der Achse des Windrades an seinem oberen
e jeweilen so gedreht wird, daß diese in die Windrichtung fällt, und in
ändische Windmuhlen, bei welchen der Unterbau feststeht und nur
Dach mit dem Windrad jeweilen nach dem Winde gedreht wird. Bei
neueren Windmotoren erfolgt diese Drehung automatisch mit Hilfe eines
erflügels, der am entgegengesetzten Ende der Windradachse angebracht
Wir ersehen diese Einrichtung aus der nach amerikanischem Muster
Fr. Filler in Hamburg-Eimsbüttel gebauten Windradpumpe, Fig. 572 und
). Das Windrad selbst ist aus vielen radial angeordneten schmalen, unter
fem Winkel gegen die Radebene gestellten Brettchen zusammengesetzt.
letzteren sind in sechs Gruppen angeordnet, so daß jede Gruppe sich um
Seite des sechseckigen Gestells nach rückwärts umkippen läßt. Diesem
ippen wird durch ein an einem Hebelwerk angebrachtes Gewicht ent-
ngewirkt. Überschreitet nun die Stärke des Windes einen gewissen
l, so bewirkt er selbst ein mehr oder weniger starkes Umkippen und
liert dadurch automatisch die Geschwindigkeit des Rades. Fig. 573
das Windrad in ganz umgekippter Lage.

§ 186. **Gesetze des Ausströmens der Gase.** Für die Ausfluß-
windigkeit der Gase gelten dieselben Gesetze wie bei Flüssigkeiten,
die Ausflußgeschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2gH} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

n H die Druckhöhe bezeichnet. Hier aber ist H eine Größe, die nicht
kt durch die Beobachtung gegeben ist, wie bei tropfbar-flüssigen Körpern.
diese bezeichnet H die Hohe der Flüssigkeitssäule, deren Druck den
luß bewirkt und welche von derselben Natur und Dichtigkeit ist wie die
ließende Flüssigkeit selbst. Gase, welche in einem Gefäße eingeschlossen
, sind aber nie durch eine Gassäule von gleichmäßiger Dichtigkeit und
l begrenzter Höhe gedrückt, sondern sie sind einem Drucke ausgesetzt,
her durch die Hohe h einer Wassersäule oder einer Quecksilber-
le gemessen wird.

Ist das spezifische Gewicht des eingeschlossenen Gases (Wasser = 1 ge-
) gleich d, so ist die Höhe H einer Säule dieses Gases, welche einer
sersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält:

$$H = \frac{h}{d},$$

[1]) Diese Figuren sind dem Buch der Erfindungen, II. Bd. (Ing. E. Rosen-
m) entlehnt.

mithin haben wir:

$$v = \sqrt{2g\frac{h}{d}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Unter normalem Atmosphärendruck ist das spezifische Gewicht der atmosphärischen Luft 0,001 29. Hat aber eine abgesperrte Luftmasse außer dem normalen Atmosphärendruck (welcher einer Wassersäule von 10,33 m das Gleichgewicht hält) noch den Druck einer Wassersäule von h Metern zu tragen, so ist ihr spezifisches Gewicht:

$$d = 0{,}001\,29\,\frac{10{,}33 + h}{10{,}33}.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit der Luft ist also unter diesen Umständen:

$$v = \sqrt{2g\frac{h \,.\, 10{,}33}{0{,}001\,29\,(10{,}33 + h)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Wenn die in einem Gasometer eingeschlossene Luft bei einem Barometerstande von b Metern außer dem Druck der Atmosphäre noch den Überdruck einer Quecksilbersäule von h Metern zu tragen hat, so ist ihr spezifisches Gewicht:

$$d = 0{,}001\,29\,\frac{b + h}{0{,}76}.$$

Die Höhe H einer Luftsäule von dieser Dichtigkeit, welche einer Quecksilbersäule von h Metern das Gleichgewicht hält, ist:

$$H = h\,\frac{q}{d},$$

wenn d das spezifische Gewicht der eingeschlossenen Luft, q aber das des Quecksilbers (beide auf Wasser bezogen) bezeichnen, oder wenn man für q und d ihre Werte setzt:

$$H = h \cdot \frac{13{,}6 \,.\, 0{,}76}{0{,}001\,29\,(b + h)},$$

$$H = 8012\,\frac{h}{b + h}.$$

Setzen wir diese Werte von H in Gleichung (1), so kommt

$$v = \sqrt{2g \,.\, 8012\,\frac{h}{b + h}},$$

oder wenn man für g seinen Zahlenwert 9,81 setzt:

$$v = 396{,}5\sqrt{\frac{h}{b + h}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

In dieser Gleichung bezeichnet also v die Geschwindigkeit, mit welcher atmosphärische Luft aus der Öffnung eines Gefäßes, in welchem sie durch den Überdruck einer Quecksilbersäule von h Metern komprimiert ist, ins Freie, also in die Luft ausströmt, welche unter dem Drucke eines Barometerstandes von b Metern Höhe steht.

Nach Gleichung (4) läßt sich aber auch die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher Luft, welche sich unter dem Drucke h befindet, in den leeren

Erstes Buch.

Die Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der Messung der Längen, Flächen, Volumina, Winkel, Zeiten und Massen.

§ 14. Vom Messen im allgemeinen. Eine Größe messen heißt, die- selbe mit einer Größe gleicher Art vergleichen, um zu ermitteln, wie oft di eine in der anderen enthalten ist. Die Vergleichsgröße wird *Maßeinhei* genannt. Bedient man sich als Maßeinheit einer durch internationale Ver einbarung oder Gesetz festgesetzten Größe, so erhält man eine *absolut Messung*. Ist dagegen als Maßeinheit eine beliebige Größe gewählt, s erhält man nur eine *relative* Messung. Wenn wir z. B. konstatieren, da die Längen der Seiten eines Dreiecks sich wie 1 : 1,5 : 1,7 verhalten, so is dies eine relative Messung. Wenn wir aber ermitteln, daß diese Seitenlänge 1, 1,5, 1,7 cm betragen, so ist dies eine absolute Messung.

Die in der Physik zu messenden Größen sind sehr mannigfacher Art Längen, Winkel, Zeiten, Massen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Temperature Wärmemengen, Lichtstärken usw. Man benötigt daher ebensovieler Maß einheiten, als es Arten von Größen gibt. Durch den Zusammenhang diese Größen ist es aber möglich geworden, fast alle Messungen auf drei Grund einheiten zu reduzieren. Es sind dies die Einheiten der *Länge*, der Ze und der *Masse*. Wo dies noch nicht gelungen ist, ist es das Bestreben d Physiker, dieses Ziel zu erreichen.

Diese einheitliche Gestaltung des gesamten Maßsystems ist von enorme ökonomischen Vorteil und als ein wesentlicher Fortschritt der physikalische Wissenschaft zu betrachten. Es wäre zwar auch möglich, mit nur zw Grundeinheiten auszukommen; aus praktischen Gründen behalten wir ab die angegebenen drei bei. Diese sind willkürlich gewählt, die übrigen si dann abgeleitete; die Art der Ableitung ist aber wieder eine willkürlich durch Vereinbarung festgesetzte. Wir beginnen mit der Aufstellung d

Raum einströmt. Man hat für diesen Fall nur $b = 0$ zu setzen und erhält lsdann:

$$v = 396,5 \sqrt{\frac{h}{h}} = 396,5,$$

lso stets den gleichen Wert von v, welches auch der Wert von h sein mag.

Die Ausflußmenge in einer Sekunde würde man erhalten, wenn nan den Querschnitt der Öffnung f mit diesem Werte von v multipliziert, orausgesetzt, daß in jedem Punkte des Querschnittes die ausströmenden ,uftteilchen mit dieser Geschwindigkeit passieren. Die Ausflußmenge in Sekunden würde demnach sein:

$$M = f \cdot t \cdot 396,5 \sqrt{\frac{h}{b + h}}.$$

Die Erfahrung aber zeigt, wie wir dies ja auch schon bei tropfbarüssigen Korpern gesehen haben, daß die wirkliche Ausflußmenge geringer st als die theoretische; und zwar hat man die theoretische Ausflußmenge mit inem bestimmten Faktor μ zu multiplizieren, um die wirkliche zu erhalten.

Für Wasser ist bekanntlich dieser Faktor 0,64 und ist fast ganz unabängig von der Druckhöhe, indem er nur sehr unbedeutend wächst, wenn ie Druckhöhe abnimmt. Für Gase aber ist der Wert von μ sehr veränderch. Nach Schmidt, welcher diesen Gegenstand zuerst einer genaueren Intersuchung unterworfen hat, ist μ bei einer Druckhöhe von 1 m Wasser leich 0,52. Nach d'Aubuissons Versuchen ist, innerhalb der Druckhöhen on 3 bis 15 cm, der Wert von $\mu = 0,65$ zu setzen. Solche Verschiedeneiten können nicht wohl von Beobachtungsfehlern herrühren und beweisen nzweifelhaft eine Veränderlichkeit von μ.

Eine sehr genaue Reihe von Versuchen hat Koch über diesen Gegenand angestellt. Er hat gefunden, daß, wenn die Druckhöhe von 2 m Wasser is 5 cm abnimmt, der Wert von μ von 0,5 bis auf 0,6 wächst. Buff hat ezeigt, daß, wenn man

$$\mu = 0,626 \left(1 - 0,789 \sqrt{h}\right)$$

etzt, wo h, wie bisher, die Druckhöhe bezeichnet, die nach dieser Formel beechneten Werte sehr gut mit den Kochschen Beobachtungen übereintimmen, daß also diese Formel das empirische Gesetz für die Veränderchkeit des Ausflußkoeffizienten μ ist. Später hat Buff hierüber selbst enaue Versuche bei geringem Drucke, wie er besonders in der Praxis vorommt, angestellt, welche gleichfalls die Veränderlichkeit des Koeffizienten μ 1 der erwähnten Weise bestätigen.

Die Differenz zwischen der theoretischen und wirklichen Ausflußmenge at hier einen ganz analogen Grund wie bei den tropfbar-flüssigen Körpern, nd es läßt sich daraus schließen, daß auch hier eine *Contractio venae* stattnden muß, obgleich wir sie nicht unmittelbar beobachten können.

Zylindrische Ansatzröhren ebenso wie konische, mag nun die weite ffnung nach innen oder nach außen gekehrt sein, vermehren die Ausflußenge der Gase.

§ 187. Ausflußgeschwindigkeit verschiedener Gase bei gleichem Pruck. Nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ist die Ausströmungs-

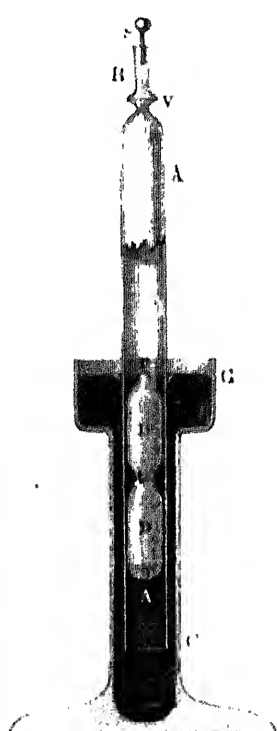
geschwindigkeit c' eines Gases, dessen spezifisches Gewicht nicht d, s
nd ist.

$$c' = \sqrt{2g\frac{h}{nd}} = c\sqrt{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke ausströn
ist also ihre Ausströmungsgeschwindigkeit der Quadratwurz
ihren spezifischen Gewichten umgekehrt proportional. Ei
mal leichteres Gas wird also doppelt so schnell ausströmen. Das spe
Gewicht der Kohlensäure ist 1,5, das des Wasserstoffgases ist 0,069
groß als das der atmosphärischen Luft. Die Ausströmungsgeschwin
der Kohlensäure ist also $\frac{v}{\sqrt{1,5}} = 0.816\,v$, die des Wasserstoffgases ist
$= 3.8\,.\,v$, wenn v die Ausströmungsgeschwindigkeit der atmosphä
Luft unter gleichem Druck bezeichnet.

Da nun aber die Ausflußzeit der Ausflußgeschwindigke
gekehrt proportional ist, so folgt, daß das spezifische Gewicht
Gases dem Quadrat der Zeit proportional ist, welches ein ge
Gasvolumen unter sonst gleichbleibenden Ums
braucht, um aus einer feinen Öffnung
strömen.

Fig. 574.



Bezeichnen wir mit t und t' die Zeiten,
zwei gleiche Volumina verschiedener Gase br
um bei gleichem Druck durch die gleiche
auszuströmen, so haben wir also:

$$\frac{s}{s'} = \frac{t^2}{t'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wenn wir mit s und s' die spezifischen G
der beiden Gasarten bezeichnen.

Bunsen gründete darauf ein sehr sinn
Verfahren, um das spezifische Gewicht von
zu ermitteln. Zur Aufnahme des zu unter
den Gases dient eine Glasröhre A, Fig. 574,
ungefähr 40 cm lang ist. Oben ist sie verer
ein Glasröhrchen B angesetzt. In der etw
dickten Vereinigungsstelle V ist ein dünnes
plattchen eingeschmolzen, welches eine fe
nung hat, durch welche das Gas aus A aus
kann, wenn das Röhrchen B nicht dur
Glasstöpsel s geschlossen ist. Unten ist
durch Quecksilber gesperrt, welches sich in
oben erweiterten Gefäß befindet. Währe
Stöpsel s wohl schließend aufgesetzt ist, wi
die Glasröhre A so tief in das Quecksilber
gedrückt und durch eine entsprechende Vorrichtung festgehalten,
Spitze r eines aus einer Glasröhre verfertigten Schwimmers D durch ein
Schritte entferntes Fernrohr genau im Niveau des Quecksilbers im
erscheint. Nun wird der Stöpsel s weggenommen; das Gas begin

nströmen, der Schwimmer D steigt, und man hat nur die Zeit zu messen, elche vom Wegnehmen des Stöpsels an vergeht, bis die an einer Verengung es Schwimmers D angebrachte Marke t im Niveau des äußeren Quecksilbers scheint. Hat man mit demselben Instrument gleich hintereinander diese essung mit zwei verschiedenen Gasarten angestellt, so verhalten sich ihre eziflschen Gewichte wie die Quadrate der beobachteten Ausflußzeiten. Zur läuterung mögen folgende von Bunsen angestellte Messungen dienen. amit der Schwimmer D um die Höhe rt stieg, waren erforderlich:

für atmosphärische Luft	für Knallgas (elektrolytisch)
117,9 Sekunden	75,4 Sekunden
117 „	75,8 „
117,9 „	75,7 „
117,6 Sekunden	75,6 Sekunden.

Setzen wir nach diesen Versuchsresultaten in Gleichung (1) $t = 75{,}6$, $= 117{,}6$ und $s' = 1$, so ergibt sich für das spezifische Gewicht des nallgases:

$$s = \frac{75{,}6^2}{117{,}6^2} = 0{,}413,$$

as mit dem aus dem spezifischen Gewichte der Bestandteile berechneten ezifischen Gewichte des Knallgases (0,415) sehr nahe übereinstimmt.

Fig. 575 zeigt eine verbesserte Form des Ausströmungsapparates, elchen Bunsen zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Gase anwendet hat (Bunsen, Gasometrische Methoden, S. 129).

Wenn die Gase nicht durch Öffnungen in dünner Wand, sondern durch apillarröhren ausströmen, so erscheinen die Ausströmungsgetze in ähnlicher eise modifiziert wie die der tropfbar-flüssigen Körper.

Um die Gesetze zu ermitteln, nach welchen das Ausströmen eines Gases urch die kapillaren Kanäle eines Gipspfropfens stattfindet, wandte unsen (Gasometrische Methoden, Seite 214) die in Fig. 576 abgebildete orrichtung an. Eine graduierte Röhre ist oben mit einem bei 60° C getrockneten Gipspfropfen b geschlossen. Durch ein seitliches Rohr kann man e mit einem beliebigen Gase füllen und dann mittels eines Quetschhahnes sperren, welcher das Kautschukröhrchen q zudrückt. — Über dem Gipspfropfen b erweitert sich die Glasröhre etwas, und in diese konische Erweiteng paßt der eingeriebene Glasstöpsel o. Erst wenn dieser in die Höhe ezogen ist, kann eine Durchströmung des Gipspfropfens nach der einen ler anderen Richtung hin beginnen. Durch den Raum über dem Gipspfropfen b kann man nun aber mittels des Röhrchens i einen Gasstrom von er rechten Seite her einführen, während auf der linken Seite eine gleiche asmenge ausströmt, und so ist es möglich, auch über dem Gipspfropfen b ne beständig erneuerte Atmosphäre irgend eines Gases zu erhalten.

Es sei nun das Rohr ähnlich wie in Fig. 574 durch Quecksilber abesperrt und mit Sauerstoffgas gefüllt, während über den Gipspfropfen n Strom von Sauerstoffgas hinwegstreicht; wenn unter diesen Umständen as Rohr so hoch in die Höhe gezogen wird, daß der Spiegel des Quecklbers im Rohr einige Centimeter höher steht als außen, so wird unter em Einfluß dieser Druckdifferenz Sauerstoffgas von oben her durch den ipspfropfen in die Röhre eintreten, und man kann nun messen, wieviel

Zeit erforderlich ist, damit bei konstant erhaltener Druckdifferenz ein gegebenes Volumen Sauerstoff eindringt.

Bunsen hat den Versuch für das nämliche Gas bei verschiedener Druckdifferenz angestellt und ihn dann in gleicher Weise mit verschiedenen

Fig. 575.

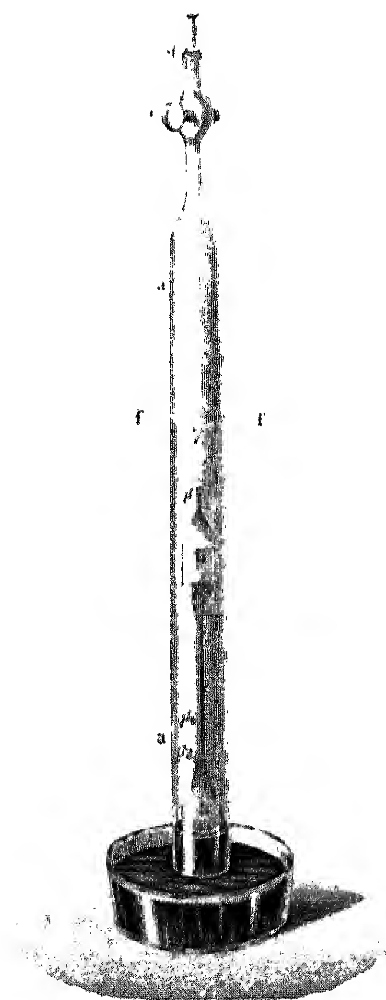
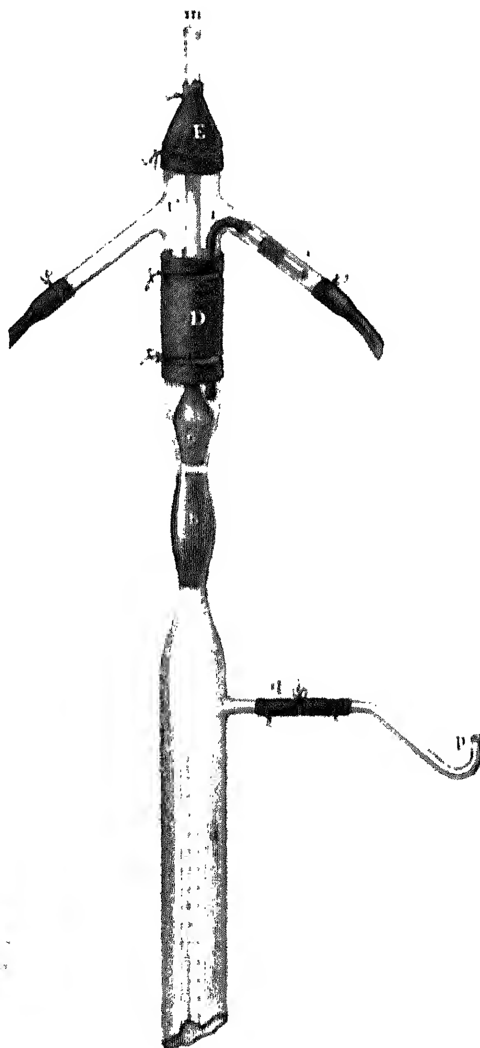


Fig. 576.



Gasen wiederholt. Aus diesen Versuchen ergab sich zunächst, daß die in gleichen Zeiten durch den Gipspfropfen eingeströmten Volumina desselben Gases der Druckdifferenz proportional sind.

Vergleicht man aber die Volumina verschiedener Gase, welche unter gleicher Druckdifferenz in derselben Zeit einströmen, so verhalten sich diese nicht umgekehrt wie die Quadratwurzel aus den spezifischen Gewichten der Gase. Die unter gleicher Druckdifferenz in gleichen Zeiten eingetretenen Volumina von Sauerstoffgas und Wasser-

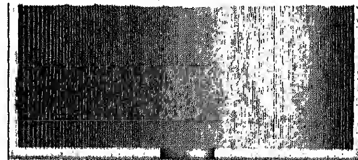
stoffgas verhalten sich nach dem Versuche wie 1 : 2,73; während die Quadratwurzeln aus den spezifischen Gewichten im Verhältnis von 1 : 3,995 stehen.

Es geht daraus hervor, daß der Durchgang eines Gases durch einen Gipspfropfen durch einen Reibungskoeffizienten modifiziert ist, welcher von der Natur des Gases abhängt, und daß also die Hohlräume des Gipses gegen hindurchströmende Gase sich nicht wie ein System von feinen Öffnungen in dünner Wand, sondern wie ein System kapillarer Röhren verhalten.

§ 188. Seitendruck der Gase beim Ausströmen, aerostatisches Paradoxon. Wenn sich Luft durch Röhrenleitungen bewegt, so ist ein Reibungswiderstand zu überwinden, und dazu wird ein Teil der Spannung des komprimierten Gases verwandt werden, also für die Bewegung verloren gehen. Der Druck, den die Röhrenwände von der Tension der durchströmenden Luft auszuhalten haben, nimmt um so mehr ab, je mehr man sich der Mündung des Rohres nähert, wie man sich durch Manometer überzeugt, welche an verschiedenen Stellen des Rohres angebracht werden. Es ist dies ganz den Erscheinungen analog, welche man bei der Bewegung von Flüssigkeiten durch Röhrenleitungen beobachtet. Über den Reibungswiderstand, welcher bei der Bewegung der Luft durch Röhren überwunden werden muß, sind besonders von d'Aubuisson und Buff Versuche angestellt worden.

Das Phänomen des Saugens findet bei der Bewegung der Gase auf eine ganz ähnliche Weise wie bei dem Ausströmen von Flüssigkeiten statt. Clement und Desormes haben eine äußerst interessante, hierher gehörige Erscheinung beschrieben. Wenn man in den Boden eines Reservoirs, Fig. 577, welches komprimierte Luft enthält, eine Öffnung von 2 bis 5 cm Durchmesser macht, so entweicht die Luft mit großer Gewalt. Wenn man der Öffnung eine Scheibe von Holz oder Metall nähert, welche ungefähr 20 cm Durchmesser hat, so wird sie, nachdem der erste Widerstand überwunden ist, nicht mehr abgestoßen; sie oszilliert lebhaft, indem sie in sehr kurzen Zwischenräumen (hundertel Sekunden) sich der Öffnung bald nähert, bald von ihr entfernt. Die Luft entweicht dabei mit großem Geräusch zwischen der Scheibe und der Wand. Wenn man versucht, die Scheibe wegzunehmen, so muß man große Kraft anwenden, wie wenn sie auf die Wand festgeleimt wäre. Clement und Desormes erklärten dies Phänomen ganz richtig. Der Luftstrahl, welcher die Öffnung verläßt, muß sich in eine dünne Schicht zwischen der Scheibe und der Wand ausbreiten. Bei unveränderter Dicke muß sie sich um so mehr ausbreiten, je mehr sie sich dem Rande der Scheibe nähert; sie befindet sich also in dem Falle wie ein flüssiger Strahl, welcher die immer wachsenden Querschnitte eines konischen Ansatzrohres ausfüllen soll. Zwischen der Scheibe und der Wand bildet sich ein luftverdünnter Raum, infolgedessen die atmosphärische Luft, von unten gegen die Scheibe drückend, sie an die Wand anpreßt.

Fig. 577.



Man kann diesen Versuch auch im kleinen anstellen, wenn ma[n] mit dem Munde durch eine Röhre bläst, welche mit einer ebenen S[cheibe] endigt, wie dies in Fig. 578 dargestellt ist. Diese Scheibe hat in der [Mitte] ein Loch. Nahe am Rande sind drei Stäbchen, etwa von Draht, be[festigt]. An ihrem unteren Ende ist an jedem dieser Stäbchen ein Knopf angel[ötet], und auf diesen drei Knöpfchen liegt endlich frei nach oben beweglic[h eine]

Fig. 578.

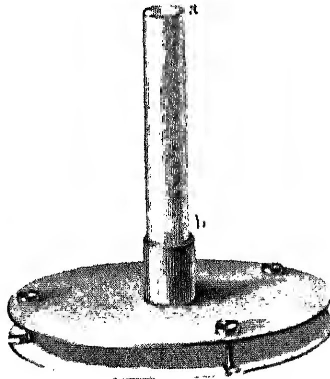


Fig. 579.

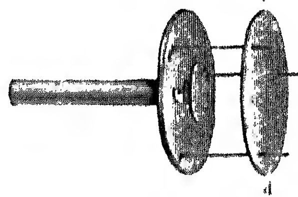
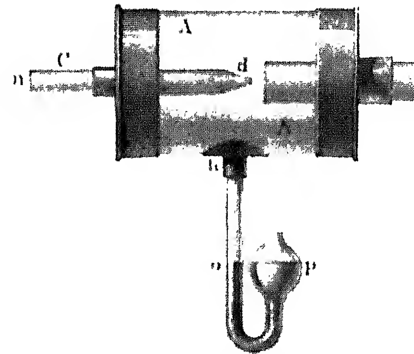


Fig. 580.



Scheibe von Kartenpapier; sie h[at] Einschnitte, durch welche die drei [Stäb]chen hindurchgehen. Sobald man in die Röhre *ab* kräftig hineinbläst, [wird] die bewegliche Scheibe gehoben und [bleibt] nahe der oberen Scheibe hängen, b[is man] mit Blasen aufhört.

Eine andere Form dieses Ver[suches] ist in Fig. 579 dargestellt. V[or der] Mündung *a* des horizontal geh[altenen] Rohres ist in geringem Abstande ein Messingscheibchen befestigt, [dessen] Durchmesser etwas größer ist als der der Öffnung, so daß der bei *a* austr[etende] Luftstrom alsbald eine seitliche Richtung annehmen muß. Bei ri[chtiger] Stellung dieses kleinen Scheibchens kann der gegen die bewegliche Sche[ibe] von außen her wirkende Druck so stark werden, daß sie schon au[s einer] Entfernung von 5 cm angezogen wird.

Den Durchmesser der Scheiben kann man ungefähr 1 dcm, die ve[rtikale] Entfernung der beiden Scheiben 1 cm machen.

Die einfachste Art, diesen Versuch anzustellen, hat Faraday ange[geben]. Man schließe die Finger der offenen Hand fest aneinander, so wir[d] noch von Gelenk zu Gelenk ein spaltartiger Zwischenraum bleiben. W[ährend] man nun die Hand auf diese Weise horizontal hält, so daß die Fläc[he ab]wärts gekehrt ist, appliziere man die Lippen dem Intervall zwische[n] Zeige- und Mittelfinger nahe an ihren Wurzeln und blase möglichst [stark]. Bringt man nun ein Stück Papier von ungefähr 16 qcm an die Öffnung, [durch] welche der Luftstrom hindurchgeht, so wird es weder durch diesen Luf[tstrom] fortgeblasen, noch fällt es durch sein Gewicht herab, was aber soglei[ch ge]schieht, sobald man mit dem Blasen aufhört.

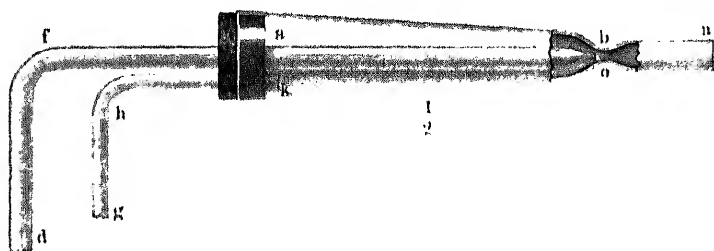
Das Phänomen des Saugens durch ausströmende Gase woll[en wir] auch mittels des Apparates Fig. 580 erläutern. Ein etwas weiteres,

Glasrohr A ist auf beiden Seiten durch aufgekittete Klappen von Messingblech geschlossen. In die eine derselben ist die Glasröhre B, in die andere ist die noch engere Glasröhre C so eingekittet, daß die etwas eingezogene, etwa 2 mm weite Mündung d der Röhre C ganz nahe vor dem einen Ende der Röhre B steht. Bei h ist die Röhre A durchbohrt und in eine hier aufgekittete Messingfassung ein auf der einen Seite kugelförmig erweitertes Manometerrohr eingekittet. Das Manometerrohr wird ungefähr bis zur Höhe op mit gefärbtem Wasser gefüllt. Wenn man nun bei n stark in das Rohr C hineinbläst, so sieht man alsbald, wie die Flüssigkeit im Manometerrohr von o aus mehrere Centimeter hoch in die Höhe steigt, ein Beweis, daß durch das Blasen eine Luftverdünnung in A hervorgebracht wird.

Die Luftverdünnung rührt daher, daß der bei d mit ziemlicher Geschwindigkeit austretende Luftstrom, in dem weiteren Rohre b sich ausbreitend, eine saugende Wirkung auf die Luft in A ausübt. Dieser Versuch erklärt sehr gut die Wirkung des sogenannten Blaserohrs der Lokomotiven.

Weit kräftiger noch läßt sich die Wirkung des Saugens mit dem von Reichert ganz aus Glas und Korkstopfen konstruierten Apparat, Fig. 581,

Fig. 581.



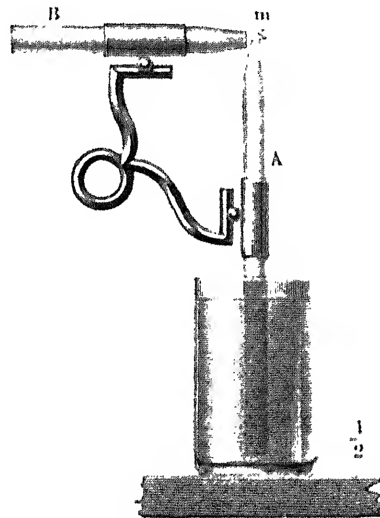
zeigen, dessen Einrichtung nach dem Vorangehenden wohl ohne weiteres verständlich sein wird. Zur Erläuterung der Figur ist nur noch zu bemerken, daß die äußere Glasröhre bei b im Durchschnitt dargestellt ist. Der links aus dem Korkstopfen hervorragende Teil der Röhren ofd und khg ist in horizontaler und vertikaler Richtung weit länger, als es in der Figur der Raumersparnis wegen dargestellt ist.

Das vertikal herabgehende Röhrenstück fd ist in den Hals eines Kochgefäßes, etwa eines kleinen Papinschen Topfes, eingesetzt, dessen Wasser erhitzt wird. Sobald die Dämpfe bei o mit hinreichender Gewalt ausströmen, saugen sie nicht nur das Wasser aus einem Gefäß, in welches das untere Ende von hg eingetaucht ist, empor, sondern sie treiben dasselbe auch noch zur Öffnung bei n hinaus. Setzt man bei n mittels eines Kautschukröhrchens ein kurzes Glasrohr an, welches mit einer verengten Mündung versehen ist, wie die bei o, so strömt aus dieser Mündung ein kontinuierlicher Wasserstrahl hervor, welcher unter günstigen Umständen bis zur Decke des Zimmers aufsteigt, wenn diese Mündung vertikal nach oben gerichtet ist.

Diese Vorrichtung ist auch geeignet, die Wirkung der Dampfstrahlpumpe (des Injektors) zu erläutern, welche in neuerer Zeit vielfach zur Speisung der Dampfkessel benutzt wird, für deren nähere Besprechung aber hier nicht der Ort ist.

Die Gebrüder Korting in Hannover haben nach diesem Prinzi Reihe von Apparaten konstruiert, welche zum Fortbewegen und Heb Flüssigkeiten, als Ersatz von Pumpen, dann zum Fortbewegen von als Gebläse, Ventilatoren, Exhaustoren, Luftpumpen, ja selbst zum For und Heben von festen K (Korn, Knochenkohle usw.) ein fache und sehr vorteilhafte A dung finden.

Fig. 582.



Eine in neuerer Zeit sel breitete Anwendung des Saug mens sind auch die Flüssig zerstäuber, deren einfachst in Fig. 582 in $^1/_2$ der natü Größe dargestellt ist. Die der etwas verengten oberen (des vertikalen Glasrohres A, untere Öffnung in die z staubende Flüssigkeit einge ist, mündet das bei m gle etwas verengerte horizontale röhrchen B. Wird nun krä das Röhrchen B hineingeblas strömt die Luft mit solcher bei m aus, daß die Flüssigkeit in A nicht allein bis zur oberen Mündung Röhrchens aufgesaugt, sondern auch, in die zartesten Tröpfchen aufgelö dem Luftstrome mit fortgerissen wird. Der Luftstrom kann auch hier einen Dampfstrom ersetzt werden.

§ 189. Wirbelbewegungen in Gasen. In § 146 haben wir v Wirbelbewegungen gesprochen, die beim Ausströmen von tropfbaren F keiten aus einer Öffnung im Boden eines Gefäßes entstehen. Aus gan selben Ursachen werden auch beim Ausströmen von Gasen aus Gefäßen Wirbelbewegungen auftreten. Auf diese Weise erklären sich die R ringe, welche Raucher aus dem Munde blasen und die sich ganz halten wie die Flüssigkeitswirbelringe der Fig. 424. Man kann di leicht mit folgendem einfachen Apparat reproduzieren. Ein bei offener Glas- oder Blechzylinder wird an einem Ende mit einer elas Membran verschlossen und am anderen mit einem Papierblatt, das Mitte eine etwa 1 cm im Durchmesser haltende runde Öffnung besitzt. man den Zylinder, etwa durch Einblasen mittels einer Glasröhre, mit an, so genügt jeweilen ein schwacher Schlag auf die Membran, um Öffnung einen Rauchring aufsteigen zu sehen, und man wird ohne Sch keit in ihm die wirbelnde Bewegung bemerken.

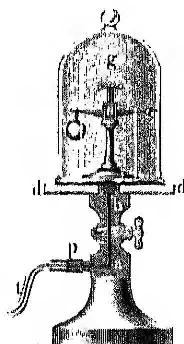
Auch beim Abfeuern von Kanonen oder Böllern entstehen solche insbesondere wenn nur Schießpulver und kein Geschoß geladen wird selben haben Durchmesser von 1 bis 2 m, bewegen sich unter san Geräusch mit der Geschwindigkeit von 30 bis 35 m bis auf eine Dista über 300 bis 450 m und bringen dort, wo sie auf eine Scheibe aufsc namhafte zerstörende Wirkungen hervor. Hierauf gründen sich d

den Meteorologen noch sehr skeptisch aufgenommenen Versuche, durch Schießen die Hagelbildung in den Wolken zu verhindern (Wetterschießen).

H. v. Helmholtz hat die Bewegungen und Eigenschaften dieser Wirbel zunächst für eine ideale, absolut leicht bewegliche Flüssigkeit berechnet und hat dabei außerordentlich merkwürdige und interessante Resultate erhalten, welche sich bis zu einem gewissen Grade an den Wirbeln in wirklichen Flüssigkeiten und Gasen nachweisen lassen. Ein Wirbelring bewegt sich in der Richtung fort, nach welcher die Teile im Innern rotieren. Wenn er gegen eine Wand gerät, so breitet er sich aus. Von zwei in gleicher Richtung forteilenden Ringen holt stets der rückwärtige den vorderen ein; dieser erweitert sich und läßt den anderen hindurch, worauf sich das Spiel wiederholt. Wir können leider auf diesen Gegenstand nicht näher eingehen.

§ 190. Vom Auftrieb der Luft; Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum. Das Gesetz des Archimedes gilt für Gase ebenso wie für Flüssigkeiten. Jeder in ein Gas getauchte Körper erfährt von diesem einen Auftrieb, welcher dem Gewichte der verdrängten Gasmasse gleich ist. Es läßt sich dies mit Hilfe des Apparates Fig. 583 nachweisen, welcher den Namen des Baroskops oder des Dasymeters führt. Er besteht aus einem Wagebalken, an welchen auf der einen Seite eine hohle Glaskugel angehängt ist, während der andere Arm eine weit kleinere massive Metallkugel trägt, die an einem Schraubengewinde etwas nach rechts oder links geschoben werden kann, um dadurch das Gleichgewicht mit der hohlen Glaskugel herzustellen.

Fig. 583.



Ist das Gleichgewicht in der Art hergestellt, daß der Wagebalken horizontal steht, wenn der ganze Apparat von Luft umgeben ist, so wird er unter die Glocke der Luftpumpe gebracht. Sobald man evakuiert, hört das Gleichgewicht auf; der Arm, an welchem die hohle Glaskugel hängt, sinkt um so tiefer, je verdünnter die Luft unter der Glocke wird.

Es läßt sich davon leicht Rechenschaft geben. Es sei:

G das Gewicht der Glaskugel }
P das Gewicht der Metallkugel } im leeren Raume,
L der Gewichtsverlust der Glaskugel }
l der Gewichtsverlust der Metallkugel } wenn sie in Luft eingetaucht sind,

so ist, wie uns das ursprüngliche Gleichgewicht am Wagebalken lehrt:

$$G - L = P - l,$$

also:

$$G = P + L - l;$$

da nun aber jedenfalls $L > l$, weil das Volumen der hohlen Glaskugel größer ist als das der Metallkugel, so ist auch $G > P$, im luftleeren Raume ist also die Glaskugel schwerer als die Metallkugel, obgleich sie sich im lufterfüllten Raume an der Wage das Gleichgewicht hielten.

Da die Wägung der Körper fast immer in der Luft stattfindet, so muß, um das **wahre absolute Gewicht** der Körper zu erhalten, eine Reduktion der Wägungen auf den leeren Raum vorgenommen werden.

Bezeichnen wir mit:

P das gesuchte Gewicht des abgewogenen Körpers im leeren
G das Gewicht der verwendeten Gewichtsstücke im leeren R
π den Gewichtsverlust des Körpers P in Luft,
γ „ „ der Gewichtsstücke in Luft,
s das spezifische Gewicht des Körpers P bei 0°,
s' „ „ „ der Gewichtsstücke G bei 0°,
k den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Körpers P,
k' „ „ „ der Gewichtsstüc
l_0 das spez. Gewicht der Luft bei 0° = 0,001 293,
α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft = 0,003 67,
h den Luftdruck während der Wägung in Millimeter Quec

so ist

$\frac{P}{s}(1+kt)$ das Volumen des gewogenen Körpers bei der Wä temperatur t,

$\frac{G}{s'}(1+k't)$ das Volumen der Gewichtsstücke bei der Wägung ratur t,

$\frac{l_0 h}{760(1+\alpha t)}$ das spez. Gewicht der Luft bei t° und h Mill Druck,

folglich sind die Auftriebe von P und G

$$\pi = \frac{l_0 h}{760(1+\alpha t)} \cdot \frac{P}{s}(1+kt) \qquad \gamma = \frac{l_0 h}{760(1+\alpha t)} \cdot \frac{G}{s'}(1$$

Die Wägung ergibt die Gleichheit der scheinbaren Gewichte:

$$P - \pi = G - \gamma,$$

woraus

$$P = G + \pi - \gamma;$$

die Korrektion wegen der Reduktion der Wägung auf den leeren R demnach:

$$\pi - \gamma = \frac{l_0 h}{760(1+\alpha t)}\left[\frac{P}{s}(1+kt) - \frac{G}{s'}(1+k't)\right]. \quad .$$

Diese Formel enthält selbst das zu berechnende P; da aber di Größe $\pi - \gamma$ nur eine Korrektionsgröße ist, so kann man in erster rung für P das unkorrigierte G einsetzen

Man erhält dann

$$Corr = \pi - \gamma = G \cdot \frac{l_0 h}{760(1+\alpha t)}\left[\frac{1+kt}{s} - \frac{1+k't}{s'}\right] \quad .$$

Wo nicht große Genauigkeit verlangt wird, kann man bei fest flüssigen Körpern auch deren Volumänderungen und jene der G stücke mit der Temperatur vernachlässigen, so daß dann der Ausdr die Korrektion lautet:

$$Corr = \pi - \gamma = G\,\frac{l_0 h}{760(1+\alpha t)}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s'}\right) \quad . \quad . \quad .$$

Die Korrektion wird gleich Null, wenn $s = s'$, d. h. die spez. G des abzuwägenden Körpers und der Gewichtsstücke gleich sind; s

§ 15. Das metrische Maßsystem, die Längeneinheit. Die alten Längenmaße waren den Dimensionen des menschlichen Körpers entnommen: Fuß (Schuh), Schritt, Daumen (Zehe), Faust, Spanne, Elle[1]). Sie wurden später in den einzelnen Ländern von den Regenten gesetzlich festgestellt. Dadurch entstand eine Vielheit von nicht miteinander übereinstimmenden Längenmaßen, die oft von Stadt zu Stadt wechselten, wodurch Übelstände entstanden, die desto fühlbarer wurden, je mehr der Verkehr und die Ansprüche der Wissenschaften sich steigerten.

Schon 1664 hat deshalb der holländische Physiker Huygens den Vorschlag gemacht, die Länge des einfachen Sekundenpendels als Längeneinheit zu wählen. Als 1791 die französische Nationalversammlung ein neues Maß- und Gewichtssystem einzuführen beschloß, dachte man auch zuerst an die Ausführung dieses Vorschlages, ging aber davon ab, um die Einheit der Länge nicht von der Zeitmessung abhängig zu machen. Die im März 1791 niedergesetzte Kommission, zu welcher die bedeutendsten Mathematiker und Physiker Frankreichs: Laplace, Lagrange, Borda, Delambre, Prony, Méchain und Lavoisier gehörten, beschloß vielmehr, den 10 millionsten Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridianquadranten als Längeneinheit zu wählen und zu diesem Zwecke eine neue Messung dieses Quadranten vorzunehmen. Dies geschah durch Delambre und Méchain 1792 bis 1798 auf dem Meridianbogen zwischen Dünkirchen und Montjouy bei Barcelona unter Benutzung der Toise, eines eisernen Maßstabes von 6 Pariser Fuß Länge, als damaliger Längeneinheit. Auf Grund dieser Messung wurde sodann am 25. Juni 1800 die Länge des neuen Maßes, des Meters, gesetzlich zu 0,513074 Toisen = 443,296 Pariser Linien festgestellt. Gleichzeitig wurde ein Stab aus Platin von 1 m Länge, 25 mm Breite und 4 mm Dicke, dessen Endflächen bei 0° genau den Abstand der neuen Längeneinheit haben sollten, sowie ein Platingewichtsstück von dem Gewichte eines Cubikdecimeters Wasser größter Dichte von der Kommission, welche durch fremde Gelehrte, wie Tralles und van Swinden, ergänzt worden war, der Regierung und dem gesetzgebenden Körper vorgelegt und im Archiv aufbewahrt.

Die Vorstellung, daß es bei einem etwaigen Verluste dieser Urmaße möglich sein werde, durch neue Messungen des Erdmeridians dieselben genau in derselben Größe wieder aufzufinden, ist begreiflicherweise eine illusorische, denn es ist zu erwarten, daß bei jeder solchen Messung, die sich aus sehr vielen Einzelmessungen zusammensetzt, ein etwas abweichendes Resultat sich ergeben werde. In der Tat beträgt nach Bessels Berechnungen die Länge des Erdquadranten 10000856, wenn man den Meterstab des Archivs = 1 setzt. Der letztere wäre demnach um 0,0856 mm, das ist ungefähr um eines Haares Dicke, zu kurz geraten.

Selbstverständlich wäre es ganz unausführbar und zwecklos, nach jeder neuen, genaueren Messung der Erde jedesmal das Längenmaß abzuändern. Als praktische Längeneinheit ist daher nicht der 10 millionste Teil des

[1]) Nach A. Böckh (Metrologische Untersuchungen usw., Berlin 1838) sollen die Babylonier und Ägypter und nach ihnen die meisten Völker des Altertums die Längenheit aus der Seite eines Würfels Wasser von bestimmtem Gewicht (1 Talent) abgeleitet haben; es ist dies gerade der umgekehrte Weg zu jenem, den man beim metrischen System eingeschlagen hat.

positiv, wenn das spezifische Gewicht des Körpers s kleiner ist als das der Gewichtsstücke, negativ für den umgekehrten Fall.

Nehmen wir an, wir hätten ein Kilogramm Wasser mit Gewichtsstücken aus Messing bei 760 mm Luftdruck und 15° C abgewogen. In diesem Falle ist $s = 1$, s' etwa $= 8$, $\frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)} = 0{,}00112\,g$, $\pi - \gamma = 0{,}980\,g$. Hier beträgt also die Korrektion beinahe ein Gramm.

Bei den genauesten Wägungen ist auch noch auf den jeweiligen Wasserdampf- und Kohlensäuregehalt der Luft Rücksicht zu nehmen.

§ 191. Der Luftballon. Auf dem Gewichtsverlust der rings von Luft umgebenen Körper beruht auch das Steigen des Luftballons. Ein Körper muß nämlich in der Luft aufsteigen, sobald sein Gesamtgewicht kleiner ist als das Gewicht eines gleichen Volumens der umgebenden atmosphärischen Luft.

Fig. 584.



Einen solchen Körper kann man aber herstellen, wenn man eine entsprechende Hülle mit einem Gase füllt, welches leichter ist als die Luft. Eine solche Vorrichtung wird ein Luftballon genannt.

Die Brüder Montgolfier konstruierten einen großen Ballon von gefirnißtem Papier oder Taffet, welcher unten eine Öffnung von ungefähr 1 m Durchmesser hatte. In einiger Entfernung unter dieser Öffnung war ein Korb von Metalldraht angehängt, welcher mit brennenden Stoffen gefüllt war. Durch die Verbrennung derselben wird eine Menge warmen, leichten Gases gebildet, welches aufsteigt und bald den ganzen Ballon anfüllt. Sobald das warme Gas im Ballon samt der Hülle und allem, was daran hängt, leichter ist als die verdrängte Luftmenge, muß der Ballon steigen; er nimmt den brennenden Körper, der ihm die Steigkraft verleiht, mit in die Höhe. Der Ballon muß so lange steigen, bis er in eine Höhe kommt, in welcher die Luft schon so verdünnt ist, daß das Gewicht des Ballons dem der verdrängten Luftmenge gleich ist. Der erste Luftballon dieser Art, welche man Montgolfiere nennt, stieg zu Anonay den 5. Juni 1783.

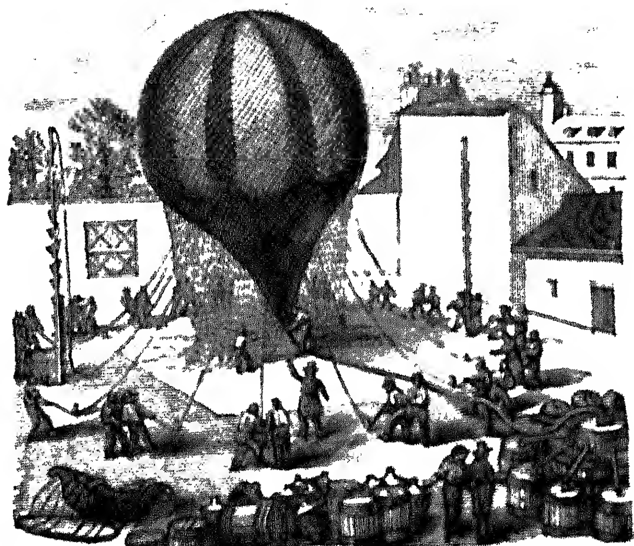
Am 19. September desselben Jahres ließ Montgolfier in Gegenwart des Königs zu Versailles einen Luftballon steigen, an welchem ein Käfig mit einem Schaf, einem Hahn und einer Ente angehängt war. Pilatre de

Rozier und der Marquis von Arlandes unternahmen mit einer Montgolfière, welche in Fig. 584 abgebildet ist, am 21. November 1783 die erste Luftfahrt.

Der Physiker Charles zu Paris hatte den glücklichen Gedanken, zur Füllung des Luftballons Wasserstoffgas statt der erwärmten Luft anzuwenden, von welchem Cavendish bereits im Jahre 1766 nachgewiesen hatte, daß sein spezifisches Gewicht beinahe 14 mal geringer ist als das der atmosphärischen Luft.

Den ersten mit Wasserstoffgas gefüllten Ballon ließ Charles am 27. August 1783 steigen, und am 1. Dezember 1783 stieg er mit einem solchen 500 cbm Wasserstoffgas haltenden, von Robert begleitet, in die Luft. In wenigen Minuten hatten sie eine Höhe von 3000 Fuß erreicht und legten in diesen Regionen einen Weg von fünf Meilen in zwei Stunden zurück. Charles stieg in den Tuilerien auf. Die ganze Bevölkerung von Paris war in Bewegung. Alle öffentlichen Plätze, alle hochliegenden Orte waren mit Zuschauern bedeckt. Ein Kanonenschuß gab das Signal der Abfahrt, und

Fig. 585.



man sah den Ballon sich wie ein Meteor am Horizont erheben. Hoch in den Lüften sah man noch die flatternden Fähnchen, von der Sonne beleuchtet, und die Schiffer, welche ruhig die Erde grüßten. Nie hat wohl ein physikalisches Experiment solche allgemeine Bewunderung erregt.

In der Schlacht bei Fleurus am 26. Juni 1794 bedienten sich die Franzosen eines Luftballons, um die Bewegungen der Österreicher zu beobachten. Im Jahre 1804 unternahmen Gay-Lussac und Biot eine Luftfahrt zu wissenschaftlichen Zwecken, bei welcher sie eine Höhe von 4000 m erreichten. Eine zweite Fahrt unternahm Gay-Lussac allein und erreichte eine Höhe von 7000 m, die größte Höhe, zu der bis dahin ein Mensch gelangt war. In einer solchen Höhe fühlte man eine empfindliche

Gay-Lussacs Thermometer zeigte —10° C, während am Boden eine Hitze von 30° C war. Die Luft war so trocken, daß die hygroskopischen Körper rasch ihre Feuchtigkeit verloren, der Himmel erschien sehr dunkelblau. Nach einer Fahrt von sechs Stunden hatte Gay-Lussac in horizontaler Richtung einen Weg von 15 Meilen zurückgelegt und sank in der Nähe von Rouen langsam nieder.

Fig. 585 stellt einen Luftballon dar, welcher eben mit Wasserstoffgas gefüllt wird.

Neuerer Zeit erfolgt diese Füllung bei den Millitärballons, die meist nur als Fesselballons gebraucht werden, aus mitgeführten stählernen Behältern, in denen das Wasserstoffgas auf 100 Atmosphären oder mehr komprimiert ist. Sonst werden jetzt die meisten Luftballons mit Leuchtgas aus einer in der Nähe befindlichen Gasanstalt gefüllt.

Um den Ballon in vertikaler Richtung zu lenken, wird er am oberen Ende mit einem Ventil und außerdem mit einem Vorrat von Ballast aus Sandsäcken ausgerüstet. Auswerfen von Ballast macht den Ballon steigen, Öffnen des Ventils sinken. Wenn in verschiedenen Höhen die Windrichtung eine verschiedene ist, so kann auf diese Weise indirekt auch die Fahrtrichtung beeinflußt werden.

Die Gefahren der Luftschiffahrt treten insbesondere beim Aufsteigen und noch mehr beim Landen auf, wenn der Ballon mit der Gondel durch die Luftströmung gegen Dächer, Schornsteine oder Baumkronen geschleudert wird. Um sicherer landen zu können, wird ein Anker ausgeworfen, der aber auch oft Unheil anrichtet. Durch Anbringung einer Reißleine, bei deren Anziehen der Ballon zerrissen und dadurch rasch zur Entleerung und zum Sinken gebracht wird, ist diese Gefahr vermindert worden. In großen Höhen bläht sich der Ballon infolge des geringen äußeren Druckes auf und würde zerplatzen, wenn er von Anfang an ganz stramm gefüllt wäre.

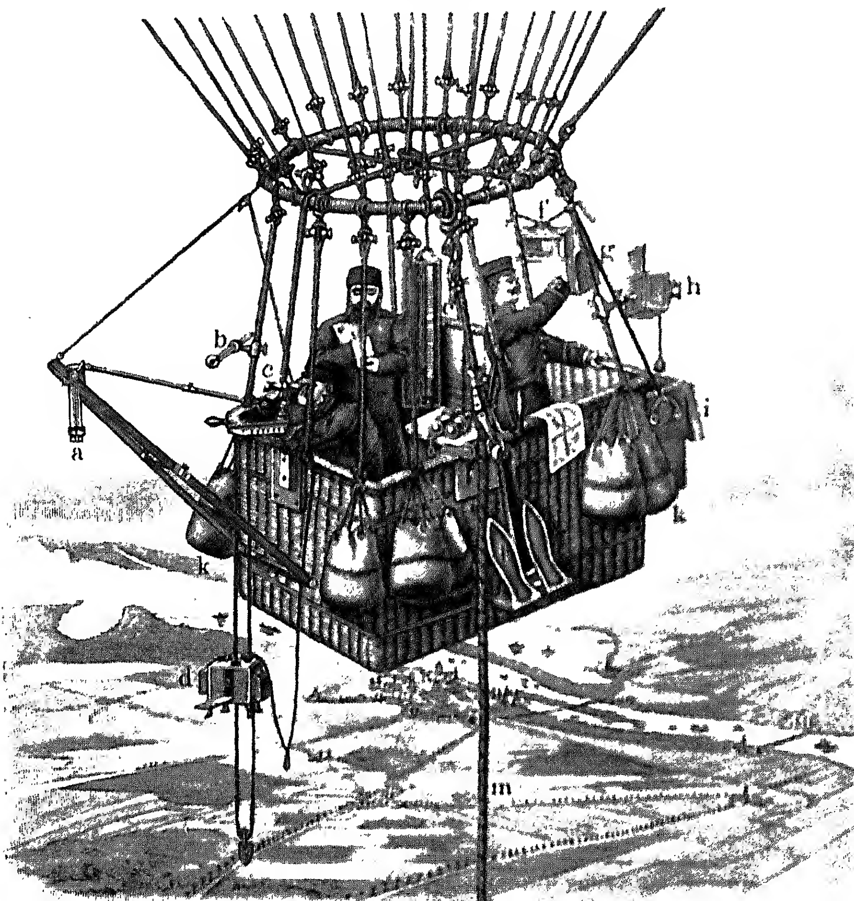
Eine andere Gefahr besteht in der physiologischen Wirkung der großen Luftverdünnung in bedeutenden Höhen, worüber wir an anderer Stelle gesprochen haben. Auch die außerordentliche Kälte bildet eine Gefahr. Als 1862 der berühmte englische Luftschiffer Glaisher mit Coxwell von Wolverhampton aus bis zu 8000 m anstieg, wurde er schwach, und bei 9900 m fiel er ohnmächtig auf den Rücken. Coxwell wollte nun das Ventil öffnen, erfror aber hierbei die Hände und mußte mit den Zähnen die Leine ziehen, worauf der Ballon zu sinken begann. Der Ballon soll eine Höhe von 11 000 m erreicht haben, wie aus dem Drucke der Luft von 18 cm berechnet wurde. Beim Landen kommt noch die Gefahr hinzu, daß das ausströmende Gas durch elektrische Funkenentladungen entzündet und zur Explosion gebracht werden kann. Die zahlreichen Bemühungen, den Luftballon in wagerechter Richtung lenkbar zu machen, haben bisher noch nicht zum vollen Erfolge geführt.

Praktischen Nutzen hat die Luftschiffahrt bisher nur im Dienste der wissenschaftlichen Erforschung und im Kriege (Beobachtung des Feindes, Entweichen aus belagerten Plätzen) gebracht.

Die Abbildung Fig. 586, entnommen dem Buche „Moderne Luftschiffahrt“ von Dr. Fr. Linke, zeigt die Gondel eines zu wissenschaftlichen Untersuchungen ausgerüsteten Ballons. *a* ist ein Aspirationspsychrometer,

welches mittels des Fernrohrs c beobachtet wird. b ist ein Thermometer zur Messung der Intensität der Sonnenstrahlung, d ein Aspirationsthermograph,

Fig. 586.



e ein Quecksilber-, g ein Aneroidbarometer, f ein registrierendes Barometer, h ein photographischer Apparat, i ein Instrumentenkoffer, K, k sind Säcke mit Ballast, l ein Anker, m ein Schlepptau.

Tragkraft des Luftballons.

Bezeichnen wir mit

- R den Radius des Ballons in Metern,
- h das Gewicht des Stoffes der Hülle pro Quadratmeter in Kilogrammen,
- l das Gewicht eines Kubikmeters Luft in Kilogrammen,
- s das Gewicht eines Kubikmeters des Füllgases in Kilogrammen,

so beträgt der Auftrieb des Ballons

$$A = \frac{4 \pi R^3}{3} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

das Gewicht des Ballons beträgt

$$P = \frac{4\,\pi\,R^3}{3}\,s + 4\,\pi\,R^2 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Tragkraft berechnet sich demnach

$$T = A - P = \frac{4\,\pi\,R^3}{3}\,(l - s) - 4\,\pi\,R^2 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Man kann annehmen, daß 1 m³ Luft rund 1,2 kg wiegt, und daß die Gasfüllung pro m³ für die Montgolfiere ²/₃, für Leuchtgas ¹/₄, für ungereinigtes Wasserstoffgas ¹/₇ davon betrage.

Beispiele: Ein Ballon von Seidenpapier von 1 m Halbmesser, der durch Anheizen mit Luft von etwa 93⁰ gefüllt ist, hat pro Quadratmeter Hülle ein Gewicht $h = 0{,}025$ kg; $l - s = 1{,}2 \cdot {}^2/_3 = 0{,}8$ kg

$$T = \frac{4\,\pi}{3} \cdot 1^3 . 0{,}8 - 4\,\pi . 1^2 . 0{,}025 = 1{,}672 - 0{,}314 = 1{,}358 \text{ kg}.$$

Ein mit Leuchtgas gefüllter Ballon aus Taffet, dessen Hülle pro Quadratmeter 0,15 kg wiegt, habe 5 m Radius, $l - s = 1{,}2 . {}^3/_4 = 0{,}9$

$$T = \frac{4\,\pi}{3} \cdot 125 . {}^3/_4 - 4\,\pi . 25 . 0{,}15 = 470 . 25 - 47 . 10 = 423{,}15 \text{ kg}.$$

Dieser Ballon könnte also leicht vier Personen und überdies 100 kg Ballast tragen. Die gewöhnlichen Luftballons haben gegen 3 m Radius und tragen dann zwei Personen nebst Ballast.

§ 192. Widerstand der Flüssigkeiten und Gase. Wenn ein fester Körper in einer Flüssigkeit oder in einem Gase bewegt werden soll, so muß er notwendig mehr oder weniger Flüssigkeits- oder Luftteilchen vor sich herschieben und auf die Seite treiben, und dadurch wird stets ein Teil der beschleunigenden Kraft verzehrt, welche auf den festen Körper wirkt; kurz Flüssigkeiten und Gase üben einen Widerstand gegen die Bewegung fester Körper innerhalb ihrer Masse aus.

Die Größe dieses Widerstandes hängt ab

1. von der Größe des Querschnittes des bewegten Körpers,
2. von der Geschwindigkeit desselben,
3. von der Form desselben.

Der Satz 1. sagt, daß ein und derselbe Körper bei gleicher Geschwindigkeit bald mehr, bald weniger Widerstand zu überwinden hat, je nachdem er mit seiner breiten oder mit seiner schmalen Seite gegen die Luft oder das Wasser stößt, wovon man sich leicht mit Hilfe eines etwas breiten hölzernen Lineals überzeugen kann.

Den Einfluß des Querschnittes kann man auch mit Hilfe des Apparates (Fig. 587) nachweisen. Die Umdrehung der horizontalen Achse xx wird durch ein Gewicht bewerkstelligt, welches an einer um die Spule s geschlungenen Schnur hängt; die Windflügel w können nach Belieben so gestellt werden, daß ihre Oberfläche rechtwinkelig zur Achse xx oder daß sie parallel mit ihr steht. Unsere Figur zeigt die letztere dieser beiden Stellungen. In der ersten Stellung durchschneiden die Windflügel gleichsam die Luft, und es erfolgt eine rasche Rotation; im letzteren Falle aber, wo sie mit

ihrer vollen Breite gegen die Luft drücken, ist der zu überwindende stand so bedeutend, daß nur eine langsame Umdrehung erfolgt.

Der verzögernde Einfluß des Luftwiderstandes (oder Wasserwiders ist um so bedeutender, je größer der Querschnitt des zu bewegenden im Vergleich zu der beschleunigenden Kraft ist, welche ihn treibt. bewirken, daß ein Körper in der Luft langsam fällt, hat man nur d sorgen, daß er bei gleicher Masse einen möglichst großen Querschnit Eine Seifenblase fällt langsamer als ein Wassertropfen von gleichem Auf diesem Umstande beruht auch das langsame Fallen einer Flau die Wirkung des Fallschirmes, Fig. 588 und 589 usf.

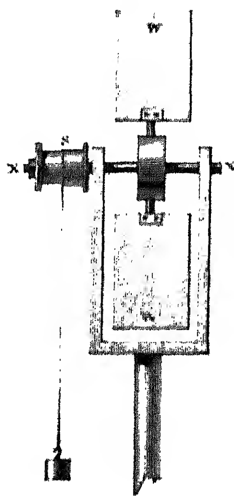


Fig. 587.

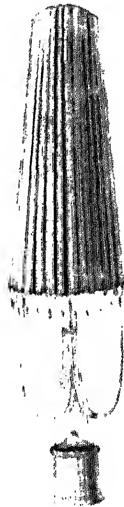

Fig. 588.


Fig. 589.

Je mehr man einen Körper verkleinert, desto langsamer wird Wasser oder in der Luft fallen, weil bei der Verkleinerung seine Mas auch die beschleunigende Kraft, welche ihn niedertreibt, in weit ra Verhältnis abnimmt als sein Querschnitt. Betrachten wir z. B. ein von Kreide, welche 1 mm im Durchmesser hat, so wird dieselbe mi bestimmten Geschwindigkeit im Wasser sinken; ein Kreidekugelche welches nur $^1/_{10}$ mm Durchmesser hat, wiegt 1000 mal weniger, di welche es fallen macht, ist also 1000 mal geringer, während sein Que nur 100 mal geringer ist als der Querschnitt einer 1 mm dicken Für die kleine Kugel ist also, wenn dieselbe im Wasser fällt, der stand des Wassers im Vergleich zur beschleunigenden Kraft, wel niedertreibt, 10 mal größer als für die große Kugel, die kleine Kug also auch weit langsamer fallen als die große. Dieser Umstand erklä wie es kommt, daß ganz fein zerteilte Substanzen, wie Kreidepulver, teilchen, welche das Wasser trüben, sehr lange in demselben suspendiert und sich nur sehr langsam absetzen; er erklärt ferner, wie es komm feine Stäubchen, Nebelbläschen usw. in der Luft schweben.

Untersuchen wir nun, in welcher Beziehung der Luft- und widerstand zur **Geschwindigkeit** der bewegten Körper steht.

Während bei den festen Körpern der Widerstand der Reibung von der ieschwindigkeit des über einen anderen hingleitenden Körpers nahezu unabängig ist, wächst der Widerstand der Flüssigkeiten und Gase, wenn die eschwindigkeit der in ihnen sich bewegenden Körper zunimmt, und zwar in inem weit rascheren Verhältnis als diese Geschwindigkeit selbst, wie sich us folgender Betrachtung ergibt:

Wenn ein Körper sich mit der doppelten, mit der dreifachen Geschwinigkeit bewegt, so muß er in gleicher Zeit nicht allein die doppelte, die dreiache Luft- oder Wassermasse aus dem Wege räumen, sondern auch den ausrer Stelle getriebenen Partikelchen die doppelte, die dreifache Geschwindigeit mitteilen; daraus schloß Newton, daß der fragliche Widerstand im Verältnis des Quadrats der Geschwindigkeit zunehme.

Es ist dies jedoch nur eine erste Annäherung; in der Tat wächst der Viderstand der Flüssigkeiten und Gase in einem noch etwas rascheren Verältnis.

Da nun für einen mit beschleunigter Geschwindigkeit fallenden Körper er Luftwiderstand so rasch zunimmt, so muß nach einiger Zeit notwendig ieser Widerstand so groß werden, daß er der beschleunigenden Kraft das leichgewicht hält, und von diesem Augenblick an fällt der Körper mit leichförmiger Geschwindigkeit.

Dieser Zeitpunkt, in welchem infolge des Luftwiderstandes die bechleunigte Bewegung des fallenden Körpers in eine gleichförmige übergeht, nuß notwendig um so eher eintreten, je größer sein Querschnitt im Vergleich seinem Gewichte ist. Eine Seifenblase, eine Flaumfeder, Schneeflocken usw. hen wir sofort mit gleichförmiger Geschwindigkeit sinken. — Auch die Regenropfen dürften wohl mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fallen, welche ei weitem geringer ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher sie auf dem oden ankommen würden, wenn ihr Fall nicht durch den Luftwiderstand erzögert worden wäre. Ein Wassertropfen, der von einer Höhe von 1000 m erabgefallen ist, müßte ohne eine solche Verzögerung mit der enormen Gechwindigkeit von 140 m aufgeschlagen, während die Fallgeschwindigkeit er Regentropfen schwerlich viel größer ist als 10 m in der Sekunde.

Wie durch den Luftwiderstand eine beschleunigte Bewegung sehr bald eine gleichförmige übergeführt werden kann, läßt sich auch mit Hilfe des chon oben beschriebenen Apparates (Fig. 587) nachweisen. Der Windlügel bedient man sich auch, um einen gleichförmigen Gang der Uhrwerke u erzielen, welche die Umdrehung der größeren Äquatorealinstrumente m ihre Hauptachse besorgen. Durch eine Pendeluhr könnte diese Umrehung nur stoßweise erfolgen.

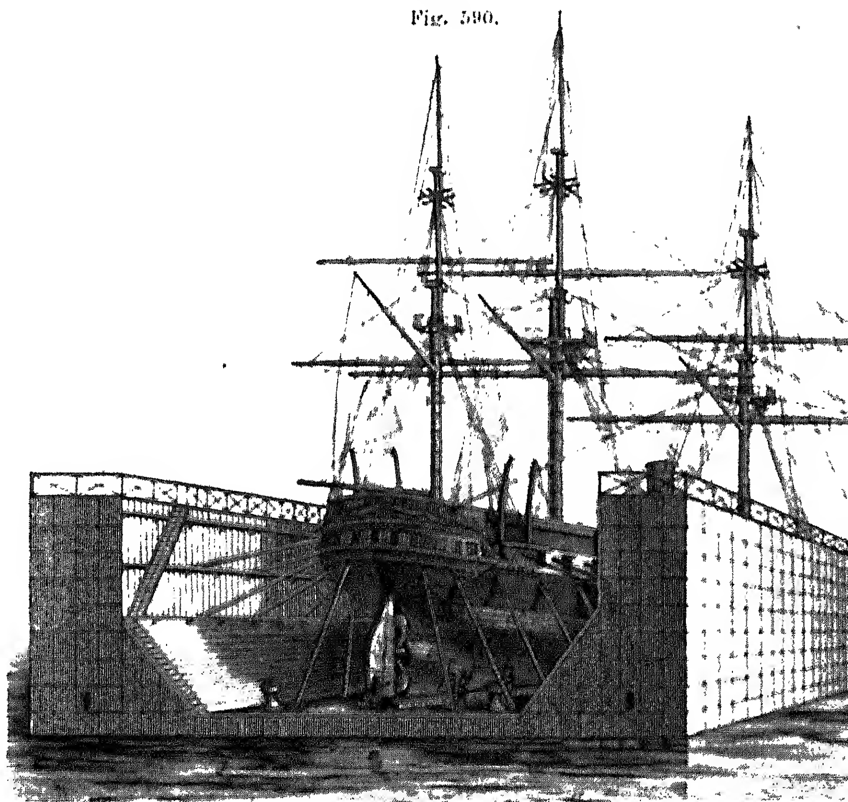
Daß endlich bei gleichem Querschnitt der Widerstand sowohl in Flüssigeiten als in Gasen von der Form abhängig ist, lehrt ebenso die Überlegung s die Erfahrung. Man läßt das Vorderende der Schiffe in eine spitzige ante auslaufen, gibt den Geschossen die Form eines Zylinders mit Kegelpitze usw. Konkave Flächen bieten größeren Widerstand als ebene und iese größeren als konvexe. Versucht man z. B. einen aufgespannten Regenchirm mit der konkaven Fläche gegen die Luft zu bewegen, so verspürt an viel größeren Widerstand als bei umgekehrter Stellung. Hierauf beruht uch die Anwendung des Robinsonschen Windmessers, der in dem meteoologischen Abschnitt beschrieben werden soll.

§ 193. Anwendung des Wasser- und Luftwiderstandes.

so wie die Reibung den Füßen des Pferdes den festen Stützpunkt v dessen es bedarf, um eine Last fortzuziehen, so bietet auch der Wid des Wassers dem Ruder, der Schiffsschraube einen, wenn auch nicl kommen festen Stützpunkt, durch welchen es möglich wird, den Kal das Dampfschiff auf dem Wasser fortzubewegen.

Die Wirkungsweise des Ruders bedarf wohl kaum einer weiter läuterung, da es sich ja hier nicht darum handelt, die Größe des Nutz

Fig. 590.



zu ermitteln, welche man mit diesen Vorrichtungen erreicht. Fast leicht ist die Wirkungsweise der Schiffsschraube zu übersehen, von dem Schweizer Daniel Bernoulli 1752 erdacht, von dem Amer Stevens um 1800, dann von dem Österreicher Jos. Ressel 1826 praktisch ausgeführt wurde und in neuerer Zeit eine große Bedeutu Dampfschiffe gewonnen hat.

Wenn die Umdrehungsachse einer frei beweglichen, ganz in Wass getauchten Schraube eine horizontale Lage hat, so muß eine rasche tion um diese Achse notwendig eine fortschreitende Bewegung in horiz Richtung bewirken, wie dies in der Tat bei den Schraubendampfsc der Fall ist.

Die Schiffsschraube besteht aber in der Regel nicht aus Schraubenf welche einen zusammenhängenden ganzen Umgang bilden, sondern a

elnen Flügeln, deren jeder ein Stück einer Schraubenfläche bildet, und zwar erden die Schiffsschrauben meist nur aus zwei, oder auch aus drei oder vier olcher Flügel gebildet.

Die Achse der Schiffsschraube, welche unmittelbar vor dem Steuerruder ngebracht ist, und welche sich ganz unter Wasser befindet, ist dem Kiele, lso der Längsachse des Schiffes, parallel, und ihre Umdrehung wird durch ne Dampfmaschine bewerkstelligt. Fig. 590, welche die hintere Ansicht ner gedeckten Schraubenkorvette in einem schwimmenden Dock darstellt, eigt, wie die (hier zweiflügelige) Schraube zwischen dem Hinterteil des chiffes und dem Steuerruder angebracht ist, und läßt auch die Größenerhältnisse der Schraube erkennen.

Für Kriegsschiffe liegt der Hauptvorteil der Schraube vor den Schaufeldern der älteren Dampfschiffe darin, daß sie den feindlichen Kugeln nicht) ausgesetzt ist und daß die ganze Breitseite des Schiffes mit Geschützen esetzt werden kann.

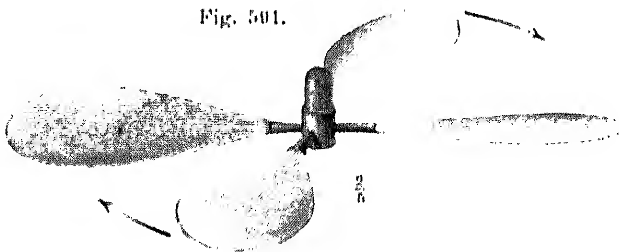
Je nach der Richtung, in welcher die Schraube umgedreht wird, geht as Schiff vorwärts oder rückwärts.

Der 1829 nach Ressels Angaben in Triest gebaute Schraubendampfer lieb trotz guten Erfolges unbeachtet.

Das erste größere Schraubenschiff „Archimedes", welches der Engnder Smith im Jahre 1838 konstruierte, hatte eine Schraube, welche nur us einer einzigen Windung von 360° bestand. Neuestens werden größere ampfer mit zwei getrennten, dem Kiel parallel gestellten Schrauben auserüstet.

Daß auch die Luft Widerstand genug darbietet, um in ähnlicher Weise 'e Fortbewegung eines Gegenstandes durch sie zu bewerkstelligen, beweist

Fig. 591.



er Flug der Vögel und kann mit dem bekannten Kinderspielzeug, das unter em Namen des Fliegers oder Spiralifer bekannt ist, leicht demonstriert erden. An einem kurzen aus Blech gemachten Zylinder (Fig. 591) sind ier Flügel befestigt; dieselben sind nun sämtlich etwas gegen die Ebene eneigt, welche rechtwinklig auf der Achse des zentralen Zylinders steht; der dieser Flügel bildet also ein Stück einer sehr schwach aufsteigenden n den zentralen Dorn gelegten Schraubenfläche. Diese Vorrichtung wird un in die Gabel der Rotationsvorrichtung *AB* (Fig. 592) gelegt. Den andgriff *B* hält man in der linken Hand, während man durch rasches Abehen einer Schnur, welche um den oberen, um seine vertikale Achse drehären Teil gewunden ist, diesen in rasche Rotation versetzt. Diese Rotation eilt sich auch dem Flieger mit, der sich nun infolge derselben in der Luft leichsam hinaufschraubt und eine ziemlich bedeutende Höhe erreichen kann.

Wenn man den Versuch im Zimmer anstellt, so steigt der Flieger bis an die Decke, an welcher er so lange verweilt, bis die Rotationsgeschwindigkeit so weit abgenommen hat, daß sie ihn nicht mehr in der Luft zu erhalten vermag.

Fig. 592.

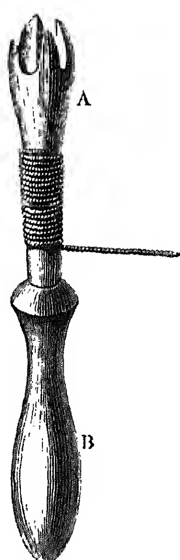


Fig. 593.

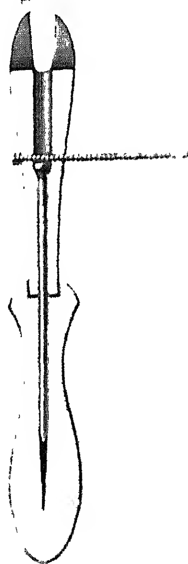


Fig. 593 zeigt einen Durchschnitt der Vorrichtung, durch welche man den Flieger in Rotation versetzt. Das Experiment gelingt am leichtesten, wenn man die Schnur zuerst entgegengesetzt aufwickelt und durch rasches Abziehen den Apparat so in Rotation versetzt, daß sich die Schnur nachher von selbst aufwickelt. Beim neuerlichen Abziehen steigt dann der Flieger in die Höhe.

Bei den künstlichen Fledermäusen, welche in den Spielwarenhandlungen verkauft werden, wird die Kraft eines zusammengedrehten Kautschukfadens zur Drehung der Schraubenflügel verwendet.

In neuester Zeit hat man mit mehr oder minder Erfolg versucht, Ballons, die sonst nur ganz der Bewegung der umgebenden Luft folgen, dadurch in derselben vorwärts zu treiben und damit dann auch lenkbar zu machen, daß man Schraubenflügel, wie Fig. 591 in großem Maßstabe, welche durch leichte Motoren in rasche Drehung versetzt wurden, an geeigneten Stellen nebst einer Art Steuerruder anbrachte.

Nachtrag zu § 34 und § 15.

Nach während des Druckes erhaltener Nachricht hat die definitive Bestimmung der Masse eines Liters Wasser im internationalen Bureau ergeben, daß dieselbe um viel weniger (0,026 bis 0,0257 mg im minus von der Masse eines Kilogramms abweicht, als bisher vermutet wurde. Ferner wurde der von England ausgegangene Vorschlag, für das Milliliter, d. i. das Volum von 1 g Wasser die Bezeichnung Mil zu wählen, angenommen. Die Unterabteilungen 0,1 Mil und 0,01 Mil werden demgemäß mit decimil und centimil bezeichnet.

Erdquadranten, sondern die Länge des Platinstabes im Archiv zu Paris bei 0° C zu definieren.

Leider hat sich später herausgestellt, daß dieser Platinstab nicht geeignet sei, um genaue Kopien von dem selben anzufertigen. Als daher auf der zweiten Konferenz der Mitglieder der Europäischen Gradmessung in Berlin 1867 beschlossen wurde, für alle europäischen Länder das Meter als Längeneinheit einzuführen, wurde auch der Plan gefaßt, an Stelle des alten einen neuen zweckmäßigeren Urmeter, dessen Länge von jener des *Mètre des Archives* möglichst wenig abweichen sollte, und zur Anfertigung und Vergleichung der für die verschiedenen Länder bestimmten Kopien eine internationale Kommission zu bestellen.

Dieser von den Franzosen anfangs mit Mißtrauen aufgenommene Vorschlag kam dann endlich nach vielen Verhandlungen und trotz den durch den deutsch-französischen Krieg verursachten Störungen in erweitertem Maße zur Ausführung, indem auch die Herstellung des neuen Normalkilogramms der von einer Konferenz von 1870 gewählten, 1872 in Paris zusammengetretenen internationalen Komitee für Maß und Gewicht übertragen wurde.

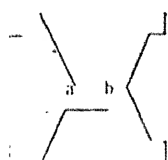


Fig. 41.

Da das Platin sich als zu weich erwiesen hatte, so wurde auf Vorschlag von St. Claire Deville beschlossen, die neuen Meter und Kilogramme aus einer Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium, welche sich durch große Härte auszeichnet, herzustellen. Da ferner der frühere Platinstab wegen seiner geringen Querschnittsdimensionen biegsam war, so wurde für die neuen Meterstäbe eine Form gewählt, deren Querschnitt aus Fig. 41 in natürlicher Größe ersichtlich ist. Die Länge dieser Stäbe wurde 102 cm gewählt und die Länge eines Meters durch feine Endstriche auf der mit *ab* bezeichneten Fläche markiert.

Diese Form bietet mehrfache Vorteile dar, sie erleidet nur eine geringe Biegung zu und gestattet die Anbringung der Endstriche auf der sogenannten neutralen Schicht *ab*, welche bei der Biegung keine Längenänderung erleidet. Außerdem nimmt ein solcher Stab sehr rasch die Temperatur der Umgebung an.

Die erwähnten Endstriche sind von je zwei [illegible] stehenden parallelen Hilfsstrichen von 6 mm [illegible] behufs Auswertung der Mikrometer des Meßmikroskops beim Komparator. Die drei Querstriche werden von zwei Längsstrichen in [illegible] durchschnitten, deren Mitte die Stellen der Querstriche bestimmen, zwischen denen die Länge bei 0° ein Meter betragen soll. Solche Maßstäbe mit Endstrichen (*Etalons à traits*) sind jenen mit Endflächen (*Etalons à bouts*) vorzuziehen, weil letztere durch den Gebrauch abgenutzt und ungenau werden, selbst wenn diese Endflächen aus harten Edelsteinen hergestellt sind.

Die französische Sektion der internationalen Kommission, welche die Herstellung der neuen Prototypen des Meters übernommen hatte, kam zwar im Frühjahr 1874 dazu, aus einer auf einmal geschmolzenen Masse von 250 kg Platin-Iridium durch Ausschmieden, Walzen, Hobeln usw. eine Anzahl von Stäben der oben angegebenen Form herzustellen, welche aber wegen eines Eisengehalts von ungefähr 2 Proz. von dem internationalen Komitee nicht angenommen wurden.

ZWEITES BUCH.

DIE AKUSTIK.

Erstes Kapitel.

Von den Schallwellen.

§ 194. Begriff des Schalles und seiner Arten, Fundamentalversuche über seine Entstehung und Fortpflanzung. Die Akustik ist derjenige Teil der Physik, welcher sich mit jenen Vorgängen beschäftigt, die wir mit dem Gehör wahrnehmen. Die Gesamtheit dieser Gruppe von Sinneseindrücken fassen wir unter dem Worte Schall zusammen. Wir unterscheiden jedoch darunter einzelne Arten, die wir durch die Bezeichnungen Geräusch, Knall, Ton, Klang usw. näher charakterisieren. Unter Geräusch verstehen wir einen unregelmäßigen, unter Knall einen momentanen Schall, Ton und Klang sind regelmäßige (periodisch organisierte) Schallarten, welche auch in der Musik gebraucht werden. Wie wir später hören werden, ist Ton ein solcher Schall, welcher vom Gehör als einfache Empfindung wahrgenommen wird, Klang dagegen ist als eine Zusammensetzung von Tönen zu betrachten. Die musikalisch gebrauchten „Töne" sind fast ausnahmslos nicht einfache physikalische Töne, sondern Klänge.

Über die Entstehung und Verbreitung des Schalles hatten die alten Griechen nur sehr mangelhafte Vorstellungen. Allerdings war man schon in den ältesten Zeiten der Meinung, daß der Schall durch irgend eine Bewegung des tönenden Körpers erzeugt und durch eine entsprechende Bewegung der Luft bis zum Ohre fortgepflanzt werde; was aber die Art dieser Bewegung betrifft, so begnügte man sich mit den vagsten Ideen, wie dies unter anderen aus verschiedenen Stellen der Schriften des Aristoteles hervorgeht.

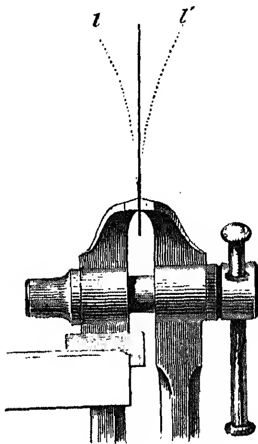
Besser schon sind die Erklärungen Vitruvs, welcher bereits ganz richtig die Verbreitung der Schallwellen mit der Verbreitung der Wasserwellen vergleicht. Aber erst Newton hat in seinem unsterblichen Werke: *Philosophiae naturalis principia mathematica* eine richtige Definition der Schallwellen und ihrer Verbreitung gegeben.

Der Schall entsteht durch eine schwingende Bewegung elastischer Körper; durch eine solche Schwingungsbewegung werden in der umgebenden Luft abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen erzeugt, welche die Schwingungsbewegung bis zu unserem Ohr fortpflanzen und, hier den entsprechenden Nervenapparaten mitgeteilt, die Schallempfindung hervorrufen.

Suchen wir dies noch etwas anschaulicher zu machen! Wenn irgend ein elastischer Körper, z. B. ein elastischer Stahlstreifen, Fig. 594, dessen eines Ende fest eingeklemmt ist, aus seiner Gleichgewichtslage herausgebogen

und sich selbst überlassen wird, so schwingt er eine Zeitlang mit mehr oder minder großer Geschwindigkeit zwischen zwei Grenzlagen hin und her, wie dies in unserer Figur angedeutet ist. Indem sich nun das obere Ende des Stahlstreifens rasch von l bis l' bewegt, werden die zunächst rechts von ihm liegenden Luftschichten gleichfalls nach der rechten Seite hingetrieben, und dadurch entsteht hier eine Verdichtung der Luft. Indem aber die komprimierte Luft sich infolge ihrer Elastizität wieder ausdehnt, übt sie einen Stoß auf die zunächst folgenden Luftschichten aus, und so wird die ursprünglich vom schwingenden Körper ausgehende Bewegung, wie später noch ausführlicher nachgewiesen werden soll, der Reihe nach von einer Luftschicht zur anderen übertragen, und die Verdichtung, welche der schwingende Körper zunächst nur in den benachbarten Schichten hervorgebracht hatte, pflanzt sich infolgedessen mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fort.

Fig. 594.



Während nun so die Verdichtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortpflanzt, schwingt der Körper in seine Grenzlage zur Linken zurück; dadurch werden nun die zunächst rechts vom Stahlstreif befindlichen Luftschichten gleichfalls nach der Linken gerissen, es entsteht rechts vom Stahlstreif eine Luftverdünnung, die sich in gleicher Weise verbreitet wie vorher die Verdichtung, indem nun die aufeinander folgenden Luftschichten der Reihe nach ihre Schwingungsbewegung nach der linken Seite hin ausführen.

So erzeugt denn jede vollständige Schwingung des tönenden Körpers, d. h. jede hin und her gehende Bewegung desselben eine neue Verdichtung

Fig. 595.



und eine ihr folgende Verdünnung, welche alle mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitend sich in gleichen Zwischenräumen einander folgen, wie dies durch Fig. 595 anschaulich gemacht werden soll, wo die Verdichtungen, welche von der etwa durch den Anschlag eines Hammers zum Tönen gebrachten Glocke ausgehen, durch dunklere Schattierung angedeutet sind.

In der Optik werden wir einen von A. Töpler erfundenen Apparat (Schlierenapparat) beschreiben, mittels welchem diesem Physiker das höchst interessante Experiment gelungen ist, die durch einen elektrischen Funken entstandenen und durch einen zweiten Funken beleuchteten Schallwellen direkt sichtbar zu machen.

Es ist wichtig, von Anfang an die unrichtige Vorstellung zurückzuweisen, als ob bei der Fortpflanzung des Schalles vom Schall erregenden Körper bis ins Ohr die Luftteilchen diesen Weg mit zurücklegen würden. Dies ist durchaus nicht der Fall; die Luftteilchen bleiben vielmehr, von ihrer geringen Schwingung abgesehen, im wesentlichen an Ort und Stelle. Man kann dies experimentell nachweisen, indem man die den Schallerreger umgebenden Luftteilchen durch Rauch sichtbar macht. So pflanzt sich z. B. der Schall eines Geschützes viele Kilometer weit fort, während der gleichzeitig entstandene Pulverrauch nur wenige Meter weit fortgeschleudert wird. Würden die vor der Mündung der Kanone befindlichen Luftmassen mit dem Schalle gleich schnell sich fortbewegen, so würde der Rauch mit fortgetragen werden und es müßte durch die Luftbewegung ein Orkan von sonst nie beobachteter Stärke entstehen.

Ein anderer Nachweis hierfür folgt aus der wichtigen Tatsache, daß nicht allein die Luft, sondern alle mehr oder minder elastischen materiellen Medien den Schall fortzupflanzen vermögen, also auch die festen Körper, bei denen von einem Fortbewegen ihrer Teilchen mit dem Schalle überhaupt nicht die Rede sein kann.

Im Wasser pflanzt sich der Schall sehr gut fort, die Taucher hören, was am Ufer gesprochen wird, und am Ufer hört man deutlich, wenn in großen Tiefen zwei Steine aneinander geschlagen werden.

Als Vorlesungsexperiment zum Nachweise der Schalleitung flüssiger Körper eignet sich das folgende. Eine Stimmgabel, deren Stiel in ein Stück Holz eingeschraubt ist, wird angeschlagen, und nachdem sie beinahe ausgeklungen, mit dem Holze in ein Glas Wasser getaucht, das auf dem Tische steht. Sofort wird der Ton der Stimmgabel wieder hörbar. Die Stimmgabel muß hierbei am Stiele gehalten werden.

Um die Schalleitung in festen Körpern zu zeigen, kann man zunächst die angeschlagene Stimmgabel mit dem Stiele auf den Tisch aufstemmen, wodurch ihr Ton sofort stärker hörbar wird. Ein anderer auffälliger Versuch ist folgender: Man legt eine Taschenuhr auf einen gepolsterten Sessel und bedeckt sie mit mehrfachen Lagen eines Tuches. Man wird dann ihr Ticken kaum hören. Stellt man nun aber einen hölzernen Stab direkt auf das Uhrgehäuse, so hört man das Ticken, wenn man auch die Uhr selbst sorgfältig einhüllt, und zwar kommt der Ton vom oberen Teile des Stabes. Derselbe wird bedeutend stärker, sobald man auf das obere Ende des Stabes ein größeres Brettchen von gut getrocknetem Holze auflegt, da nun die Zahl der Stellen, wo der Schall in die Luft übergeht, vermehrt wird. Man kann endlich noch eine sehr lange horizontale hölzerne Stange mit dem einen Ende auf den erstgenannten Stab auflegen und wird dann das Ticken der Taschenuhr noch deutlich hören, wenn man das Ohr an das andere Ende der Stange anlegt.

Es ist überhaupt nicht nötig, daß der Schall durch die Luft in das Ohr gelange, er kann auch direkt durch die festen Teile des Kopfes zum Gehörnerven gelangen. Verschließt man sich die Ohren mit den Fingern und

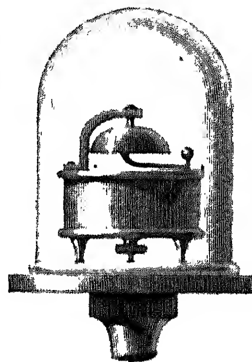
faßt die oben genannte Stange zwischen die Zähne, so hört man el ganz deutlich das Ticken der Uhr.

Auch eine stramm gespannte Schnur leitet den Schall ganz gut. hänge an die Mitte einer Schnur irgend eine Metallstange (eiserne Sc Feuerzange usw.), wickele die beiden Schnurenden um die Spitzen der Zeigefinger und stecke diese fest in die Ohrengänge. Läßt man hiera frei hängenden Körper an einen anderen anschlagen, so dröhnt der mit auffallender Stärke in die Ohren.

Zur Fortpflanzung des Schalles sind materielle Medie bedingt erforderlich; das Vakuum kann den Schall nicht lei

Um dies zu zeigen, setze man auf den Teller der Luftpumpe e gezogenes Weckerwerk, Fig. 596, jedoch so, daß die Füße desselben direkt auf dem Teller aufstehen, sondern auf einem Kissen von Wol

Fig. 596.



Kattun oder auf einigen aufeinander gelegten chen von dickem vulkanisiertem Kautschuk Durch das Uhrwerk wird ein Hammer, welch bei unserer Vorrichtung im Inneren der Glo findet, bald auf der einen, bald auf der a Seite derselben angeschlagen. Der dadurch e Schall wird sogleich schwacher, wenn man die g Luftpumpenglocke aufsetzt, aber immerhin bl noch deutlich hörbar; wird aber nun evakui verschwindet der Ton vollständig. Läßt ma die Luft allmählich wieder eintreten, so untern man alsbald den Ton, welcher stärker und wird, wenn sich die Glocke mehr und mehr n füllt. Der Schall kann sich also nicht den leeren Raum fortpflanzen.

Der größte Lärm auf der Erde kann sich demnach nicht üb Grenzen unserer Atmosphäre verbreiten, dagegen kann aber auch von anderen Himmelskörper nur das mindeste Geräusch bis zu unsere dringen; die furchtbarsten Explosionen könnten auf dem Monde stat ohne daß wir davon etwas hörten.

Saussure sagt, daß auf dem Gipfel des Montblanc ein Pistole weniger Geräusch macht, als wenn man in der Ebene ein Kinderkar losschießt, und Gay-Lussac fand mit seinem Ballon in einer Ho 7000 m, also in einer sehr verdünnten Luft schwebend, daß die In seiner Stimme ungemein abgenommen hatte.

Nicht in der Luft allein, sondern in allen Gasen und Dämpfe sich der Schall verbreiten. Um sich davon zu überzeugen, braucht m die Gase oder Dämpfe in das Vakuum eintreten zu lassen, in welche das gehende Weckerwerk, Fig. 596, befindet.

Leslie[1]) hat auf diese Weise gezeigt, daß Wasserstoff den Sch schlechtesten leitet. Entleert man nämlich die Glocke der Luftpum Hälfte von der Luft, so daß der Schall merklich geschwächt wird, u dann Wasserstoffgas ein, bis der Druck dem ursprünglichen gleich ge so wird der Schall nach außen nicht nur nicht verstärkt, sondern g

[1]) Trans. of Cambridge Soc. I, 267.

Schwingungsweite erreichen und gleichzeitig ihren Rückweg beginnen. Von dieser Art, welche Weber als stehende Schwingungen bezeichnet, sind die Schwingungen des Stahlstabes, Fig. 594, die Schwingungen einer gespannten Saite usw. Alle tönenden Körper befinden sich im Zustande stehender Schwingungen.

Nur Körper von verhältnismäßig geringen Dimensionen, bei denen eine an irgend einer Stelle bewirkte Verschiebung der Teilchen aus ihrer Gleichgewichtslage sich momentan oder doch in verschwindend kleinen Zeitteilchen bis zu den äußersten Grenzen fortpflanzt, können direkt in den Zustand stehender Schwingungen versetzt werden. Sind dagegen die Dimensionen eines elastischen Mediums so bedeutend, daß eine namhafte Zeit vergeht, bis die an irgend einer Stelle erregte Schwingungsbewegung auf entfernte Stellen fortgepflanzt wird, so entstehen zunächst fortschreitende Wellen, deren Wesen darin besteht, daß jedes folgende Teilchen dieselben Schwingungen macht wie das vorhergehende, nur mit dem Unterschiede, daß es seine Bewegung um so später beginnt, je weiter es von dem Ursprunge der Wellenbewegung entfernt ist.

---

[1]) Phil. Mag. [4] XXXVI, 401.

[2]) Wien. Akad. Ber., Band LXIX, 2. Abt., S. 151.

[3]) Da die Resonanz erst später zur Erklärung gelangt, so können wir hier nur vorgreifend folgendes beifügen. Die Stärke des Schalles außerhalb des Rezipienten hängt wesentlich von den Dimensionen des letzteren beziehungsweise von dem Verhältnis der Eigentöne desselben zu den Partialtönen des tönenden Körpers ab. Es kann daher geschehen, daß bei langsamem Zuströmen des Wasserstoffs die Schallstärke abwechselnd zunimmt und wieder abnimmt, je nachdem der auf diese Weise veränderte Eigenton des Rezipienten mit dem Grundton oder einem der Obertöne des tönenden Körpers übereinstimmt.

Die mathematische Theorie lehrt, daß der tönende Körper den verschiedenen (reinen oder gemischten) Gasen eine lebendige Kraft erteilt, welche der Quadratwurzel aus dem Produkte der Dichte mit der Spannkraft des Gases proportional ist. Andererseits geben nach den Gesetzen des elastischen Stoßes die Gase an die Wände des Rezipienten eine lebendige Kraft ab, die wiederum proportional derselben Quadratwurzel ist. Daraus folgt, daß die vom tönenden Körper an den Rezipienten abgegebene lebendige Kraft, also auch die Schallstärke, proportional sein muß dem Produkte der beiden Quadratwurzeln, also proportional dem Produkt aus Dichte und Spannkraft der Gase. Bei gleicher Spannkraft wäre also der Theorie nach die nach außen übertragene Schallstärke bei Wasserstoff nur ungefähr $^1/_{14}$ von der bei Luft. Die letztere müßte auf $^1/_4$ verdünnt werden, um gleiche Schallstärke zu liefern wie Wasserstoff. Dieses Gesetz, welches bei dem Versuche von Leslie durch die Resonanz modifiziert wird, hat Dvořák durch andere Versuche bestätigt gefunden.

Beispiele von Wellenbewegung liefert uns eine ruhige Wasse… auf welche man einen Stein fallen läßt (wo aber nicht die Elastizi… Wassers, sondern die Schwere desselben die Kraft ist, welche die Schwin… bewegung der Wasserteilchen bedingt); ein sehr langes gespannt… gegen welches man nahe an einem Ende einen kräftigen Schlag fü… Schallwellen in der Luft usw.

Wir wollen hier zunächst die wichtigsten Gesetze der Wellenbe… überhaupt etwas näher betrachten und diese Betrachtung mit den W… wellen beginnen, weil von ihnen doch der Begriff der Welle entnom… und weil durch das Verständnis der Wasserwellen das Verständni… Wellenbewegungen, namentlich der Schallwellen, welche uns hier v… weise interessieren, sehr erleichtert wird.

§ 196. Wasserwellen. Wenn man einen Stein in Wasser w… bilden sich kreisförmige Wellen, welche sich von einem Mittelpunk… Stelle, wo der Stein ins Wasser fiel, aus nach allen Richtungen mit… förmiger Geschwindigkeit verbreiten, wenn nicht irgend eine störende… wirkt. Die Wellen bestehen aus abwechselnden Bergen und Tälern,… ziemlich rasch aufeinander folgen und welche in der Richtung v… Mittelpunkte nach außen hin fortschreiten.

Während nun ein Wellenberg nach außen hin fortschreitet,… nicht etwa auch die einzelnen Wasserteilchen an dieser fortschreiten… wegung teil; denn wenn ein Stückchen Holz auf dem Wasser schwi… sieht man, wie es abwechselnd gehoben wird und sich dann wieder… wenn Wellenberge und Wellentäler gleichsam unter ihm wegziehen.

Die Kraft, durch welche die Wasserwellen hier fortgepflanzt wer… die Schwere; denn wenn durch irgend eine Ursache in der hori… Wasserfläche eine Erhöhung oder Vertiefung hervorgebracht wird,… alsbald die Schwere der einzelnen Wasserteilchen, um die gestörte hor… Oberfläche wiederherzustellen; dadurch wird eine Schwingungsbe… hervorgebracht, welche nach und nach von Teilchen zu Teilchen fortg… wird.

Sobald sich einmal regelmäßige Wellen gebildet haben, beschrei… einzelnen Wasserteilchen an der Oberfläche während des Fortschreit… Welle in sich zurückkehrende Kurven, we… Falle der größten Regelmäßigkeit Kreise sin… in solchen Fällen, in welchen der dem Gipfe… gehende Teil des Wellenberges dem folgende… gleich ist, beschreiben die einzelnen Wasserteilchen Kurven, die nicht… geschlossen sind, von der Art, wie sie Fig. 597. dargestellt sind.


Fig. 597.

Die Bewegung der einzelnen Wasserteilchen während des Fortsc… der Welle ist von den Gebrüdern Weber[1]) durch eine Reihe genau… suche ermittelt worden. Sie bedienten sich zu diesen Versuche… größeren und einer kleineren Wellenrinne. Die kleinere war t… 1½ m lang und über 20 cm tief; die beiden Seitenwände wurde… Glastafeln gebildet, welche ungefähr 14 mm weit voneinander abstand… der größeren, welche einen 2 m langen, 80 cm tiefen und ungefä…

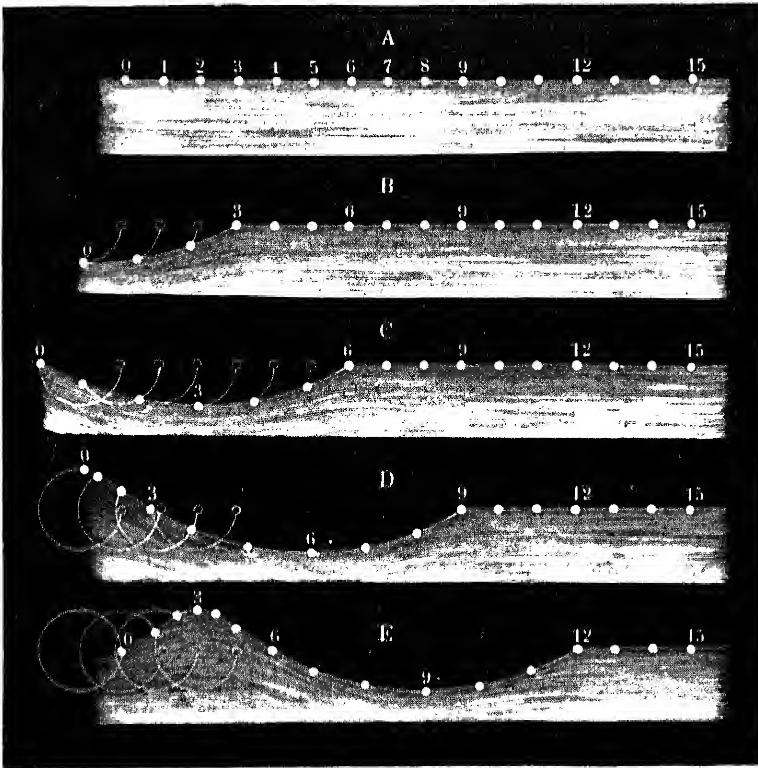
[1]) Wellenlehre auf Experimente gegründet von den Brüdern E. H. und W. Weber, Leipzig 1825.

breiten Raum einschloß, waren die Seitenwände durch Bretter gebildet, in denen nur an einzelnen Stellen Glasstreifen wasserdicht eingesetzt waren.

Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen der Bewegung der einzelnen Wasserteilchen und dem Fortschreiten der Welle etwas genauer.

Nehmen wir an, eine ganz regelmäßige Wellenbewegung habe sich, von der Linken zur Rechten fortschreitend, bis zu dem Wasserteilchen 0, (Fig. 598) fortgepflanzt und veranlasse dieses Teilchen, nun eine kreisförmige Bahn zurückzulegen. Während das Teilchen 0 zum erstenmal seine Kreisbahn vollendet, wird die Bewegung eine bestimmte Strecke sich fort-

Fig. 598.



pflanzen. Das mit 12 bezeichnete Wasserteilchen sei nun dasjenige, bis zu welchem sich die Schwingungsbewegung von 0 aus fortpflanzt, während 0 eine Umdrehung vollendet; es wird also 12 seine erste Umdrehung in demselben Momente beginnen, in welchem 0 seine zweite Umdrehung beginnt.

Denken wir uns nun den Umfang des Kreises, welchen das Teilchen 0 beschreibt, ebenso den Raum zwischen 0 und 12 in 12 gleiche Teile geteilt, so wird die Wellenbewegung in der Richtung von 0 nach 12 immer um eine Abteilung weiter schreiten, während das Teilchen 0 gerade $^1/_{12}$ seiner kreisförmigen Bahn zurücklegt.

Während das Teilchen 0 das erste Zwölftel seiner Bahn zurücklegt, pflanzt sich also die Wellenbewegung bis 1, während 0 das erste Viertel seiner Bahn zurücklegt, pflanzt sie sich bis 3 fort.

Fig. 598 B stellt den Moment dar, in welchem das Teilchen 0 den
Teil oder $^3/_{12}$ des Kreises zurückgelegt hat, den es durchlaufen so
Teilchen 1 hat in diesem Augenblicke $^2/_{12}$, das Teilchen 2 hat $^1/_{12}$
Kreisbahn zurückgelegt, das Teilchen 3 ist noch nicht aus seiner
gewichtslage verrückt.

Die Fig. 598 C bezieht sich auf den Augenblick, in welchem da
chen 0 die Hälfte seiner Bahn zurückgelegt hat; das Teilchen 1 hat $^5/$
Teilchen 2 hat $^4/_{12}$, das Teilchen 3 hat $^3/_{12}$ seiner Bahn zurückgeleg
Teilchen 4 und 5 befinden sich in derselben Lage wie die Teilchen 1
der vorigen Figur. Das Teilchen 6 ist noch nicht aus seiner Gleichge
lage entfernt, beginnt aber eben seine Bewegung.

Hier hat das Teilchen 3 seine tiefste Stellung erreicht: es befind
in der Mitte eines Wellentals.

Wenn nun abermals $^1/_{12}$ der Zeit vergangen ist, welche ein Te
braucht, um seinen Kreislauf ganz zu vollenden, so wird das Teilchen
eine solche Lage gegen seine ursprüngliche Stellung gekommen sein,
jetzt für das Teilchen 2 der Fall ist; das Teilchen 4 hat seine tiefste St
erreicht, es ist um $^1/_4$ Kreis von seiner Gleichgewichtslage entfern
Wellental ist also in diesem Zeitteilchen von 3 bis 4 fortgerückt.

Fig. 598 D stellt den Moment dar, wo das Teilchen 0 $^3/_4$ seines
zurückgelegt, wo es den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht hat; h
also der Gipfel eines Wellenberges. Das Teilchen 1 hat bereits $^8/_{12}$,
$^7/_{12}$, 3 hat $^6/_{12}$ seiner Bahn zurückgelegt; die Teilchen 4, 5, 6, 7, 8 be
sich in derselben Lage wie 1, 2, 3, 4 und 5 der vorigen Figur. Vo
Momente an, auf welchen sich Fig. 598 C bezieht, bis zu dem Mo
welchen Fig. 598 D darstellt, ist das Wellental von 3 bis 6 fortgerückt

Während das Teilchen 0 das letzte Viertel seiner Bahn zurü
schreitet der Wellenberg von 0 bis 3, das Wellental von 6 bis 9 fort,
demselben Moment, wo 0 seine Bahn zum erstenmal zurückgelegt ha
sie zum zweitenmal zu beginnen, wird das Teilchen 12 zum erstenma
Bewegung anfangen.

Dieser Moment ist in Fig. 598 E dargestellt, welche wohl kein
läuterung mehr bedarf.

Der schraffierte Teil der Fig. 599 stellt den Wellenzug für den A
blick dar, in welchem das Teilchen 0 zum zweitenmal seine Schwi
vollendet hat; in diesem Moment wird das Teilchen 12 zum erstenma
Schwingung vollendet und die Bewegung überhaupt sich bis 24 fortge
haben; ein Wellenberg ist in 3, ein zweiter in 15, ein Wellental in
zweites in 21.

Wenn nun die Wellenbewegung ungestört fortdauert, so werden da
daß die einzelnen Wasserteilchen fortfahren, ihre Kreisbahnen zu durchl
die Wellenberge sowohl als die Wellentaler gleichmäßig in der Richtu
der Linken zur Rechten fortschreiten, indem ein Teilchen nach dem a
den höchsten oder tiefsten Punkt seiner Bahn erreicht.

Von dem eben besprochenen Moment an gerechnet werden die Te
6 und 18 nach $^1/_4$, die Teilchen 9 und 21 nach $^1/_2$, die Teilchen 12 u
nach $^3/_4$ der ganzen Schwingungsdauer auf dem Gipfel des Wellenberg
gekommen sein. Die Welle wird also der Reihe nach die in Fig. 599
ausgezogene Kurven angedeuteten Lagen einnehmen.

Nach langwierigen hierdurch hervorgerufenen Verhandlungen wurde dann das Material für die neuen Stäbe bei Matthey u. Co. in London bestellt und der frühere Beschluß, daß alle Stäbe aus einem Gusse stammen sollten, als unpraktisch fallen gelassen.

Im Frühjahr 1875 schlossen die Vertreter von Deutschland, Österreich, Ungarn, der Schweiz, Belgien, Dänemark, Frankreich, Italien, Rußland, Schweden und Norwegen, Spanien, Portugal, der Türkei, der Vereinigten Staaten, Argentinien, Peru und Venezuela in Paris einen Vertrag zur Gründung eines auf gemeinsame Kosten zu gründenden Instituts unter dem Namen: „Internationales Maß- und Gewichtsbureau", welches dann auch auf der Höhe von St. Cloud bei Paris erbaut und eingerichtet wurde. Dasselbe besteht aus mehreren Beobachtungsräumen, welche mit Vorkehrungen zur Konstanthaltung verschiedener Temperaturen unter und über 0° ausgestattet sind, während das Tageslicht nur durch eine Öffnung an der Decke eintreten kann. Daneben befindet sich ein physikalisches Laboratorium zur Vornahme der nötigen Hilfsarbeiten. Das Institut steht unter der Leitung eines Direktors, dem mehrere Assistenten zur Seite stehen.

Von den fertigen Stäben wurde nach deren genauer Vergleichung mit dem alten Platinstabe derjenige ausgesucht, welcher letzterem am nächsten kam. Die Abweichung derselben betrug weniger als $^1/_{10000}$ mm. Dieser Stab wurde dann, mit einem gotischen 𝔐 bezeichnet, als internationales Prototyp des Meters in einen eisernen Schrank eingeschlossen und in einem unterirdischen Gewölbe des internationalen Maß- und Gewichtsinstituts, in welchem die Temperatur nur um 4° variiert, hinter zwei eisernen Türen mit drei verschiedenen Schlüsseln, welche drei verschiedenen Personen anvertraut sind, aufbewahrt.

Die Länge dieses Stabes bei 0° Celsius gilt als Längeneinheit.

Die übrigen Stäbe wurden ebenfalls genau gemessen, auf ihre Wärmeausdehnung untersucht, und in messingene Etuis eingeschlossen, samt zwei verifizierten Thermometern den Delegierten der beteiligten Staaten übergeben. Auch diese Stäbe weichen nicht um mehr als $\pm\, ^{2}/_{10000}$ mm von dem Prototyp ab, welche Abweichung überdies auf $\pm\, ^{2}/_{10000}$ mm genau bestimmt wurde.

Zugleich mit der Verteilung der Metermaße fand die Verteilung der Kilogrammgewichte aus Platin-Iridium statt, von denen später die Rede sein wird.

Das internationale Institut hat außerdem dafür gesorgt, daß das Meter, wenn es verloren ginge, wieder mit einer Sicherheit von $\pm\, ^1/_{1000}$ mm reproduziert werden könnte, indem durch Prof. A. Michelson aus Chicago in dem internationalen Bureau eine sorgfältige Vergleichung des Prototyps mit der Wellenlänge bestimmter roter, grüner und blauer Lichtstrahlen im Spektrum des Cadmiums ausgeführt wurde [1].

---

[1] Näheres in den Publikationen:

Procès-verbaux de la commission internationale du mètre et de la Section Française. Paris, Imprimerie Nationale, 1871–1878.

Procès-verbaux du Comité international des poids et mesures. Paris, Gauthiers-Villars, 1875–1902.

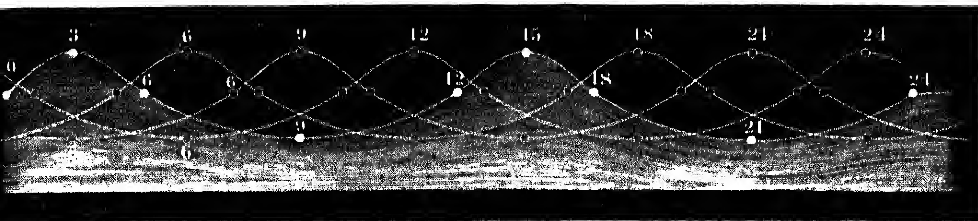
Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. I—XI. Paris, Gauthiers-Villars, 1881–1895.

So schreitet denn Wellenberg und Wellental dadurch voran, daß allen Wasserteilchen dieselbe Kreisbewegung mitgeteilt wird, daß aber jedes folgende Teilchen dieselbe später beginnt als das vorangehende.

Die Entfernung von einem Teilchen bis zum nächsten, welches sich in gleichen Schwingungszuständen (Phasen) befindet, also die Entfernung von 0 bis 12, von 12 bis 24, heißt eine Wellenlänge; denn jene Teilchen beginnen gleichzeitig ihre Schwingung, sie erreichen gleichzeitig ihren tiefsten und ihren höchsten Stand. Demnach ist auch die Entfernung von dem Gipfel eines Wellenberges bis zum nächsten, also in unserer Figur von 3 bis 15, von der Mitte eines Wellentales bis zur Mitte des nächsten Wellentales, also hier von 9 bis 21, eine Wellenlänge.

Solche Teilchen, welche um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt sind, wie 0 und 6, 3 und 9, 9 und 15, befinden sich stets in entgegengesetzen

Fig. 599.



Schwingungszuständen. Das Teilchen 9 z. B. bildet oben den tiefsten Punkt eines Wellentales, 3 und 15 dagegen den Gipfel eines Wellenberges. Die Teilchen 0 und 6 befinden sich zwar beide in der Höhe ihrer Gleichgewichtslage, allein die Bewegung von 0 ist nach unten, die von 6 ist nach oben gerichtet.

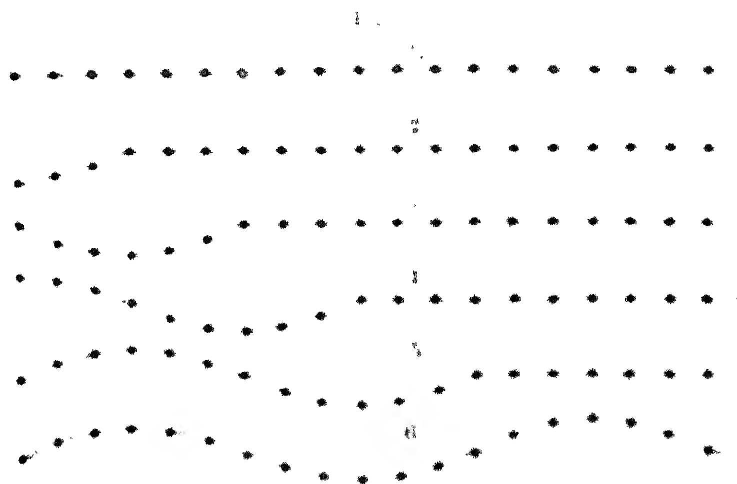
Während ein Teilchen eine ganze Schwingung vollendet, schreitet die Welle um eine Wellenlänge voran.

Die nähere Betrachtung des Verhältnisses zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, der Größe und Dauer der Schwingungen und der Gestalt der Wellen, der Schwingungsbewegung der Teilchen im Inneren der Flüssigkeit, der Abnahme der Höhe der Wellenberge und Täler mit der Entfernung von dem Ursprunge der Welle, die Bildung der Wellen auf großen Gewässern unter dem Einflusse des Windes würde uns hier zu weit führen; wir müssen in dieser Beziehung auf das schon oben genannte klassische Werk der Gebrüder Weber verweisen. Ebenso lassen wir hier die Erscheinungen der Reflexion und Interferenz der Wasserwellen unberücksichtigt, da wir die entsprechenden Erscheinungen bei den Schall- und Lichtwellen doch näher untersuchen müssen.

§ 197. Seilwellen. Es ist schon bemerkt worden, daß die Bahnen der Wasserteilchen nicht immer, wie wir in unseren Zeichnungen annahmen, genau kreisförmig, ja nicht einmal immer in sich selbst zurückkehrende Kurven sind. Häufig geht die kreisförmige Bahn in eine elliptische über, indem bald der horizontale, bald der vertikale Durchmesser der größere ist. Wäre der horizontale Durchmesser gleich Null, so würden die einzelnen Teilchen nur rechtwinkelig zu der Richtung, nach welcher sich die Wellen fort-

pflanzen, [illegible]
die Wellen [illegible]
solche Wellenbewegung [illegible]

Die Kurven 1 [illegible]
solcher Wellen, [illegible]



Kurven entsprechen ganz den Figuren [illegible] und [illegible], sie lassen [illegible] diesen ableiten, wenn man den horizontalen Teil der Bewegung gl[illegible] setzt, sie werden deshalb auch ohne weitere Erklärung verständlich [illegible]

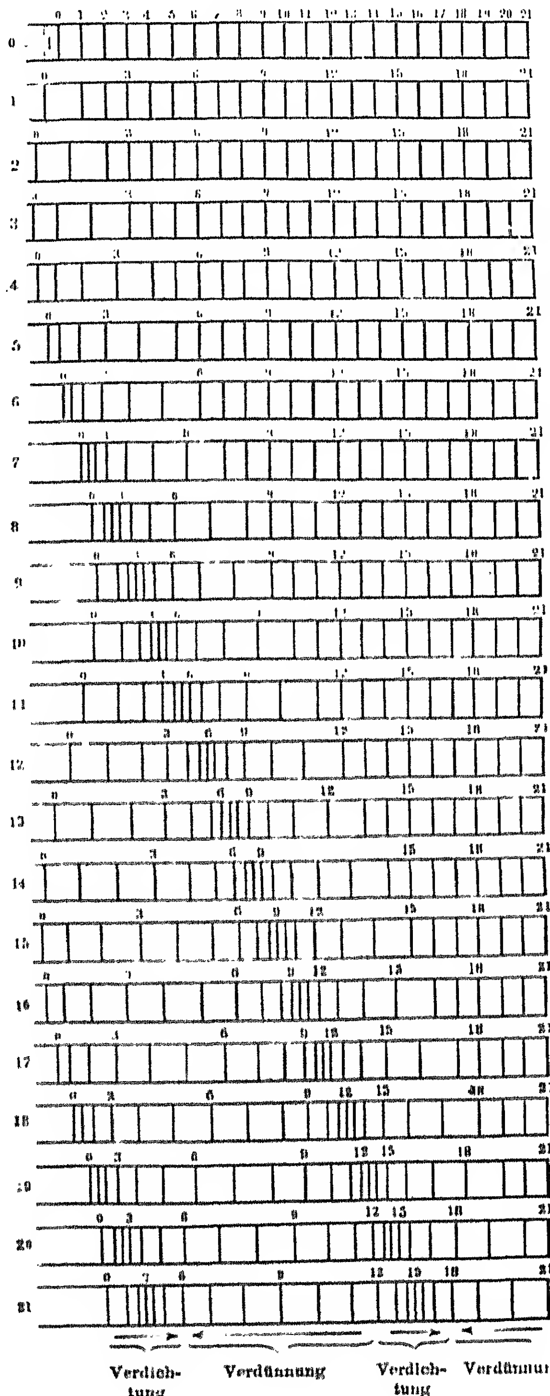
Wenn eine Seilwelle, gegen den einen Befestigungspunkt fortsc[illegible] an demselben angekommen ist, so wird sie reflektiert, sie kehrt na[illegible] dem anderen Ende zurück und läuft so mehrmals hin und her. W[illegible] nun fortwährend neue Wellen erzeugt werden, so wird es kommen, [illegible] reflektierten Wellen den neu ankommenden begegnen, durch das Zu[illegible] wirken der Wellensysteme aber können sich unter gewissen Bed[illegible] stehende Wellen bilden. Wir kommen auf diesen Gegenstand sp[illegible] führlich zurück.

§ 198. Luftwellen. Um die Art und Weise, wie sich di[illegible] schwingungen in der Luft fortpflanzen, anschaulich zu machen, w[illegible] uns denken, daß die Luft in einer an einem Ende offenen Röhre [illegible] hin und her gehende Bewegung eines am anderen Ende angebrachten [illegible] in Schwingungen versetzt werde.

In Fig. 601 ist eine solche Röhre dargestellt, die anfangs gl[illegible] voneinander stehenden mit 0, 1, 2 ... bezeichneten Striche stellen di[illegible] einzelner Schichten der überall gleich dichten Luft dar; p ist de[illegible] Dieser Kolben soll um die Länge aq, Fig. 602, rasch hin und he[illegible] und zwar wollen wir annehmen, daß er diese Schwingungen n[illegible] Gesetzen der Pendelbewegung für kleine Amplituden ausf[illegible]

Denken wir uns demnach die Zeit, welche der Kolben zu ei[illegible] und Hergange braucht, in 12 gleiche Teile geteilt, so findet man di[illegible] in welchen er sich in jedem dieser 12 Momente befindet, durch die a[illegible] besprochene Konstruktion. Diese Konstruktion ist in Fig. 602 [illegible]

Fig. 601.



0 Ruhelage der Luftschichten.

1 Die Schichte 0 schwingt nach links.

2 Die Schichte 1 folgt nach links.

3 Die Schichte 0 erreicht die äußerste Lage links.

4 Die Schichte 0 beginnt die Bewegung nach rechts.

5 Die Schichte 1 beginnt die Bewegung nach rechts.

6 Die Schichte 0 passiert die Ruhelage nach rechts.

7 Die Schichte 1 passiert die Ruhelage nach rechts.

8 Die Wellenbewegung ist bis Punkt 8 fortgeschritten.

9 Die Luftschichte 0 erreicht die äußerste Lage rechts.

10 Die Luftschichte 0 geht wieder nach links.

11 Wellenbewegung bis Punkt 11 fortgeschritten.

12 Die erste ganze Welle bis Punkt 12 fertig.

13 Beginn der zweiten Schwingung.

14 u. s. f.

15 "

16 "

17 "

18 $1^1/_2$ Wellen fertig bis 18.

19

20

21 $1^3/_4$ Wellen fertig bis 21.

Amplitude ag des Kolbens ausgeführt, und es sind auf diese Weise auf a die Stellen bezeichnet, in welchen der Kolben nach $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$ usw. seine Schwingungsdauer ankommen wird [1].

Im ersten Zwölftel seiner Schwingungsdauer lege der Kolben von ausgehend den Weg de zurück; in den folgenden gleich großen Zeitteilche die Wege eb, ba, dann rückwärts nach rechts ab, bc, cd, d ef, fg, dann wieder nach links gf, fe, ed usf. In d hat d Kolben seine größte Geschwindigkeit; von da an wird seine B wegung nach beiden Seiten langsamer, bis er die Enden seiner Bal erreicht, wo seine Bewegung in die entgegengesetzte übergeh

Fig. 602.



Diese Bewegung des Kolbens pflanzt sich nun nach und nach auf al die einzelnen Luftschichten der Röhre fort, jede derselben wird nach einig Zeit dieselben Schwingungen machen wie der Kolben selbst, sie wird ab diese Bewegung um so später beginnen, je weiter sie von dem Kolben en fernt ist.

Wenn die Luft vollkommen unelastisch und starr wäre, so würde durc die Bewegung des Kolbens die ganze Luftsäule in der Röhre fortgeschobe werden, alle einzelnen Luftschichten würden gleichzeitig dieselbe Bewegun und zwar die des Kolbens, haben; die Luft ist aber elastisch, die Bewegun pflanzt sich nur nach und nach fort, und zwar dadurch, daß die dem Kolbe zunächst liegenden Schichten erst in ihrer Dichte geändert werden und dar vermöge ihrer Elastizität auf die folgenden wirken.

Über den weiteren Verlauf der Bewegung der einzelnen Luftschicht und die Verteilung der letzteren während der aufeinander folgenden Phase der fortschreitenden Welle wird man, besser als durch viele Worte, durch d Betrachtung oder eigene Reproduktion der Fig. 601 belehrt. Die einzelne Abteilungen dieser Figur geben die momentane Lage der Luftschichten i den um $^1/_{12}$ der Schwingungsdauer aufeinander folgenden Zeitmomente Das Weitere ist durch den der Figur beigeschriebenen Text hinlänglic erklärt.

Eine noch faßlichere Darstellung ist mittels der später zu beschreibend **Wellenmaschinen** ermöglicht.

Wir machen noch auf den Umstand aufmerksam, daß in Fig. 601 d Exkursionsweite im Verhältnis zur Wellenlänge übertrieben groß ang nommen wurde, infolgedessen auch die Verdünnungsstellen viel länger au fielen als die Verdichtungsstellen. Bei unendlich kleinen Exkursionen werd beide gleich lang.

Wir haben bisher der Einfachheit wegen die Fortpflanzung der Luf wellen in einer Röhre betrachtet; in ganz ähnlicher Weise pflanzen sich ab

---

[1]) Die Längen de, db, da verhalten sich zueinander wie

$$\sin 30 : \cos 30 : 1$$

oder wie $0{,}5 : 0{,}866\,035 : 1$

oder wie $4 : 6{,}928\,28 : 8$,

wofür man bei Zeichnungen von Sinuskurven praktisch

$$4 : 7 : 8$$

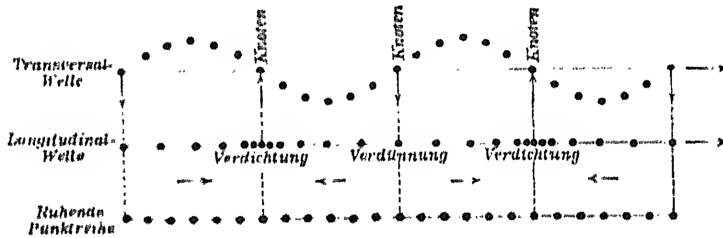
setzen kann. Teilt man die Wellenlänge in 12 gleiche Teile, so sind die aufei ander folgenden Exkursionen sehr nahe gleich

$$0,\ 4,\ 7,\ 8,\ 7,\ 4,\ 0,\ -4,\ -7,\ -8,\ -7,\ -4,\ 0.$$

auch die Wellen in freier Luft von den schwingenden Körpern nach allen Seiten hin fort. So wie sich um die Stelle des Wassers, in welche der Stein hineingefallen ist, kreisförmige Wellen bilden, so bilden sich um den schwingenden Körper *kugelförmige* Luftwellen.

§ 199. Transversal- und Longitudinalwellen, Bäuche und Knoten. Unter den bisher betrachteten Wellenbewegungen unterscheiden sich die Seilwellen von den Luftwellen außer durch das *Medium* insbesondere dadurch, daß bei den ersteren die Schwingungen *senkrecht* auf die Fortpflanzungsrichtung, bei den letzteren in der Fortpflanzungsrichtung stattfinden. Man pflegt Wellen der ersteren Art *Transversalwellen*, Wellen der letzteren Art *Longitudinalwellen* zu nennen. Als eine Zusammensetzung beider können die zuerst betrachteten Wasserwellen angesehen werden. Bei den Transversalwellen sind wiederum mehrere Fälle möglich, je nach der Form der Schwingungsbahn in *der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene*. So z. B. kann man leicht Seilwellen erzeugen, bei welchen sich die einzelnen Punkte des Seiles in Kreisen bewegen. Der einfachste Fall ist jener, wobei die Transversalschwingungen aller Punkte in einer Ebene, z. B. alle senkrecht, auf und ab erfolgen. Wählt man diese Schwingungsebene zur Zeichnungsebene, so erscheint die einfache Transversalwelle als

Fig. 603.



Schwingungskurve (Sinuskurve), deren Konstruktion auf S. 167 gezeigt wurde. In einer solchen Transversalwelle folgen aufeinander Strecken entgegengesetzter Exkursionen, welche man *Bäuche* (Wellenberge und Wellentaler) zu nennen pflegt und welche je die Länge einer halben Welle besitzen. Die Grenzpunkte zwischen denselben, wo die Exkursion momentan gleich Null ist, heißen *Knotenpunkte*. In je zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten sind die momentanen Geschwindigkeiten von entgegengesetzter Richtung und am größten. An den Stellen größter Exkursion sind die Geschwindigkeiten momentan gleich Null. Diese Stellen liegen von den Knotenpunkten um ein Viertel der Wellenlänge entfernt.

Bei den Longitudinalwellen folgen aufeinander abwechselnd Strecken mit Verdichtung und Verdünnung. Es wäre aber *nicht richtig*, wenn man, wie wohl vorkommt, die Berge und Täler der Transversalwelle mit den Verdichtungen und Verdünnungen der Longitudinalwelle in Analogie setzen wollte; denn die Stellen größter Verdichtung und Verdünnung fallen vielmehr mit den Knotenpunkten der Transversalwelle zusammen, sind also um eine Viertelwellenlänge gegenüber den Stellen größter Exkursion verschoben. Um dies deutlich zu übersehen, ist in Fig. 603 an unterster Stelle eine ruhende Punktreihe gezeichnet, aus welcher die darüber stehende Longitu-

dinalwelle und die zu oberst stehende Transversalwelle abgeleitet sind. Exkursion, welche in der Transversalwelle nach aufwärts (abwärts) findet, ist in der Longitudinalwelle nach rechts (links) aufgetragen. Wellenzüge enthalten hier je zwei Wellenlängen, also vier halbe Wellen übersieht sofort, daß senkrecht übereinander liegen:

In der Transversalwelle:	In der Longitudinal
Knoten mit momentaner Geschwindigkeit nach aufwärts	Stellen größter Verdi
Knoten mit momentaner Geschwindigkeit nach abwärts	Stellen größter Verdü
Wellenberg oder Bauch nach aufwärts .	Strecke mit Exkursione rechts.
Wellental oder Bauch nach abwärts . .	Strecke mit Exkursione links.

Man pflegt deshalb auch bei der Longitudinalwelle die Stellen g Verdichtung und Verdünnung als Knoten zu bezeichnen[1].

Die Darstellung einer Transversalwelle ist stets übersichtlicher der analogen Longitudinalwelle, da man bei ersterer die Ruhelage Längsrichtung der Welle vor sich hat, während die Ruhelage der s genden Punkte innerhalb der Longitudinalwelle nicht ersichtlich is man nun aber leicht die eine Wellenbewegung in die andere zu übe vermag, so empfiehlt es sich oft, die Vorgänge in der Longitudinalw darzustellen, als wäre letztere eine Transversalwelle. Man hat da Schlusse der Betrachtung nur einfach das Auf und Ab in ein Rech Links zurückzuübertragen. Aus diesem Gebrauche stammt die Anw des Ausdruckes Bauch auch für die Exkursionsstrecken der L dinalwelle.

§ 200. Wellenmaschinen. Um die manchmal etwas verwi Erscheinungen der Wellenbewegung beim Unterrichte leichter verst zu machen, bedient man sich sogenannter Wellenmaschinen. wir nun die stehenden Wellen erst später besprechen können, so wir doch hier schon bei der Beschreibung der Versuche zur Darstell fortschreitenden Wellen die vollständige Anleitung zum Gebrau Wellenmaschinen einschalten, um auf diesen Gegenstand nicht zu oft zurückgreifen zu müssen.

Die Wellenmaschinen zerfallen in zwei Klassen; bei der einen dieser Apparate werden wirkliche Wellenbewegungen hervorgerufen,

[1] In vielen Lehrbüchern wird die Bezeichnung Knoten nur für die u bleibenden Stellen stehender Wellen gebraucht. Es liegt jedoch gar kei vor, warum man den Ausdruck nicht auch für die fortschreitenden We brauchen sollte, so wie man den Ausdruck Bauch in beiden Fällen a Unter allen Umständen bezeichnet dann Knoten eine Stelle am schwi Körper oder Medium, welche sich momentan oder dauernd in der Ruhelage b momentan bei fortschreitender Welle, dauernd bei stehender Wellenbewegu der fortschreitenden Welle schreiten Knoten und Bäuche fort, in der st Welle bleiben beide an ihrer Stelle.

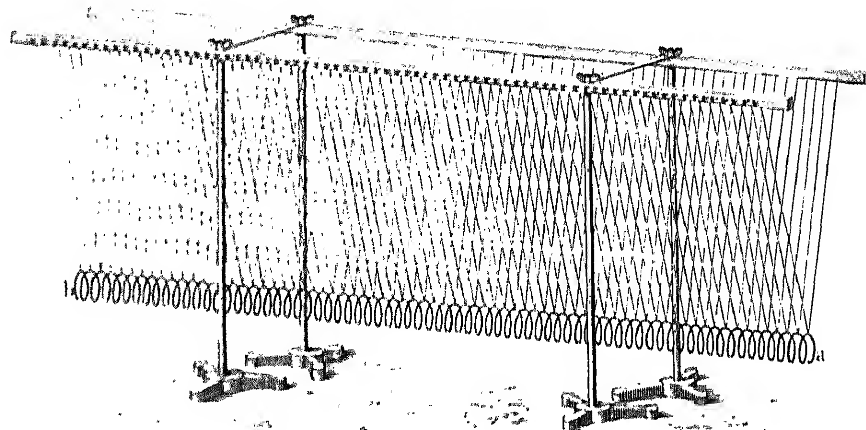
anderen werden die Wellenbewegungen nur künstlich entweder auf mechanischem oder nur auf optischem Wege nachgeahmt.

Ein Apparat der ersteren Klasse ist die Longitudinalwellenmaschine von A. F. Weinhold [1]), Fig. 604.

Eine Spirale von 72 ungefähr 7 cm weiten Windungen eines 2 mm starken Kupferdrahtes ist in der aus der Figur ersichtlichen Weise mit Hilfe von an jeder Windung festgeknüpften Doppelfäden von ungefähr 60 cm Länge an einem Gestell aufgehängt; die Fadenenden sind durch Löcher gezogen und an Wirbeln befestigt, so daß man sie bequem auf gleiche Länge bringen kann.

Um in der Spirale eine Longitudinalwelle hervorzurufen, faßt man die äußerste Windung zwischen Daumen und Zeigefinger und bewegt dieselbe rasch in der Richtung der Spiralenachse um ungefähr 2 cm vorwärts oder zurück. Man sieht dann die Verdichtung oder Verdünnung die ganze

Fig. 604.



Spirale entlang laufen. Sobald die Welle am Ende der Spirale angelangt ist, wird sie reflektiert, und zwar in diesem Falle, wo das reflektierende Ende frei beweglich ist, in der Weise, daß die Verdichtung als Verdünnung zurückkehrt und umgekehrt.

Um die Reflexion am festen Ende zu zeigen, klemmt man das eine Ende der Spirale an einem beschwerten eisernen Halter fest. Die Verdichtung wird dann als Verdichtung reflektiert, die Verdünnung als Verdünnung.

Man beobachtet dies am besten, indem man die Bewegung der äußersten Windungen, von wo die Welle ursprünglich ausgegangen, in dem Momente ins Auge faßt, wo die Welle dahin zurückkehrt. War das reflektierende Ende frei, so erfolgt die Bewegung dieser Windungen in der mit dem ursprünglichen Anstoß gleichen Richtung; war das reflektierende Ende dagegen fest, so erfolgt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung.

Um stehende Wellen hervorzurufen, hat man [2]) verschieden vorzugehen, je nachdem die Enden der Spirale beide frei, oder beide fest, oder nur eines derselben fest ist.

[1]) Physikalische Demonstrationen, S. 197 bis 199.

[2]) Weinhold, l. c.

1. Beide Enden frei. Man faßt mit beiden flachen Händen u drei Windungen von der Mitte nach rechts und links zwischen di dungen der Spirale und bringt durch rhythmische Annäherung und Entf der Hände die Schwingungen hervor, worauf man die Hände zurückzieh Spirale macht dann stehende Schwingungen von einer halben W länge, wobei in der Mitte ein Knoten mit Verdünnung und Verdic an den Enden größte Exkursionen ohne Dichteänderung eintreten.

In ähnlicher Weise kann man durch doppelt so rasche Schwing der Hände, welche rechts und links um etwa drei Windungen von dem und dritten Viertelpunkte der Spirale eingreifen, dieselbe mit zwei h Wellenlängen schwingen lassen. Sie hat dann an den zwei erw Stellen je einen Knoten, in der Mitte und an den Enden ihre größten sionen.

2. Beide Enden fest. Beide Enden werden in beschwerte Halt gespannt, dann faßt man die Mitte der Spirale, zieht sie ungefähr 2 d der einen Seite und läßt sie los. Es erfolgen stehende Schwingunge einer halben Wellenlänge mit Knoten und Dichteänderungen Enden, größter Exkursion ohne Dichteänderung in der Mitte. Legt m Hände wie bei 1. an, bewegt sie aber doppelt so rasch, so erhält man st Schwingungen mit zwei halben Wellen, Knoten an den Enden und Mitte, größten Exkursionen im 1. und 3. Viertelpunkte.

3. Ein Ende fest. Man faßt die Spirale am freien Ende, del um 1 bis 2 dm aus und läßt sie los. Man erhält stehende Schwin von einer Viertelswellenlänge mit einem Knoten am festen, einem sionsmaximum am freien Ende.

Durch Anlegen der Hände drei Windungen rechts und links von Punkte, welcher um ein Drittel der ganzen Länge vom freien Ende e ist, erhält man stehende Schwingungen von $^3/_4$ Wellenlänge.

Nach F. Richarz[1]) eignet sich zur Demonstration der Reflexion Longitudinalwelle am festen und am freien Ende besonders gut ei einem Stahldraht von 34 m Länge und 1,5 mm Dicke hergestellte Spira 115 Windungen mit 9 cm Durchmesser, deren oberes Ende an der De Hörsaales befestigt ist, während das untere Ende frei über dem E mentiertische endigt. Die Wellen brauchen ungefähr 1 Sekunde zum laufen der Spirale und lassen sich leicht verfolgen, so wie auch die P wechsel leicht ersichtlich sind.

Eine Wellenmaschine, welche gleichzeitig longitudinale und trans (fortschreitende oder stehende) Wellenbewegung hervorruft, ist von van S konstruiert und von J. Vaes mitgeteilt worden[2]). Sie besteht au Reihe pendelnder Stäbe, die derart durch Spiralfedern verbunden sin die Schwingungen des äußersten Stabes sich allen folgenden mitteilen unteren Enden der Stäbe markieren die longitudinale Welle, die am punkte angesetzten Seitenarme bilden mit ihren Enden die transversale

Eine der Weinholdschen Wellenmaschine nahestehende, bei w Kugeln am unteren Rande von vertikal aufgehängten Fadennetzen ang

[1]) Sitzungsber. d. Naturh. Ges. zu Marburg 1901; Zeitschr. f. phys. u. Unterr. 15, 290.

[2]) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 14, 89 (1901).

sind, ist von v. Rostowzew beschrieben [1]). Endlich ein „sehr einfacher Wellenapparat“, bestehend aus einem quadratischen Netze elastischer Spiralen, an deren Kreuzungspunkten Kugeln befestigt sind, von Fred. J. Hillig [2]).

Zu den Wellenmaschinen der zweiten Klasse, welche die Wellenbewegungen nur nachzuahmen gestatten, gehört unter anderen die Wellenmaschine von E. Mach, wovon die Figuren 605 und 606 Abbildungen geben.

An einem eisernen Gestelle *ab* ist eine horizontale Leiste *cd* befestigt, an deren Unterseite eine Anzahl um vertikale Achsen *x*, *x*, *x* drehbarer

Fig. 605.

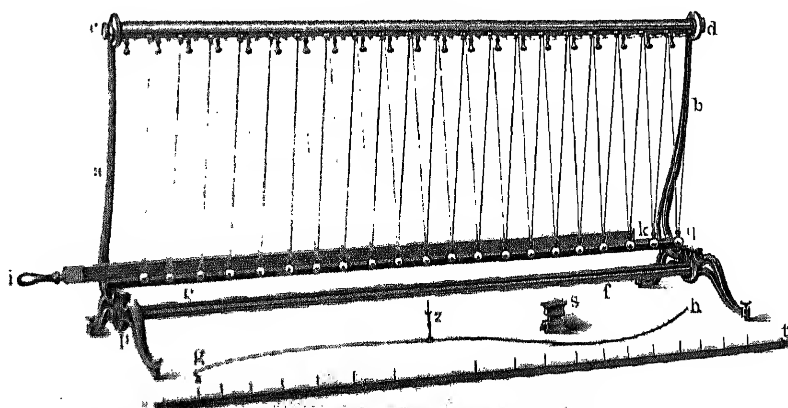
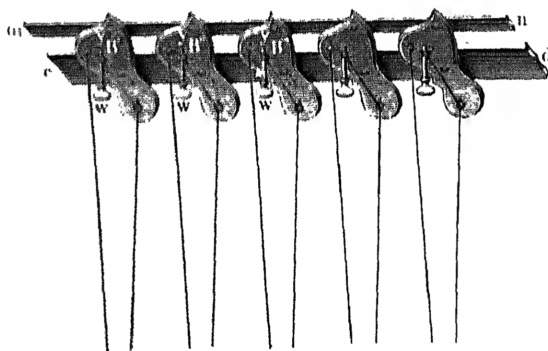


Fig. 606.



Brettchen *B*, *B'*, *B''* angeschraubt sind (Fig. 606). Diese sämtlichen Brettchen sind durch eine der Leiste parallele Eisenschiene *mn* bei *y*, *y*, *y* zusammengekuppelt, so daß sie alle zugleich um ihre Achsen eine Viertelsdrehung beschreiben, sobald man die Eisenschiene verschiebt. Die Form der Brettchen begrenzt diese Drehung in der Weise, daß die angehängten Fäden, welche eine Anzahl weiß gefärbter Bleikugeln tragen, mit ihren Ebenen parallel zu *cd* oder senkrecht dazu gestellt werden können. Die Schwin-

[1]) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 16, 274 (1903).
[2]) Ebend. 17, 329 (1904).

gungsebenen der Pendel sind daher ebenfalls entweder parallel oder
recht zur Kugelreihe gerichtet; es ist möglich, diese Richtungen währe
Schwingungen zu wechseln. Die Länge der Fäden wird durch die Wi
a, *a* reguliert. Mit diesem Apparate können folgende Demonstr
gemacht werden:

1. Fortschreitende Transversalwelle. Zu diesem Zweck
ein langes Lineal *ik*, Fig. 605, mit Handgriff hinter den Kugeln mittel
Nut aufgestellt, dann die Kugeln hinter dieselbe gesetzt und hierz
Lineal mit konstanter Geschwindigkeit seitwärts herausgezogen. Hie
wird eine Kugel nach der anderen frei gelassen und jede folgende füh
Schwingungen etwas später aus als die vorherige.

2. Fortschreitende Longitudinalwelle. Die Schwingungs
werden parallel zu *cd* gestellt, dann unter den ruhenden Kugeln ein Sch
mittels Nut auf der Leiste *ef* vorbeigeschoben. Dieser Schieber hat
oberen Seite eine schräge Rinne eingeschnitten, welche jede einzelne
aufnimmt und vor dem Loslassen eine Strecke weit mitschleift. Na
müssen hierzu die Kugeln gleich hoch gehängt werden.

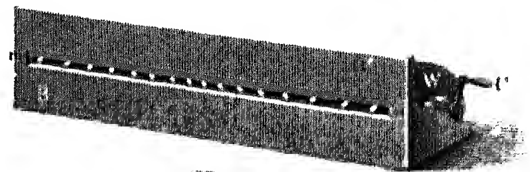
3. Stehende Transversalwelle. Nach Senkrechtstellung der S
gungsebenen setzt man den in Wellenform gebogenen Draht *gh* m
Stifte *z* senkrecht nach abwärts in ein Loch in der Mitte der Obers
Leiste *ef*, legt die Kugeln an die konvexe Außenseite des Drahtes und
den letzteren rasch zur Seite, so daß die Kugeln zum Schwingen kom

4. Stehende Longitudinalwelle. Die Schwingungsebenen
parallel *cd* gestellt, die Leiste *st* auf die Vorsprünge *p* und *q* gelegt,
die eingeschlagenen Drahtstifte nach vorn gerichtet sind, die Kugel
rechts und links an die Außenseite dieser Stifte gehängt und dann die
rasch nach rückwärts gezogen, so daß sämtliche Kugeln zugleich i
größten Exkursionen frei gelassen werden.

Jede der besprochenen Wellen kann aus der transversalen Schwin
weise in die longitudinale oder umgekehrt umgelegt werden [1].

Die Wheatstonesche Wellenmaschine, Fig. 607, besteht au
vertikalen Brette *BB'* mit einem horizontalen, ungefähr 1 cm

Fig. 607.



Schlitz *mn*, hinter welchem sich eine Walze *W* durch eine Kurbel *C*
läßt. Auf der Mantelfläche der Walze ist auf dunklem Grunde ein
Kurvensystem aufgetragen, welches im abgewickelten Zustande in F
abgebildet ist. Die Vorderseite des Brettes ist ebenfalls geschwärzt.
leicht einzusehen, daß man auf diese Weise durch den Durchschn

[1]) Vorteilhafte Modifikationen der Machschen Wellenmaschine si
A. Höfler und von K. Mack angegeben worden. Siehe Zeitschr. f. phys. u
Unterr. 9, 86 (1896) und 16, 265 (1903).

Das Meter wurde nach dem Decimalsy[illegible] und auf diese Weise erhalten folgende

Längenmaße

1 Myriameter (Mm)	10000	Meter (m)
1 Kilometer (km)	1000	
1 Hektometer (Hm)	100	
1 Dekameter (Dm)	10	
1 Meter (m)	1	
1 Decimeter (dm)	0,1	
1 Centimeter (cm)	0,01	
1 Millimeter (mm)	0,001	
1 Mikron (μ)	0,000001	Meter (m)

Wir geben des Zusammenhanges wegen auch die Zusa[illegible]stellung d[illegible] durch Quadrierung und Cubizierung abgeleiteten Maßeinheiten der Fläc[illegible] und des Volumens.

Flächenmaße

Quadrat-Kilometer (q km oder km²)	[illegible]	[illegible]
Quadrat-Hektometer (q Hm oder Hm²) = Hektar (ha)	[illegible]	
Quadrat-Dekameter (q Dm oder Dm²) = Ar (a)	[illegible]	
Quadrat-Meter (qm oder m²)	[illegible]	
Quadrat-Decimeter (qdcm oder dm²)	[illegible]	
Quadrat Centimeter (qcm oder cm²)	[illegible]	
Quadrat-Millimeter (qmm oder mm²)	[illegible]	

Volumenmaße

Cubikmeter (cbm oder m³) = Ster (st)	[illegible]	[illegible]
Cubikdecimeter (cdcm oder dm³)	[illegible]	
Cubikcentimeter (ccm oder cm³)	[illegible]	
Cubikmillimeter (cmm oder mm³)	[illegible]	[illegible]

Außer diesen direkt aus dem Längenmaße durch Cubizierung abg[illegible] leiteten Volumenmaßen sind noch folgende, nicht streng identische, aber se[illegible] nahe gleich große Volumenmaße, indirekt aus dem Kilogramm abgeleit[illegible] eingeführt (siehe § 34):

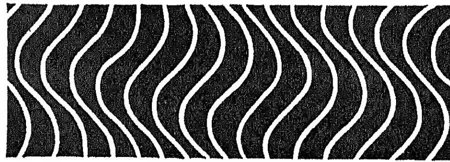
Kiloliter (kl)	1000	Liter
Hektoliter (hl)	100	
Dekaliter (Dl)	10	
Liter (l)	1	
Deciliter (dl)	0,1	
Centiliter (cl)	0,01	
Milliliter (ml)	0,001	
Mikroliter	0,000001	Liter

Dabei gilt als Liter das Volumen eines Kilogramms Wasser von 4[illegible] beim Normaldruck.

Von diesen sämtlichen Maßen und deren Bezeichnungen sind nicht a[illegible] gleich üblich. Von den Längenmaßen sind die gebräuchlichsten: Kilomet[illegible] Meter, Centimeter, Millimeter.

Kurven mit dem Schlitz jede Art periodischer Longitudinalbewegung darstellen kann. Die Figur zeigt das Kurvensystem für eine fortschreitende Welle; für eine stehende Welle muß eine andere Walze eingelegt oder der Überzug ihrer Mantelfläche vertauscht werden.

Fig. 608.



Dasselbe Prinzip kommt bei einer transparenten Wellenmaschine zur Anwendung, welche der Verfasser, ohne den Wheatstoneschen Apparat zu kennen, im Jahre 1857 konstruiert hat und welche vor dem eben beschriebenen den Vorteil voraus hat, daß man nicht allein die fertig gebildeten Longitudinal- und Transversalwellen, sondern auch solche, welche vor den Augen der Zuschauer erst entstehen, darstellen kann. Auch eignet sich die Transparentform besser für ein größeres Auditorium. Fig. 609 zeigt eine Abbildung dieses Apparates von der Rückseite, Fig. 610 von der Vorderseite. Im oberen Teile der undurchsichtigen, aus Pappe auf Holzrahmen bestehenden Wand ist eine horiontale Reihe vertikaler Schlitze von ungefähr $^1/_2$ cm Breite eingeschnitten, über welche ein Streifen Pausleinwand von etwas größerer Breite als die Schlitze hoch sind, in horizontaler Richtung vorübergezogen werden kann. Dieser Streifen wickelt sich von einer vertikalen Walze auf einer Seite ab und auf einer eben solchen auf der anderen Seite auf. Auf dem-

Fig. 609.

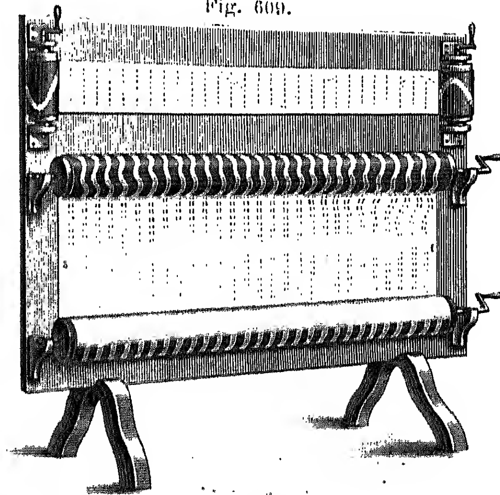
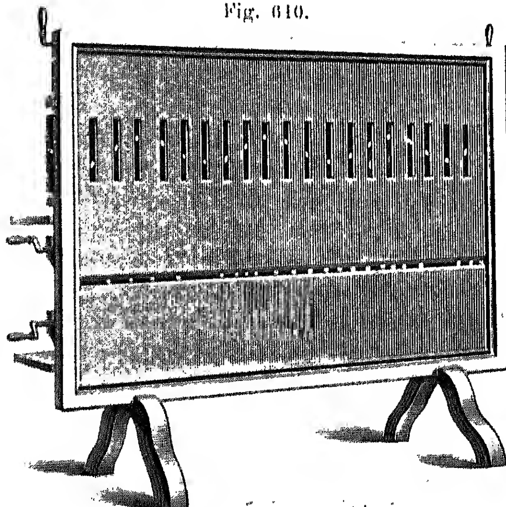


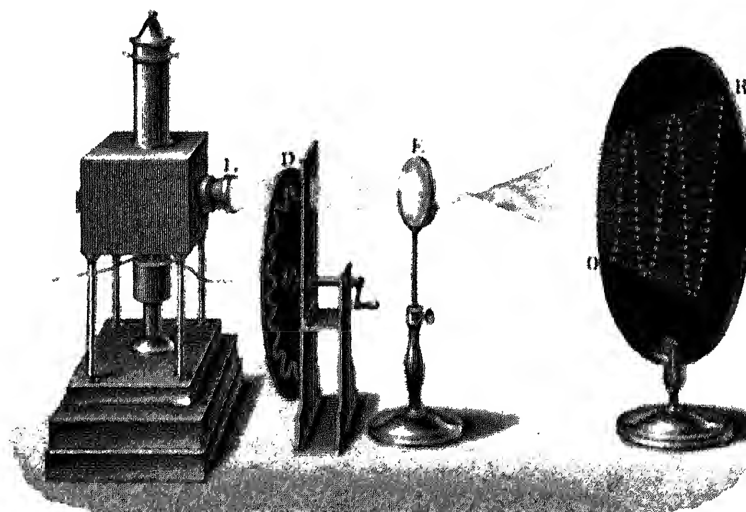
Fig. 610.



selben ist eine Transversalwelle transparent aufgezeichnet, der übrige
des Streifens ist geschwarzt, den Beginn der Welle macht eine
horizontale Linie. Im Transparent erscheint daher zuerst eine helle
reihe, welche dann von einem Ende her in transversale fortschreitende
gungen gerät.

Der untere Teil ist der Darstellung der Longitudinalwellen ge
Über den horizontalen Schlitz wird nach Art einer Gardine mittels
Walzen ein großes Stück Pausleinwand in vertikaler Richtung gezog
welcher in ähnlicher Weise, wie in Fig. 608, ein durchsichtiges Kurven
mit schwarzem Zwischengrunde aufgetragen ist. Auch hier ist die
nung so ausgeführt, daß zuerst eine ruhige Punktreihe erscheint,
allmählich in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Der Appara
noch ein paar Leisten, welche die Pausleinwand nahe an den Schl

Fig. 611.



drücken, sowie Vorrichtungen zur Beleuchtung, welche in der Zeichnun
gelassen sind. Endlich hat Crova dasselbe Prinzip in der Weise z
führung gebracht, daß er das Kurvensystem, welches die Schlitze o
Schlitz zu durchkreuzen hat, auf eine rotierende Scheibe auftrug
Apparat ist dann in solchen Dimensionen ausgeführt, daß das darzus
Objekt in die Bildebene eines Projektionsapparates (Laterna magi
Skioptikon) eingesetzt und die Wellen vergrößert auf einen weißen
projiziert werden können (s. Fig. 611). Dem Crovaschen Appara
außer einer Scheibe für die fortschreitende Transversalwelle noch
Scheiben für fortschreitende und stehende Longitudinalwellen beigege

Der Projektionsapparat kann übrigens auch für Wellenapparate na
Prinzip von Fig. 609 und 610 verwendet werden. Der ganze Apparat r
sich dadurch auf zwei geschwarzte Glasplatten, von denen die eine den
oder die Schlitze, die andere das Kurvensystem eingeritzt enthalt. N
Erfahrungen des Verfassers übt jedoch der Anblick dieser Projektion
sehr ermüdende Wirkung auf das Auge aus, was bei dem Apparate F
und 610 nicht der Fall ist.

Außer den hier beschriebenen Apparaten sind noch die auf mechanischer Nachahmung beruhenden Wellenmaschinen von Eisenlohr[1]) (Wasserwellen), Plücker und Fessel[2]), Schulze[3]) und Gerling[4]) zu erwähnen. Die letzteren sind insbesondere zur Darstellung der Lichtwellen geeignet. Endlich hat J. Müller die stroboskopische Scheibe von Stampfer, sowie Quincke die stroboskopische Trommel zur Darstellung von Wellenbewegungen benutzt. Auch Vorrichtungen zur Zusammensetzung von Wellen werden wir an der betreffenden Stelle beschreiben.

§ 201. Verschiedenheit der Schallempfindungen. Im § 193 haben wir bereits erwähnt, daß wir unter dem Namen Schall Gehörseindrücke verschiedener Art zusammenfassen. Zunächst unterscheiden wir zwischen Geräuschen (Zischen, Plätschern, Rasseln usw.) und musikalischen Klängen oder Tönen. Die Empfindung eines Klanges oder Tones wird durch regelmäßige Oszillationen des tönenden Körpers, also durch periodische Bewegungen hervorgebracht, während Geräusche von nicht periodischen Bewegungen herrühren[5]).

Die verschiedenen Klänge oder Töne unterscheiden sich aber untereinander

1. durch ihre Tonhöhe,
2. durch ihre Stärke,
3. durch ihre Klangfarbe.

Die alten Griechen hatten zwar die Unterschiede der Tonhöhe musikalisch richtig erfaßt, sie waren aber nicht imstande, dieselben physikalisch zu definieren. Allerdings hatte Pythagoras die musikalischen Intervalle durch Zahlen ausgedrückt, die er auf empirische Weise gefunden hatte. Er hatte nämlich die Erfahrung gemacht, daß man die Oktav, die Quint, die große Terz eines Tones erhält, wenn man die Saite, welche diesen Grundton gibt, bei unveränderter Spannung auf $^1/_2$, auf $^2/_3$, auf $^4/_5$ ihrer ursprünglichen Länge verkürzt, und er schloß daraus, daß das Intervall der Oktav durch das Zahlenverhältnis 1 : 2, das Intervall der Quint durch das Verhältnis 2 : 3 usw. charakterisiert sei. Die Beziehung dieser Zahlen zu den Tönen wurde aber im Altertume sowohl wie auch vorzugsweise im Mittelalter nur mystisch aufgefaßt und führte, indem man auch in anderen Dingen, z. B. unter den Gestirnen, ähnlichen Zahlenverhältnissen nachspürte, zu den wunderlichsten Träumereien, wie unter anderen zu denen über die Harmonie der Sphären, von denen sich selbst Männer von wissenschaftlichem Geiste, wie Kepler, nicht ganz frei zu machen imstande waren.

Erst im 17. Jahrhundert wurde es richtig erkannt, wodurch die Verschiedenheit der Tonhöhe bedingt und welches die physikalische Bedeutung der Pythagoraischen Zahlen sei. Diesen wichtigen Fortschritt verdankt die Wissenschaft dem Minoritenpater Mersenne, welcher sich schon durch die Übersetzung der Schriften Galileis ins Französische ein großes Verdienst

[1]) Lehrb. d. Physik, 11. Aufl. von P. Zech, S. 137.
[2]) Pogg. Ann., Bd. LXXVIII.
[3]) Ebend., Bd. C, S. 583.
[4]) Ebend., Bd. CV, S. 175.
[5]) Näheres hierüber: E. Brücke, „Über die Wahrnehmung der Geräusche". Wien. Akad. Ber. XC, III. Abt., S. 199 (1885).

um die exakte Mechanik erworben hatte. Ganz im Geiste der Galilei
Forschung unternahm Mersenne die Untersuchung der Schwingungsge
gespannter Saiten, deren Resultate er im Jahre 1636 in einem Werke
öffentlichte, welches den Titel: *Harmonicorum libri XII* führt.

Mersenne stellte zuerst den Satz auf, daß die Tonhöhe nur von
Schwingungsdauer des tönenden Körpers oder, was dasselbe
von seiner Schwingungszahl, d. h. von der Anzahl der Sch
gungen abhänge, welche er in einer gegebenen Zeit, etwa in e
Sekunde, ausführt.

Die Töne sind um so höher, je größer ihre Schwingung
oder je kleiner ihre Schwingungsdauer ist.

Welches die Schwingungszahl der verschiedenen Töne ist und wie
dieselbe ermitteln kann, wird weiter unten besprochen werden.

Die Stärke oder Intensität des Tones hängt von der Amplitude
der Schwingungsweite der Schwingungen ab, welche der tönende Körper m
und zwar ist die Stärke des Tones dem Quadrat der Ampli
proportional.

Unter Klangfarbe oder Klangcharakter versteht man die E
tümlichkeiten, durch welche man bei gleicher Tonhöhe und gleicher S
den Ton verschiedener Instrumente unterscheiden kann. So hat z. B
selbe Ton einen ganz anderen Charakter, je nachdem er von einer V
oder von einer Klarinette oder von einer Trompete herrührt.

Das Wesen der Klangfarbe ist vorzugsweise durch die Untersuch
von Helmholtz ermittelt worden; wir werden darauf später zurückkom

§ 202. Geschwindigkeit des Schalles in Luft. Alle Töne, we
auch ihre Höhe, ihre Intensität und ihre Klangfarbe sein mag,
breiten sich in der Luft sehr nahe mit gleicher Geschwindig
denn wenn an einer bestimmten Stelle ein Konzert aufgeführt und vo
schiedenen Beobachtern in verschiedenen Entfernungen angehört wi
hören sie denselben Takt, dieselbe Harmonie. Wenn etwa die tiefen
den hohen merklich voraneilten oder umgekehrt, so würde bald aller
aufhören, und was in einer Entfernung von 10 Schritten eine Harmon
würde in einer Entfernung von 100 Schritten die unerträglichste
phonie sein.

Mersenne bestimmte die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des S
in der Luft zu 1378, die Florentiner Akademiker bestimmten sie im
1660 zu 1111 Pariser Fuß. Seitdem sind zu gleichem Zwecke viel
suche angestellt worden, deren Resultate man im fünften Bande von P
dorffs Annalen, S. 476 zusammengestellt findet. Hier wollen wir di
suche besprechen, welche im Jahre 1822 in der Nähe von Paris zw
den Orten Villejuif und Montlhéry von Prony, Arago, Mathieu,
holdt, Gay-Lussac und Bouvard angestellt wurden. An beiden
waren Zwölfpfünder aufgestellt, welche während der Nacht abwechse
Zwischenzeiten von fünf Minuten abgefeuert wurden. Auf diese Weise
der Einfluß der Windrichtung eliminiert werden, da man annehmen
daß derselbe die Schallbewegung nach der einen Richtung ebensov
günstigte als die nach der entgegengesetzten hemmte.

Die Beobachter zu Villejuif hörten vollkommen gut alle Schüsse von Montlhéry, jeder von ihnen beobachtete auf seinem Chronometer die Zeit, welche von dem Moment der Lichterscheinung an bis zur Ankunft des Schalles verging. Die größte Differenz zwischen den Resultaten der drei Beobachter bei einem und demselben Versuche überstieg nicht $^3/_{10}$ bis $^4/_{10}$ Sekunden. Die längste beobachtete Zeit war 55, die kürzeste 51,7, das Mittel 54,84 Sekunden.

Zu Montlhéry konnte man nur 7 von den 12 Schüssen von Villejuif hören, und von diesen 7 wurde auch nicht ein einziger von den drei Beobachtern zugleich gehört; doch stimmen die Resultate ziemlich gut überein. Die längste Zeit war 54,9, die kürzeste 53,9, das Mittel 54,43 Sekunden.

Man kann demnach als Mittel für die Zeit, welche der Schall brauchte, um sich von einer Station bis zur anderen fortzupflanzen, 54,6 Sekunden annehmen.

Aus diesen Daten und der von Arago durch Triangulation ausgemittelten Distanz von 9549,6 Toisen läßt sich eine Geschwindigkeit von 174,9 Toisen = 340,88 m per Sekunde ableiten. Dieses Resultat, welches bei der Temperatur 16° und einer Luftfeuchtigkeit von 78° Saussure erhalten worden, gibt für 0° und trockene Luft eine Geschwindigkeit von 331,05 m.

Wir geben hier noch eine Übersicht der späteren direkten[1]) Messungen der Schallgeschwindigkeit.

Moll und van Beek[2]) erhielten 1823 bei Amsterdam nach einem dem obigen ähnlichen Verfahren den Wert	332,26 m
Nach späterer Berechnung von Schröder van der Kolk	332,77 m
Régnault[3]) 1862 und 1863 aus Versuchen mit Pistolenschüssen in langen, verschieden weiten Wasserleitungsröhren der Stadt Paris Werte zwischen	334,16 und 325,66 m
Derselbe in einer Röhre von 1,1 m Durchmesser auf eine Wegstrecke von beinahe 20 000 m den Mittelwert	330,6 m
Auf eine Wegstrecke von beinahe 20 000 m den Minimalwert	330,3 m
Derselbe aus Versuchen mit Kanonenschüssen in freier Luft	330,7 m
Le Roux[4]) in Röhren nach ähnlicher Methode	330,66 m

Bei Régnaults Versuchen wurden sowohl Abgang als Ankunft des Schalles automatisch durch elektrische Ströme registriert und die Zeiten mittels Stimmgabelchronographen gemessen. Seine Versuche ergaben, daß die Schallgeschwindigkeit mit der Entfernung von der Schallquelle anfangs rascher, später immer langsamer abnimmt. Sie betrug z. B. auf 1281 und 2445 m Distanz von der Kanone 331,37 und 330,7 m.

---

[1]) Die indirekten Bestimmungen aus Schwingungszahl und Wellenlänge können wir erst an anderer Stelle bringen.

[2]) Pogg. Ann. 5, 351, 469.

[3]) Compt. rend. 67, 209.

[4]) Ann. de chimie et de phys. 4. Ser., T. 12.

Die Schallgeschwindigkeit in Röhren ist desto geringer, je en… Röhre und je tiefer der Ton ist, doch ist die Abnahme rascher als … Durchmessers der Röhre.

Helmholtz[1]) suchte diese von Kundt[2]) nachgewiesene Tatsach… Berücksichtigung der Reibung zu erklären. Da dies noch nicht g… brachte Kirchhoff[3]) auch noch den Wärmeverlust an die Wände in… nung, und da auch dies noch nicht hinreichte, vermutete er, daß a… Wärmestrahlung mitwirke. Aber auch das Material der Röhren ist v… fluß. So erhielt F. A. Schulze bei neueren Versuchen nach der Qui… schen Interferenzmethode folgende Werte:

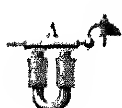
	Tonhöhe	Geschwin… m
Glasröhre von 1,01 mm Durchmesser	512	265…
„ „ 1,01 mm	384	258…
„ „ 1,51 mm	512	290…
„ „ 1,51 mm	384	282…
Messingröhre von 0,99 mm	512	208…
„ „ 0,99 mm	[illegible]	189…
„ „ 1,48 mm	512	253…
„ „ 1,48 mm	384	[illegible]
Kautschukröhre von 1,59 mm Durchmesser	512	195…

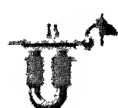
Durch Röhren von 0,5 mm und darunter gelang es überhaupt nicht, einen Schall durchzusenden.

J. Bosscha[4]) hat 1853 zuerst eine Methode der Messung der … geschwindigkeit auf kürzere Distanzen vorgeschlagen, welche dan… König[5]) in Paris verwirklicht wurde. Es ist die Methode der S… koinzidenzen.

Man denke sich in *A* und *B*, Fig. 612, zwei Schlagwerke, welche … gleichzeitig jede Sekunde einen Schlag geben. Bei *O* in der gerade… längerung der Linie *AB* befinde sich ein Ohr. Offenbar wird dassel…

Fig. 612.





n ten Schlag des Werkes *A* zugleich mit dem *n* + 1 ten Schlage des … *B* zugleich hören, wenn der Abstand von *A* bis *B* gleich der Schallgeschw… keit ist. Man hat also die beiden Schlagwerke nur so lange zu entferne… zu nähern, bis in *O* die Sekundenschläge genau zusammenfallend … werden. Die Entfernung der Schlagwerke ist dann gleich der Schallges… digkeit. Würden die Schlagwerke ihre Schläge in Zeitintervallen v… Sekunde geben, so wäre die zugehörige Entfernung gleich dem zehnte… der Schallgeschwindigkeit.

[1]) Verhandl. d. naturw.-med. Vereins zu Heidelberg 1863, Bd. III, S. 1…
[2]) Monatsber. d. Berliner Akad., 19. Dezbr. 1867, Pogg. Ann. 135.
[3]) Pogg. Ann. 134, 177 (1868).
[4]) Ebend. 92.

König verwendete Schlagwerke der letzteren Art, die auf elektromagnetischem Wege gleichzeitig durch eine stromunterbrechende Stimmgabel in Bewegung gesetzt wurden. Eine verwandte, etwas kompliziertere Methode wurde von Bosscha ausgeführt[1]).

Kahl[2]) hat noch die weitere Vereinfachung vorgeschlagen, sich mit einem Schlagwerke so lange einer Wand zu nähern, bis das Echo jedes Schlages mit dem nächsten direkt gehörten Schlage zusammentrifft. Offenbar ist dann der Abstand des Schlagwerkes von der Wand gleich dem halben Wege, den der Schall im Zeitintervall zwischen zwei Schlägen zurücklegt.

Auf anderem Wege ist es durch Verfeinerung der Messungsmethoden gelungen, die Geschwindigkeit des Schalles innerhalb noch viel kürzerer Strecken zu bestimmen. So z. B. hat Tumlirz[3]) solche Bestimmungen an einer Blechröhre von 21 m Länge und 2,4 cm Weite vorgenommen. Die allerkurzesten Distanzen sind aber bei den Messungen von E. Mach[4]) über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionswellen, insbesondere der durch einen elektrischen Funken hervorgerufenen Wellen zur Anwendung gekommen. Wir konnen die dabei angewendeten Messungsmethoden hier noch nicht bebeschreiben, wollen aber schon jetzt mitteilen, daß sich dabei das überraschende Resultat ergeben hat, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit heftiger Schallimpulse in nächster Nähe des Entstehungsortes bedeutend höhere Werte erreichen kann. So z. B. ergab sich

für einen Abstand von der Schallquelle gleich	eine Geschwindigkeit von
80 mm	756 m pro Sekunde
137 „	540 „ „ „
254 „	453 „ „ „
400 „	416 „ „ „
977 „	373 „ „ „

Wenn wir unter normaler Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles jene verstehen wollen, bei welcher die Schwingungsamplituden verschwindend klein sind, so können wir für trockene Luft bei 0° Régnaults Wert 330,7 m annehmen. Fur Luft mittlerer Temperatur und Feuchtigkeit kann rund 340 m gelten.

§. 203. Beziehungen zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Schwingungszahl. Ein schwingender Körper mache pro Sekunde n Schwingungen und die dadurch hervorgerufene Wellenbewegung pflanze sich per Sekunde auf eine Strecke von C Metern fort. Da jeder Hin- und Hergang des schwingenden Körpers je eine Welle hervorruft, so müssen längs der Strecke C eine Anzahl $= n$ Wellenlängen vorhanden sein. Daraus folgt, daß die Wellenlänge λ ausgedrückt wird durch:

---

[1]) Man vergleiche auch Röber, Berl. Ber. für 1862, 18, 129 und D. Kahl in Schlömilchs Zeitschrift 1864, S. 64.

[2]) l. c.

[3]) Tumlirz, Wien. Akad. Ber. 80, 439 (1879).

[4]) Mach und Sommer, Wien. Akad. Ber. 75 (1877); E. Mach, O. Tumlirz und C. Kögler, Wien. Akad. Ber. 77, 7 (1877).

$$\lambda = \frac{C}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und daß

$$C = n\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

sowie

$$n = \frac{C}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

sein müsse.

Die Wellenlänge eines Tones verhält sich also (in dems
Medium) umgekehrt wie die Schwingungszahl.

Bei gleicher Schwingungszahl (gleicher Tonhöhe) ve
sich in verschiedenen Medien die Wellenlänge wie die
pflanzungsgeschwindigkeit.

Da die Schwingungsdauer $t = \frac{1}{n}$ ist, so gelten auch die Beziehu

$$\lambda = tC \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$C = \frac{\lambda}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$t = \frac{\lambda}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

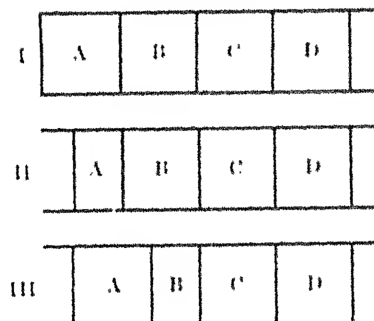
Wir werden für diesen Zusammenhang später experimentelle
und Beispiele bringen.

**§ 204. Berechnung der Schallgeschwindigkeit aus der Dich
der Elastizität des Mediums.** Diese Berechnung ist zuerst von N
im zweiten Buche seiner „Philosophiae naturalis principia mathematica
entwickelt worden. Newton erhielt daselbst für die Schallgeschwindi
in einem Medium von der Dichte D und dem Drucke P die Formel:

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wir können diesen Ausdruck, welcher gewöhnlich mit den Mitt
höheren Analysis abgeleitet wird, auf elementarem Wege folgende

Fig. 613.



[1]) P und D sind im CGS-System zu messen, man erhält dann au
Centimetern.

ewinnen. Wir denken uns in einer Röhre mit dem konstanten Querschnitt om Flächeninhalt = Eins eine Reihe von gleich dicken Schichten A, B, ' usw. des elastischen Mediums, z. B. Luft, abgegrenzt (Fig. 613 I).

Die Dicke jeder dieser Schichten sei durch S, der Druck, welchen sie auf en Querschnitt = Eins ausübt, durch P ausgedrückt.

Wird nun die erste Schicht A plötzlich so komprimiert, daß, wie 'ig. 613 II zeigt, ihre linksseitige Begrenzung um die Strecke s nach rechts orrückt, also die Dicke der Schicht auf $S - s$ reduziert wird, so muß die Dichtigkeit, also auch die Spannkraft des Mediums innerhalb dieser Schicht m einen Betrag p wachsen. Nehmen wir mit Newton (vorläufig) an, daß ies nach dem Boyleschen (Mariotteschen) Gesetze erfolge, so ergibt ich aus

$$S - s : S = P : P + p$$

$$pS - ps = Ps.$$

Da in den meisten Fällen sowohl s als auch p gegenüber S und P sehr lein sind, so verschwindet das Glied ps und ergibt sich mit genügender Annäherung:

$$p = P \frac{s}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Schicht B hat also jetzt von links her den Druck $P + p$, von rechts en Druck P auszuhalten; es bleibt daher als beschleunigende Kraft die ifferenz p wirksam.

Nach einer gewissen Zeit $= t$ wird die erste Schicht wieder ihre ursprüngche Dichte und Dicke angenommen haben und die Verdichtung ganz auf 'e Schicht B übergegangen sein (Fig. 613 III).

Die Wellenbewegung ist dann um die Strecke gleich der Dicke S forterückt. Die Geschwindigkeit derselben ist also

$$C = \frac{S}{t}, \text{ mithin } t = \frac{S}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Während die Verdichtung von A auf B übergeht, nimmt die bewegende raft von p bis 0 ab, denn in dem Moment, der durch Fig. 613 III vorestellt ist, ist die Dichtigkeit zu beiden Seiten der Schicht B gleich groß. Der mittlere Wert der beschleunigenden Kraft, welche die Verdichtung von B ewirkt hat, kann also $= \frac{p}{2}$ gesetzt werden. Da durch diese Kraft die chicht B um den Weg s vorgedrängt wurde, so ist die dabei geleistete rbeit gegeben durch den Ausdruck $\frac{ps}{2}$.

Diese Arbeit muß der Größe nach gleich sein der lebendigen Kraft die araus hervorging.

Ist die Dichte des Mediums im nicht komprimierten Zustande $= D$, so t die in der Schicht B von der Dicke S und dem Querschnitt Eins enthalene Masse gleich $D \, . \, S$. Der Schwerpunkt dieser Masse wurde offenbar um e Strecke $\frac{s}{2}$ verschoben, und zwar innerhalb der Zeit t. Betrachten wir e dabei wirksame Kraft als eine konstante, so ergibt sich (nach § 38, 6)

für die Endgeschwindigkeit der Wert $\frac{s}{t}$, für die lebendige Kraft der

$$\frac{D \cdot S \cdot s^2}{2t^2}.$$

Setzen wir diesen Wert gleich jenem der aufgewendeten Arbeit, kommen wir die Gleichung

$$\frac{ps}{2} = \frac{DSs^2}{2t^2}$$

und nach Substitution der oben unter (2) und (3) gefundenen Werte und t folgt hieraus:

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}}.$$

Wir wollen nun nach dieser theoretischen Formel die Schallgeschw keit in trockener Luft von 0° berechnen.

Der Druck der Luft auf 1 qcm ist gleich dem Drucke einer Queck säule von 1 qcm Basis und 76 cm Höhe. Da das spezifische Gewich Quecksilbers = 13,5953, so ist also der Druck der Luft auf 1 qcm dem einer Masse von 13,5953 . 76 = 1033,243 g. Diese im Gravita Maßsystem ausgedrückte Druckkraft (Spannkraft) erhalten wir nach lutem Maße, indem wir mit $g = 980,6$ multiplizieren, gleich 10 . 980,6 = 1013 198 Dynen. Dies ist die Größe P. Die Dichte der L d. h. die Masse von einem Cubikcentimeter derselben in Grammen, 0,001 293.

Setzt man diese Werte in die Formel für C, so erhält man

$$C = 27\,993 \text{ cm} = 279,93 \text{ m}.$$

Dieses Resultat ist nun aber mit der Erfahrung nicht in Überei mung, sondern viel zu klein, da die wirkliche Schallgeschwindigkei § 202 nahezu 331 m beträgt. Die Ursache dieser Nichtübereinsti wurde von La Place aufgedeckt; sie liegt in der Unrichtigkeit der An daß die Spannkraft der Luft bei der Verdichtung nach dem Boyl (Mariotteschen) Gesetze wachse. Da nämlich durch die Verdichtu Luft erwärmt wird, so wächst ihre Spannkraft in einem rascheren hältnis. In der Wärmelehre wird gezeigt werden, daß man die wi Spannkraft erhält, indem man dem oben berechneten Werte von p n Faktor den Quotienten der beiden Wärmekapazitäten für konstanten und konstantes Volum hinzufügt. Dieser Quotient $\frac{c_p}{c_v}$ hat für Luft Röntgen[1]) den Wert 1,4053; setzt man diesen in die von La Pla gänzte Formel:

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}\frac{c_p}{c_v}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

so erhält man $C = 331,16$ m, was mit dem beobachteten Werte seh übereinstimmt.

[1]) Poggend. Ann. **148**, 580 bis 624. Da das Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$ schwieri bestimmen ist als die Schallgeschwindigkeit, so hat man oft umgekehrt je dieser berechnet.

Die in Deutschland offiziell eingeführten Namen Stab, Neuzoll und Strich für letztere drei Längenmaße haben sich glücklicherweise nicht eingebürgert.

Von den Flächenmaßen sind die gebräuchlichsten: Hektar (als Feldmaß), Quadratmeter, Quadratdecimeter, Quadratcentimeter und Quadratmillimeter.

Von den Volumenmaßen sind am meisten gebräuchlich Cubikmeter, Hektoliter, Liter, Deciliter, Cubikcentimeter.

Das Metermaßsystem ist in den meisten zivilisierten Staaten gesetzlich, in Großbritannien, Rußland und den Vereinigten Staaten Nordamerikas wenigstens fakultativ eingeführt und in der Wissenschaft überall fast ausschließlich gebraucht. Da aber manchmal ältere Messungen umzurechnen sind, so geben wir hier eine Vergleichstabelle derselben:

1 Meter	= 3,078 444	Pariser Fuß [1]),
1 „	= 3,186 199	rheinländische Fuß (Preußen, Dänemark),
1 „	= 3,280 843	englische, russische Fuß [2]),
1 „	= 3,163 446	österreichische (Wiener) Fuß,
1 „	= 3,333 333	schweizerische, badensische Fuß,
1 „	= 3,426 310	bayerische Fuß,
1 „	= 3,490 52	württembergische Fuß,
1 „	= 3,531 20	sächsische Fuß,
1 „	= 3,423 55	hannoversche Fuß.

§ 16. Berücksichtigung der Temperatur bei Längenmessungen.

Richtig angefertigte Maßstäbe haben, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, eine solche Teilung, daß sie bei 0° C den Unterabteilungen des internationalen Meter-Prototyps entspricht. Bei anderen Temperaturen ist aber infolge der Ausdehnung die Länge der Teile eine andere. In der Wärmelehre, der wir hier vorgreifen müssen, werden wir hören, daß ein Maßstab, dessen Länge bei 0° $= M_0$ ist, bei t^0 eine Länge $M_t = M_0 + M_0 \mu t = M_0 (1 + \mu t)$ annimmt, wobei μ der lineare Ausdehnungskoeffizient für das Material des Maßstabes ist. Dieselbe beträgt beispielsweise bis zu 40° C für:

Glas	$\mu =$	0,000 007 97
Platin-Iridium 9 : 1	$\mu =$	0,000 008 73
Stahl	$\mu =$	0,000 010 56
Messing	$\mu =$	0,000 018 12
Silber	$\mu =$	0,000 018 63

Hiernach wird ein Meterstab aus Platin-Iridium bei der Erhöhung der Temperatur von 0 bis 30° sich um 0,261 mm verlängern, während ein solcher von Messing um 0,543 mm, also mehr als um das Doppelte länger wird.

Mißt man nun mit einem solchen Maßstabe einen anderen Körper bei der Temperatur t, so ergibt die Messung, daß eine gewisse Länge des letzteren bei t^0, die wir mit L_t bezeichnen wollen, gleich sei einer bestimmten Länge auf dem Maßstab ebenfalls bei t^0; dieselbe sei M'_t. Das Resultat der Vergleichung ist also

$$L_t = M'_t.$$

[1]) Gemäß der ursprünglichen Definition des Meters $= \frac{1}{10\,000\,000}$ Erdquadrant. Nach direkten Vergleichungen mit der Toise von Peru à points 3,078 500 mit der Toise à bouts 3,078 360.

[2]) Gemäß der neuesten und genauesten Vergleichung des engl. Yards (3 Fuß) mit dem internationalen Meter-Prototyp durch Benoit 1896.

Von der Größe des Luftdruckes ist die Schallgeschwindigkeit unabhängig, weil durch eine Änderung des ersteren sowohl P als D im gleichen Verhältnis geändert werden. Der Quotient $\frac{P}{D}$ bleibt also bei allen Barometerständen derselbe und folglich auch die Schallgeschwindigkeit, dagegen ändert sich diese sehr beträchtlich mit der Temperatur und auch ein wenig mit dem Feuchtigkeitsgehalt derselben.

Ist die Dichte der Luft bei $0^0 = D_0$, so ist sie bei t^0 gleich $\frac{D_0}{1 + \alpha t}$, wobei α der Ausdehnungskoeffizient der Luft $= 0{,}00367$ ist. Enthält die Luft Wasserdampf von der Spannkraft f bei einem Barometerstande b und einer Temperatur t, so ist ihre Dichte gleich

$$D_0 \cdot \frac{b - 0{,}377\, gf}{760\,(1 + 0{,}00367\, t)}.$$

Dabei sind f und b in Millimetern auszudrücken. Dieser Wert der Dichte ist in die Formel für C einzusetzen.

Drückt man die Größe P, wie es gebräuchlicher ist, statt in absolutem Maße durch die Höhe h einer Quecksilbersäule aus, so ist $P = gh\sigma$ zu setzen, wobei σ das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet.

Die vollständige Formel für die Schallgeschwindigkeit in irgend einem Gase, dessen Dichte im Normalzustande (verglichen mit Wasser) $= D$, dessen Temperatur $= t^0$, welches beim Barometerstande b mit Wasserdampf von der Spannkraft f gemischt ist und für welches das Verhältnis der Wärmekapazitäten $\frac{c_p}{c_v}$ gleich k ist, lautet demnach:

$$C = \sqrt{\frac{gh\sigma}{D} \cdot \frac{760\,(1 + 0{,}00367\, t)}{b - 0{,}3779\, f}\, k} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Dabei sind b und f in Millimetern, g und h in Metern auszudrücken, um C ebenfalls in Metern zu erhalten.

Wie die Formel zeigt, **vermehren gesteigerte Temperatur und Wassergehalt die Schallgeschwindigkeit.** Für Luft von mittlerer Zimmertemperatur und mittlerer Feuchtigkeit kann sie rund zu 340 m angenommen werden. Für andere Gase erhält man sie, indem man den Wert für Luft durch die Quadratwurzel aus der Dichte des Gases dividiert. So findet man beispielsweise für Wasserstoff $c = 1257$ m, für Kohlendioxyd $c = 267$ m [1].

[1] Die hier mitgeteilte Ableitung der Formel für die Geschwindigkeit des Schalles ist in einer englischen Kritik als ungenügend bezeichnet worden. Es ist in der Tat nicht leicht, ohne Hilfe der höheren Mathematik eine einfache und doch strenge Ableitung zu geben. Wir teilen hier noch eine elementare Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Röhren mit, die wir Herrn Prof. Waßmuth verdanken.

Es mögen bedeuten:

C die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit,
T die Dauer einer ganzen Schwingung hin und zurück,
t die Zeit seit Beginn der fortschreitenden Bewegung vom Punkte 0 aus,
x die in dieser Zeit zurückgelegte Wegstrecke der Schallwelle,
y die zur Zeit t im Punkte x erlangte Elongation,
λ die Wellenlänge,
a die Amplitude.

§ 205. Schallgeschwindigkeit in tropfbar flüssigen und in festen Körpern. Die Formel (1) des vorausgehenden Paragraphen

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}}$$

ist auch auf tropfbar flüssige und feste Körper anwendbar, wobei man nur für P den entsprechenden Wert einzusetzen hat.

Es gilt dann, wie im § 207 gezeigt werden wird,

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} = \frac{x}{\lambda}\right)$$

oder da $\frac{\lambda}{T} = C$

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Wäre die Welle eine stehende, so würde sich y in einem Zeitelement τ ändern um $y'\tau$, wobei y' die momentane Geschwindigkeit vorstellt. Da außerdem die Welle in der Zeit τ um ξ fortschreitet, so wird sich innerhalb der kleinen Strecke ξ das y überdies ändern um eine Größe $y_x \xi$. Die gesamte Änderung von y wird dann also betragen $y'\tau + y_x\xi$. Diese Änderung muß wieder verschwinden für einen Punkt der Abszisse, die um eine Wellenlänge absteht. Setzen wir dieselbe = Null, so folgt

$$\frac{\xi}{\tau} = -\frac{y'}{y_x} = C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

denn da ξ der Weg in der Zeit τ ist, so ist $\frac{\xi}{\tau}$ die Geschwindigkeit C. Daraus folgt dann

$$y_x = -\frac{y'}{C} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Es ist nun unschwer einzusehen, daß auch für die Dichte und den Druck der Luft, die sich ja in gleicher Weise periodisch ändern, gleichartige Beziehungen bestehen müssen.

Bezeichnen wir mit D die Dichte im Ruhezustande, mit d den momentanen Wert der veränderlichen Dichte, so können wir setzen

$$d = D(1 + \delta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und da δ eine sehr kleine Größe vorstellt, ist deren Änderung analog mit (3)

$$\delta_x = -\frac{\delta'}{C}.$$

Für die Änderungen des Druckes mit dem Volum gilt, da es sich um eine adiabatische Kompression (siehe Wärmelehre) handelt, das Poissonsche Gesetz $p v^k = Const.$

Führt man statt der Volumina die reziproken Dichten ein, so folgt, wenn wir wieder mit P den Anfangsdruck und mit p den veränderlichen momentanen Wert desselben bezeichnen,

$$\frac{p}{d^k} = \frac{P}{D^k}$$

und mit Rücksicht auf (4)

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{d}{D}\right)^k = (1 + \delta)^k = 1 + k\delta,$$

da δ sehr klein ist; so daß dessen höhere Potenzen verschwinden. Also

$$p = P(1 + k\delta).$$

Indem wir nun wiederum schließen, daß die Druckänderung $Pk\delta$ dem Gesetze (3) unterliege, setzen wir

$$p_x = -\frac{p'}{C} = -\frac{Pk\delta'}{C} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Bedeutung von P ist aus Gleichung (2) § 203 ersichtlich. Es folgt aus ihr

$$P = S\,\frac{p}{s}.$$

P ist also das Verhältnis zwischen einer Drucksteigerung p und der zugehörigen Verkürzung s, einer Schicht des Mediums von der Länge S und

---

Die Luftschicht vom Querschnitt 1 und der Dicke ξ hat bei der Dichte d die Masse ξd. Bezeichnen wir die ihr erteilte Beschleunigung mit y'', so ist die wirksame Kraft $\xi d y''$. Diese ist identisch mit dem Überdruck. Die andere Fläche erleidet den Druck p, die rückwärtige den Druck $p + p_x \xi$, der Überdruck beträgt demnach $p - (p + p_x \xi) = - p_x \xi$.

Setzen wir diesen gleich der wirksamen Kraft, so kommt

$$- p_x \xi = \xi d y''$$

$$y'' = - \frac{p_x}{d}$$

oder nach (5)

$$y'' = \frac{P_x \delta'}{d \,.\, C} \quad \text{. . . . . (6)}$$

Es ist klar, daß der Zusammenhang der Luft fortbestehen muß. Ist ihre Dichte zu irgend einer Zeit $= D(1 + \delta)$, ihre Masse $= D(1 + \delta)\xi$, so ändert sich diese in der Zeiteinheit um $D\delta'\xi$. Da ferner y' die Geschwindigkeit des Querschnittes darstellt, so schiebt sich durch die vordere Fläche ein Zylinder von der Masse dy' hinein, während durch die hintere um ξ entfernte Fläche die Masse $d(y' + y_x \xi)$ austritt. Es verbleibt also ein Massenzuwachs $dy' - d(y' + y'_x \xi) = - dy'_x \xi$. Diese Massenänderung muß der obigen $D\delta'\xi$ gleich sein. Also

$$- dy'_x \xi = D\delta'\xi.$$

Da D und d bis auf Größen höherer Ordnung gleich sind, so können wir setzen

$$- y'_x = \delta' \quad \text{. . . . . (7)}$$

und da auch y' dem Gesetze (3) folgt, so muß

$$- y'_x = \frac{y''}{C}$$

sein, also wegen (7)

$$y'' = C\delta'.$$

Mit Rücksicht auf (6) ergibt sich demnach

$$C\delta' = \frac{Pk\delta'}{dC},$$

woraus, da für d D gesetzt werden kann,

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}k} = \sqrt{\frac{P}{D} \cdot \frac{c_p}{c_v}}.$$

In dieser Rechnung ist von Anfang an angenommen, daß die Schwingungen harmonische (nach dem Pendelgesetz für kleine Amplituden vor sich gehende) seien, was wiederum voraussetzt, daß die elastische Kraft in jedem Momente proportional der Elongation sei. Das ist im allgemeinen sicher nicht der Fall und kann nur für verschwindend kleine Amplituden und Dichteänderungen als annähernd angenommen werden. Bei starken Schallerregungen sind in der Nähe derselben die Amplituden sicher von größerem Werte und infolgedessen die Spannkräfte rascher ansteigend als die Elongationen, daher auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine größere als die oben berechnete. Das ist denn auch beobachtet. Nach den angeführten Messungen von E. Mach haben z. B. Explosionswellen des elektrischen Funkens in 80 mm Abstand eine Geschwindigkeit von 756 m pro Sekunde, also eine doppelt so große als die normale, welche erst in Entfernungen über 1 m erreicht wird.

dem Querschnitte Eins. Setzen wir die Länge $S = 1$ voraus, so ist die Masse der Schicht gleich ihrer Dichte D, ihr Druck auf die Unterlage $= gD$. Bezeichnen wir die diesem Drucke entsprechende Verkürzung wieder mit s, so ist

$$P = \frac{gD}{s},$$

mithin

$$C = \sqrt{\frac{g}{s}\frac{P}{P}} = \sqrt{\frac{g}{s}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Formel kann sowohl für tropfbar flüssige als auch für feste Körper zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit benutzt werden. Die Größe s bedeutet dabei jedesmal die Verkürzung (oder Verlängerung), welche eine Schicht von der Länge Eins erfährt, wenn auf sie der Druck (oder der Zug) einer ihrer eigenen Masse gleichen Belastung ausgeübt wird.

Für tropfbare Flüssigkeiten wird s aus ihrer Zusammendrückbarkeit durch den Druck einer Atmosphäre berechnet. Das Wasser wird z. B. durch den Druck einer Atmosphäre um 47,85 Milliontel seines Volumens zusammengedrückt; durch den Druck einer Atmosphäre wird also eine 1 m lange Wassersäule in einer unelastischen Röhre um 47,85 Milliontel Meter verkürzt. Der Druck einer Atmosphäre entspricht aber einem Quecksilberdrucke von 0,76 m oder bei einer Temperatur von 10° C dem Drucke einer Wassersäule von 10,2934 m; eine Wassersäule von 1 m Höhe würde also eine Verkürzung von $\frac{0{,}000\,047\,85}{10{,}2934}$ oder 0,000 004 648 6 m hervorbringen, und dies ist der Wert von s für Wasser; substituiert man diesen Wert von s in der Formel, so findet man, daß die Geschwindigkeit des Schalles in Wasser von 10° C 1453 m in der Sekunde beträgt.

Die vorstehende Formel kann leicht auf folgende Weise umgeformt werden:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}806 \,.\, 0{,}76 \,.\, 13{,}544 \,.\, 1\,000\,000}{\sigma \,.\, c}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wo σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, im Vergleich zum Wasser, und c ihre Zusammendrückbarkeit für 1 Atmosphäre bezeichnet.

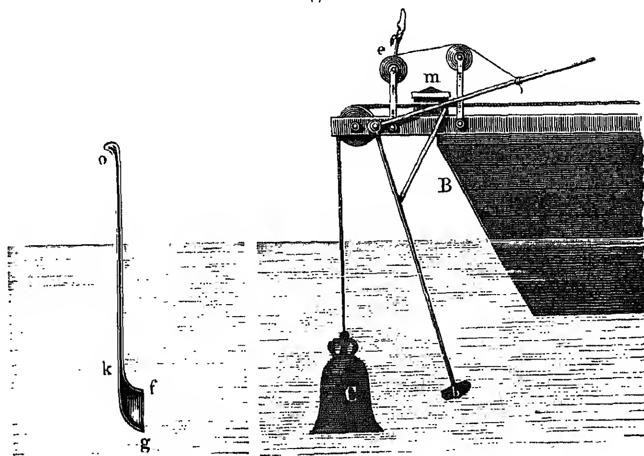
Nach dieser Formel ist die Geschwindigkeit des Schalles in folgenden Flüssigkeiten bei 10° C berechnet:

Name der Flüssigkeiten	Spezifisches Gewicht	Zusammendrückbarkeit	Geschwindigkeit des Schalles m
Äther	0,712	131,35	1039
Alkohol	0,795	94,95	1157
Terpentinöl	0,870	71,35	1276
Wasser	1,000	47,85	1453
Quecksilber	13,59	3,38	1484
Wasser mit Ammoniak gesättigt . . .	0,9	33,05	1842

Die Zahlen der letzten Kolumne sind alle mit einer Ungewißheit behaftet, welche besonders von der Unsicherheit des Wertes für die Zusammendrückbarkeit abhängt. Nimmt man z. B. für Alkohol den von Oerstedt angegebenen Wert der Zusammendrückbarkeit, so würde sich für die Geschwindigkeit des Schalles 2423 m in der Sekunde ergeben, während man sie nur gleich 1157 m findet, wenn für die Zusammendrückbarkeit des Alkohols der von Colladon und Sturm gefundene Wert in Anwendung gebracht wird.

Das Wasser ist die einzige unter diesen Flüssigkeiten, welche einem direkten Versuche unterworfen worden ist. Fig. 614 erläutert das Verfahren, welches Colladon und Sturm im Jahre 1827 zu diesem Zwecke im Genfer See zur Anwendung brachten. Eine ganz in das Wasser untergetauchte Glocke war an einen Nachen angehängt; sie wurde durch einen Hammer an-

Fig. 614.



geschlagen, dessen Stiel aus dem Wasser hervorragte. Durch Niederdrücken eines Hebels wird der Hammer *b* gegen die Glocke geschlagen und gleichzeitig die Lunte *e* mit dem Pulverhäufchen *m* in Berührung gebracht. Am gegenüberliegenden Ufer des Sees notierte man den Moment, in welchem man den Lichtblitz des entzündeten Pulvers, und denjenigen, in welchem man den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrnahm, welcher mit Hilfe des Hörrohres *gfko* beobachtet wurde. — Diese Versuche ergaben für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Wasser 1435 m, was von der berechneten Zahl 1453 nur wenig abweicht [1]).

Während bei den Gasen zwischen der Schallgeschwindigkeit im Freien und jener in Röhren kein großer Unterschied besteht, scheint dieses bei Flüssigkeiten nach indirekten Messungen von Werthheim in bedeutendem Grade der Fall zu sein. Er fand beispielsweise für Wasser in Röhren die sehr abweichende Geschwindigkeit $C' = 1173{,}4$ m. Nach Werthheim wäre überhaupt die „allseitige Schallgeschwindigkeit" C zu der „einseitigen" C' in der Beziehung stehend:

$$C = C' \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247\, C'.$$

[1]) Pogg. Ann. 12, 183.

Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit **fester** Körper muß die Größe s der Gleichung (1) aus ihrem spezifischen Gewicht σ und ihrem Elastizitätskoeffizienten $\frac{1}{E}$ abgeleitet werden. Die Bedeutung des letzteren wurde im § 106 erörtert. Der Elastizitätskoeffizient $\frac{1}{E}$ bedeutet die vorübergehende Verlängerung (Verkürzung), welche ein elastischer Körper von der Länge Eins und dem Querschnitt Eins erfährt, wenn er dem Zuge (Drucke) durch das Gewicht der Masseneinheit ausgesetzt wird. Der reziproke Wert E heißt Elastizitätsmodulus.

Länge und Verlängerung werden nach Metern, der Querschnitt nach Quadratmillimetern, die Belastung nach Kilogrammen gemessen. Da das Volum eines Stabes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt = 1 ccm ist, so beträgt seine Masse $\sigma\,\mathrm{g} = \frac{\sigma}{1000}\,\mathrm{kg}$. Aus der Proportion:

$$1 : \frac{1}{E} = \frac{\sigma}{1000} : s$$

findet man die Verlängerung s, welche durch den Zug einer der Stabmasse gleichen Masse hervorgebracht würde:

$$s = \frac{\sigma}{1000\,E},$$

mithin

$$C = \sqrt{\frac{1000\,\mathrm{g}\,E}{\sigma}} = \sqrt{\frac{9806\;E}{\sigma}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Für **Stahldraht** ist nach **Werthheim** $\sigma = 7{,}622$, $\frac{1}{E} = 0{,}000\,057\,88$, woraus sich nach obiger Formel berechnet

$$C = 4714\,\mathrm{m}.$$

Demnach wäre die Schallgeschwindigkeit im Stahldraht 14,2 mal so groß als in Luft, was mit einem indirekt von **Werthheim** erhaltenen Werte über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Längswellen nämlich 14,96 mal jener in Luft ziemlich übereinstimmt.

Daß die Schallgeschwindigkeit im Eisen bedeutend größer als in Luft ist, hat schon **Biot** dadurch gezeigt, daß ein auf das Ende einer langen Röhrenleitung aus Gußeisen ausgeführter Schlag am anderen Ende zweimal gehört wird, zuerst infolge Fortpflanzung im Eisen, dann noch einmal infolge Fortpflanzung in der Luft. Man kann ähnliche Versuche auch an Eisenbahnschienen anstellen, obwohl die mangelhafte Verbindung derselben keine genaueren Messungen zuläßt.

Außer den Longitudinalwellen pflanzen sich in festen, homogenen und amorphen Körpern aber auch noch Transversalwellen fort, und zwar beide mit abweichenden Geschwindigkeiten, deren Größe und Verhältnis von zwei „Konstitutionskonstanten" abhängt[1]). Die obige Formel ist also nur als Annäherungsformel zu betrachten.

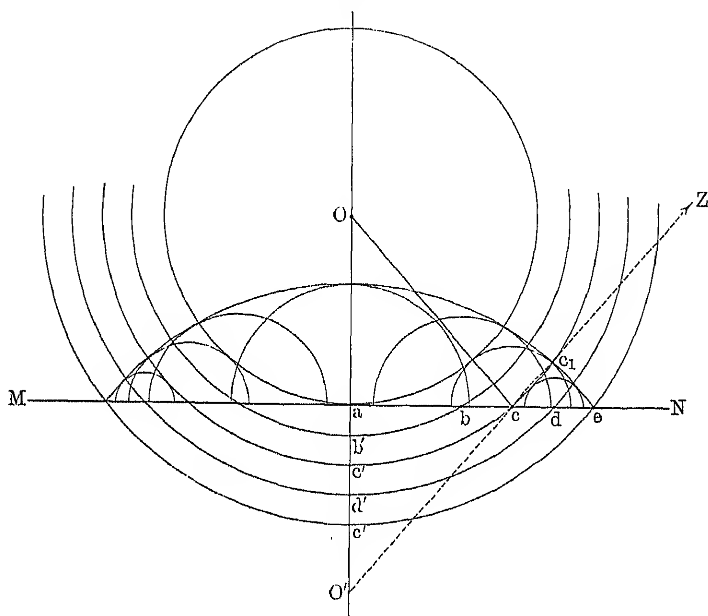
---

[1]) G. **Lamé**, Leçon de l'Elasticité, Paris 1852.

§ 206. Von der Reflexion des Schalles und dem Echo. Wenn eine kugelförmige Schallwelle auf die ebene Trennungsfläche zweier verschiedener Medien, z. B. eine ebene Wand eines festen Körpers, oder auf die ebene Oberfläche einer Flüssigkeit auftrifft, so wird sie mehr oder weniger vollständig reflektiert. Die Gesetze dieser Reflexion können wir auf folgende Weise ableiten.

Es sei O, Fig. 615a, der Ausgangspunkt einer Wellenbewegung, Oa der Radius der Kugelwelle, welche sich bis zu dem Zeitmoment ausgebildet hat,

Fig. 615 a.

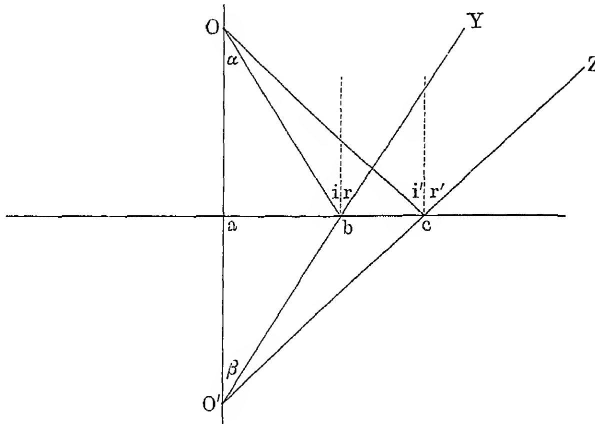


in welchem die Wellenbewegung bis zur reflektierenden Ebene, deren Projektion auf die Zeichnungsebene durch die Gerade MN dargestellt wird, vorgeschritten ist. Wäre diese reflektierende Ebene nicht vorhanden, so würde die Kugelwelle in den folgenden gleich großen Zeiträumen $= \tau$ um die gleichen Strecken ab', $b'c'$, $c'd'$ ... $= \varrho$ gewachsen sein und die Grenzen $b'b$, $c'c$, $d'd$ ... erreicht haben. Am Ende der Zeit 4τ wäre sie bis $e'e$ vorgeschritten. Jeder der Punkte a, b, c, d, wo die Welle an die Wand anschlägt, wird nun zum Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle, die sich im alten Medium kugelförmig ausbreitet. Die allenfalls um dieselben Punkte im neuen Medium entstehenden Wellen bleiben hier außer Betracht. Bis zu dem Momente, wo die primäre Welle den Punkt e erreicht, hat die um a entstandene Elementarwelle die Zeit 4τ zur Verfügung gehabt, sich daher bis zu einer Kugel vom Radius 4ϱ entwickelt.

In derselben Zeit sind die Elementarwellen um die Punkte b, c, d bis zu Kugeln von den Radien 3ϱ, 2ϱ, ϱ angewachsen. Alle diese elementaren Kugelwellen werden von einer Kugelfläche berührt und eingehüllt, deren Zentrum in O' liegt, wobei $aO' = aO$ ist. Der Radius dieser einhüllenden Kugelfläche ist $O'e = Oe$. Um dies einzusehen, ziehen wir durch irgend

einen der Punkte der Trennungsebene, z. B. durch c, die Geraden Oc und $O'c$. Die Verlängerung der letzteren muß die Elementarwelle um c in einem Punkte c_1 schneiden. Aus der Kongruenz der Dreiecke aOb und $aO'b$ folgt $O'b = Ob$. Nun ist der Abstand von O' bis $c_1 = Oc + 2\varrho$; ebenso groß ist aber auch der Radius $O'e$ der einhüllenden Welle, denn er ist ebenfalls $= O'c + 2\varrho = Oc + 2\varrho$. Dasselbe könnten wir von allen Elementarwellen zeigen, welche um irgend einen Punkt der Trennungsebene sich bilden. Die Resultierende aller dieser Elementarwellen muß demnach die einhüllende

Fig. 615b.



Welle sein, die ihr Zentrum in O' hat, welcher Punkt auf dem Einfallslote OO' ebenso weit unter MN liegt, als O darüber liegt.

Fassen wir nun die Lage der Schallstrahlen in Fig. 615b ins Auge, so ergibt sich sofort, daß Winkel $r = \beta = \alpha = i$ sein muß. Außerdem liegen die Geraden bY, cZ in derselben Zeichnungsebene wie Oa, Ob und Oc. Somit ergeben sich folgende Gesetze der Reflexion des Schalles:

1. Die von einer Ebene reflektierte Schallwelle hat eine solche Form und Lage, als ginge sie von einem Punkte aus, der auf dem Einfallslot ebenso weit hinter der reflektierenden Ebene liegt, als der Ausgangspunkt der direkten Welle vor derselben gelegen ist.
2. Die reflektierten Schallstrahlen liegen in derselben Ebene, in welcher die direkten Strahlen und das Einfallslot liegen.
3. Die Reflexionswinkel der Strahlen sind gleich den Einfallswinkeln.

Der Satz 1. läßt sich für Wasserwellen experimentell gut beobachten, wenn man in einen Teich mit ruhig stehendem Wasser, dessen Ufer eine Strecke weit geradlinig begrenzt ist, einen Stein wirft. Auch in einer rechtwinkeligen Porzellantasse, die mit Quecksilber gefüllt ist, lassen sich die reflektierten Wellen schön beobachten. Durch Töplers Schlierenmethode endlich lassen sich auch die reflektierten Luftwellen sehr schön wahrnehmen.

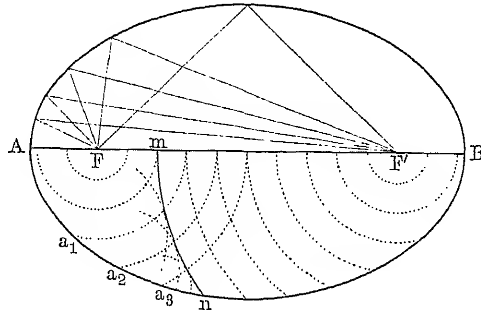
Liegt das Erregerzentrum der direkten Welle unendlich weit entfernt, so ist die Wellenoberfläche als Ebene anzusehen, und die Schallstrahlen laufen parallel. Dasselbe gilt für die an einer Ebene reflektierte ebene Welle.

Ist die reflektierende Fläche keine Ebene, so wird die reflektierte Welle in ihrer Form mannigfach verändert. Ein wichtiger Fall ist die Reflexion

an einem Umdrehungsellipsoid, von dessen einem Brennpunkt die Strahlen ausgehen. Sie werden alle nach einmaliger Reflexion im anderen Brennpunkt vereinigt.

Die von F, Fig. 616, ausgehenden Kugelwellen, welche in a_1, a_2, a_3 das Ellipsoid treffen, erzeugen von diesen Punkten ausgehende Kugelwellen, welche die gemeinsame Einhüllende mn besitzen, welche selbst ein zu F konzentrisches Kugelflächenstück ist, das fortschreitend in F' zu einem Punkte verschwindet. In einer elliptischen Tasse voll Quecksilber ist dieses Verhalten experimentell nachweisbar.

Fig. 616.



Ein zweiter Fall ist die Reflexion an einem hohlen Umdrehungsparaboloid, auf welches die Schallstrahlen vom Brennpunkt aus auftreffen. Sie werden sämtlich parallel mit der Achse reflektiert. Die vom Brennpunkt F, Fig. 617, ausgehenden Kugelwellen senden von den Punkten a_1, a_2, a_3, a_4 . . ., wo sie auftreffen, Kugelwellen aus, die alle von der Ebene mn berührt werden und so als ebene Wellenoberfläche parallel zur Achse ins Unendliche hinausrücken. Treffen solche Strahlen wieder parallel zur Achse auf ein zweites Paraboloid auf, so werden sie in dessen Brennpunkt vereinigt. Zwei konaxial gegenüberstehende parabolische Spiegel lassen daher die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen nach zweimaliger Reflexion im anderen Brennpunkt sich sammeln (Fig. 618). Sphärische Hohlflächen von nicht zu großem Öffnungswinkel nähern sich in ihrer Form den Umdrehungsparaboloiden und können daher deren Wirkung nahezu ersetzen. Die Brennpunkte derselben liegen in der Mitte zwischen dem Krümmungsmittelpunkte und dem Scheitel des Hohlspiegels. Bringt man nun in den Brennpunkt F

Fig. 617.

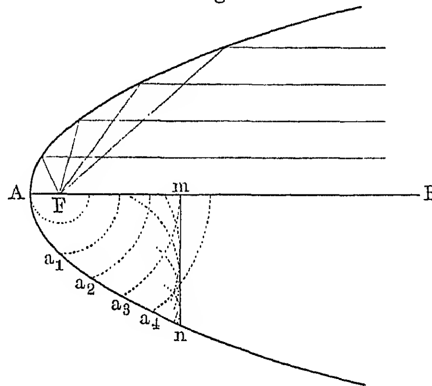
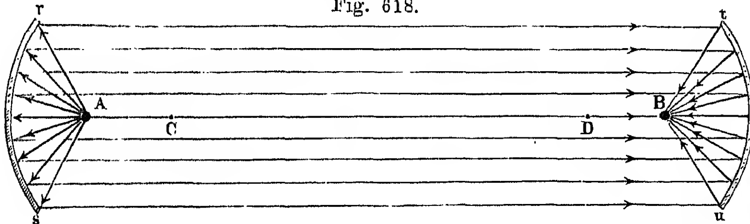


Fig. 618.



des einen Hohlspiegels eine Taschenuhr, so hört ein im Brennpunkt F' des anderen befindliches Ohr deutlich das Ticken derselben, denn alle von F ausgehenden Schallstrahlen, welche den Hohlspiegel rs treffen, werden parallel mit der Achse reflektiert, wie es in unserer Figur angedeutet ist; auf den zweiten Spiegel tu treffend, werden sie aber gegen den Brennpunkt F' desselben zurückgeworfen und also daselbst wieder vereinigt.

Entfernt man das Ohr aus dem Brennpunkte F', so verschwindet der Schall, selbst wenn man sich dem Punkte F bedeutend nähert.

Damit der eben angedeutete Versuch gelinge, müssen die beiden Brennspiegel ziemlich groß sein, damit der Kopf, dessen Ohr sich an der Stelle des Brennpunktes F' befindet, nicht den größten Teil der vom Brennspiegel rs kommenden Strahlen auffange und hindere, nach tu zu gelangen. Wenn man mit kleineren Brennspiegeln experimentiert, muß man bei F' die Mündung eines Hörrohres anbringen, welches die Schallwellen von F' nach dem seitlich befindlichen Ohre hinleitet.

Nach E. Mach bringt die Explosion von Knallsilber im Brennpunkt des einen Spiegels die Explosion von Jodstickstoff im anderen hervor.

Nach Ph. v. Rostowzew bringt man in den einen Brennpunkt die Mündung einer Pfeife, in den anderen ein Kundtsches Manometer.

Aus der Reflexion des Schalles erklärt sich auch die Erscheinung des Echos.

Wenn die Schallwellen rechtwinkelig auf die reflektierende Fläche treffen, so sendet das Echo den Ton zu seinem Ausgangspunkte zurück. In diesem Falle kann ein Echo je nach der Entfernung der reflektierenden Wand eine größere oder geringere Anzahl von Silben unter Bedingungen wiederholen, welche leicht zu ermitteln sind. In einer Sekunde kann man bequem drei Silben aussprechen, so daß also $^1/_3$ Sekunde auf eine Silbe kommt. In $^1/_3$ Sekunde durchläuft aber der Schall einen Weg von ungefähr 112 m; wenn also die reflektierende Wand 1 mal, 2 mal, 3 mal .... n mal 56 m entfernt ist, so wird der Klang einer eben gesprochenen Silbe nach $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_3$ .... $^n/_3$ Sekunden zum Sprecher zurückkehren, er wird also 1, 2, 3 .... n Silben aussprechen können, ehe das Echo der ersten wieder an sein Ohr schlägt.

Es ist nicht durchaus nötig, daß die reflektierende Fläche hart und glatt sei, denn auch unregelmäßige Felswände, Waldrände, Wolken bilden Echo.

Die Erklärung der vielfachen Echos, d. h. solcher, welche dieselbe Silbe mehrmals wiederholen, ist entweder auf das Vorhandensein mehrerer verschieden weit entfernter reflektierender Wände oder auch auf die Erwägung zurückzuführen, daß zwei reflektierende Flächen einen Schall gegenseitig aufeinander zurückwerfen können, wie zwei gegenüberstehende Spiegel sich das Licht zusenden. So kann ein vielfaches Echo zwischen zwei entfernten parallelen Mauern entstehen. Früher gab es nahe bei Verdun ein solches Echo, welches dasselbe Wort 12- bis 13 mal wiederholte; es war durch zwei benachbarte Türme gebildet. Auch durch mehrere in verschiedenem Abstande befindliche Flächen kann ein vielfaches Echo entstehen.

Schallwellen können auch bei wolkenloser Atmosphäre reflektiert und dadurch in ihrer Ausbreitung gestört werden, wenn die Luft aus Schichten verschiedener Temperatur, also ungleicher Dichte, besteht. Dies ist sicherlich, wie Humboldt bemerkt, die Ursache, warum sich der Schall des Nachts weiter verbreitet als bei Tage, selbst mitten in den Wäldern von Amerika,

Bezeichnen wir mit λ den linearen Ausdehnungskoeffizienten der Su stanz des zu messenden Körpers, dessen Länge bei $0 = L_0$ ist, so folgt

$$L_0 (1 + \lambda t) = M_0' (1 + \mu t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; ($$

woraus sich ergibt

$$L_0 = M_0' \frac{1 + \mu t}{1 + \lambda t} = M_0' [1 + (\mu - \lambda) t] \quad . \; . \; . \; . \; . \; ($$

da das Produkt der kleinen Größen $\mu \lambda$ vernachlässigt werden kann. U also die wahre Länge eines Körpers bei 0^0 zu bestimmen, ist nicht nöti ihn auf 0^0 abzukühlen, wenn man seinen Ausdehnungskoeffizienten und de des Maßstabes kennt. Man hat nur dafür zu sorgen, daß er dieselbe Temp ratur wie der Maßstab habe und daß diese bekannt sei.

Z. B.: Ein Glasstab habe bei 20^0 C, gemessen an einem richtige Messingmaßstabe, die Länge von 800 mm ergeben. Dann ist seine Läng bei 0^0:

$$L_0 = 800\,[1 + (0{,}000\,018\,12 - 0{,}000\,007\,97)\,20] = 800{,}1624 \text{ mm.}$$

§ 17. **Hilfsmittel zur genauen Bestimmung der Bruchteile eine Maßstabteiles.** Nur bei rohen Messungen wird man den zu messende Körper unmittelbar an den Maßstab od umgekehrt anlegen und seine Länge direl ablesen, denn wenn auch die zu messend Länge scharf begrenzt ist, so wird ma sie an dem in Millimeter abgeteilten Mal stabe nur auf ganze Millimeter und durc Schätzung noch bis etwa auf 0,1 mm al lesen können. In vielen Fällen, z. I wenn der Durchmesser einer Kugel od eines Zylinders zu messen ist, komm man mit dem Maßstabe überhaupt a die zu bestimmende Länge nicht hera Endlich ist es meistens wünschenswer eine größere Sicherheit der Messung z erhalten, als es die bloße Schätzung de Zehntel eines Millimeters durch das u bewaffnete Auge gestattet. Es gibt dre Hilfsmittel, um die Bruchteile etwa de Millimeter eines Maßstabes sicherer bzw auch genauer zu bestimmen, als die durch bloße Schätzung der 0,1 mm m dem Auge möglich ist. Es sind dies de Vernier, die Mikrometerschraube und de Fühlhebel.

Fig. 45.

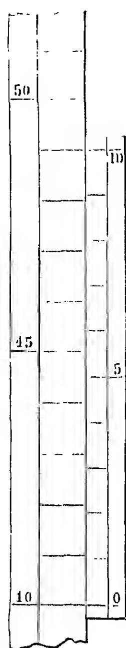
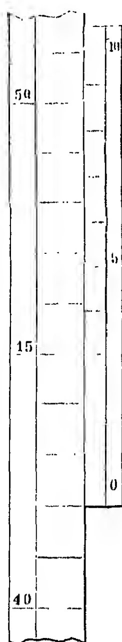


Fig. 46.



Der Vernier, der noch meistens, wenn auch unrechtmäßig Nonius ge nannt wird [1]), besteht in einem Schieber, der längs der Teilung des eigen

[1]) Der Vernier ist zuerst vom Niederländer Peter Werner unter dem Name Petrus Vernerius in einer zu Brüssel im Jahre 1631 erschienenen Schrift be schrieben worden. Die Vorrichtung, welche der Portugiese Pero Nuñez (Petru

wo die bei Tage schweigenden Tiere des Nachts die Atmosphäre mit tausend verworrenen Tönen erfüllen.

Professor Tyndall hat einen Apparat konstruiert, mittels welchem man die Reflexion an wärmeren Luftschichten oder an Dämpfen experimentell nachweisen kann.

Durch die Reflexion des Schalles erklären sich auch die Wirkungen des Sprachrohrs und des Hörrohrs.

Auch die Erscheinungen der Brechung und Beugung der Lichtstrahlen hat man an Schallstrahlen nachzuahmen versucht. Es zeigte sich aber, daß die im Verhältnisse zu den Dimensionen der angewandten Körper sehr viel größere Wellenlänge der Schallstrahlen einen wesentlichen Unterschied bedingt, welcher die Analogie mit den Lichtstrahlen bei diesen Versuchen stört oder aufhebt. Dies ist auch bei manchen Reflexionsversuchen der Fall.

§ 207. Einfluß der Dichte des reflektierenden Mediums; Reflexion am festen und am freien Ende. In § 113 wurden unter (3) und (4) für die Geschwindigkeiten V und V_1, mit welchen sich zwei elastische Kugeln von den Massen M und M_1 bewegen, nachdem sie mit den ursprünglichen Geschwindigkeiten c und c_1 zusammengestoßen sind, die Ausdrücke abgeleitet:

$$V = \frac{(M - M_1)\,c + 2\,M_1\,c_1}{M + M_1}$$

$$V_1 = \frac{(M_1 - M)\,c_1 + 2\,M\,c}{M + M_1}.$$

Für den Fall, daß die gestoßene Kugel in Ruhe war, ist $c_1 = 0$, also

$$V = \frac{(M - M_1)\,c}{M + M_1}$$

$$V_1 = \frac{2\,M\,c}{M + M_1}.$$

Sind außerdem die Massen der Kugeln gleich groß, also $M = M_1$, so kommt

$$V = 0$$

$$V_1 = c.$$

Das heißt, die stoßende Kugel kommt zur Ruhe, während die gestoßene mit derselben Geschwindigkeit weiter geht, welche die stoßende hatte.

Ist die Masse der gestoßenen Kugel kleiner, also $M > M_1$, so wird sowohl V als V_1 positiv, beide Kugeln bewegen sich nach dem Stoße in der Richtung desselben.

Ist dagegen die Masse der gestoßenen Kugel die größere, also $M < M_1$, so wird V negativ, und nur V_1 bleibt positiv. Es bewegt sich dann die stoßende Kugel nach dem Stoße rückwärts.

Man kann dieses Rechnungsresultat leicht experimentell erproben, wenn man zwei Elfenbeinkugeln, einmal von gleicher, dann von ungleicher Größe an Schnüren nebeneinander aufhängt und dann die eine Kugel auf die andere im Bogen niederfallen läßt. Die niederfallende Kugel bleibt nach dem Stoße stehen, oder geht weiter, oder wird zurückgeworfen, je nachdem sie gleich groß, größer oder kleiner ist als die gestoßene.

Um die Schwingungsphasen nach dem Zusammenstoße noch auffallender zu demonstrieren, kann man, nach E. Brücke, eine der beiden Kugeln mit ihren Schnüren an einem Schlitten aufhängen, welcher sich am Gestelle längs einer horizontalen, auf die Schwingungsebene senkrechten Richtung unmittelbar nach dem ersten Anstoße der Kugeln verschieben läßt. Hierdurch wird das wiederholte Anstoßen verhindert, und man sieht deutlich, wie die Kugeln nach dem Stoße in gleicher oder in entgegengesetzter Schwingung begriffen sind, je nachdem die stoßende oder die gestoßene Kugel von größerer Masse ist.

Hängt man eine größere Anzahl gleich großer Kugeln in einer Reihe auf (Fig. 619) und läßt die erste fallen, so kommt sie zur Ruhe und gibt

Fig. 619.

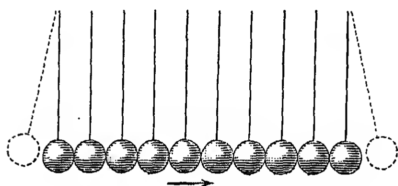
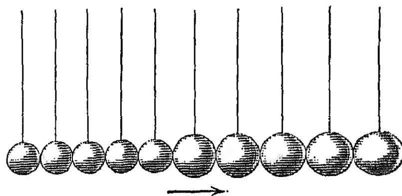


Fig. 620.



ihre Geschwindigkeit an die zweite ab. Diese stößt aber sofort an die dritte, kommt daher ebenfalls zur Ruhe und so fort, so daß also die Geschwindigkeit durch alle Kugeln hindurch in fortwährender Vertauschung bis zur letzten freien Kugel gelangt, welche dann mit derselben Geschwindigkeit fortfliegt, mit welcher die erste gestoßen hat (§ 113).

Anders verläuft aber der Vorgang, wenn wir, wie in Fig. 620 angedeutet ist, an eine Reihe unter sich gleich großer Kugeln kleinerer Masse eine Reihe unter sich gleicher, aber größerer Masse anfügen. Lassen wir die äußerste kleine Kugel niederfallen, so pflanzt sich ihr Stoß bis zur letzten kleinen fort, ohne daß die einzelnen Kugeln nach dem Stoße eine Geschwindigkeit behalten; beim Übergange des Stoßes auf die erste große Kugel wird jedoch die letzte kleine nach rückwärts reflektiert, sie gibt diese negative Geschwindigkeit nach rückwärts an ihre Nachbarkugel ab, und so setzt sich von dem Punkte, wo die kleinen Kugeln an die großen grenzen, nach rückwärts eine Stoßbewegung fort, welche zuletzt die äußerste kleine Kugel hinausfliegen macht, allerdings nur mit einem Bruchteile der Geschwindigkeit, mit welcher sie niederfiel. Nach der anderen Seite setzt sich längs der großen Kugeln ebenfalls die Wirkung des Stoßes fort und macht auch die äußerste große Kugel hinausfliegen.

Denken wir uns nun den ganzen Apparat umgekehrt und wiederholen wir das Experiment in der Weise, daß wir einmal zuerst die äußerste große Kugel fallen lassen, so pflanzt sich zunächst ihr Stoß bis zur letzten großen Kugel fort, ohne daß eine der Kugeln in Bewegung verbliebe. Die letzte große Kugel jedoch kommt durch den Stoß auf die erste kleine nicht zur Ruhe, sondern behält nach dem Stoße noch einen Teil Geschwindigkeit in derselben Richtung bei. Wären die Kugeln untereinander in einer derartigen elastischen Verbindung, daß sie nicht bloß einander drücken, sondern auch ziehen könnten, so würde diesmal die letzte große Kugel einen Zug auf ihre Vorgängerin in der Richtung der vorangegangenen Stoßbewegung ausüben, welcher Zug sich dann ebenfalls nach rückwärts bis zur äußersten

großen Kugel fortpflanzen würde. Es könnte dies dadurch verwirklicht werden, daß man die Kugeln untereinander durch elastische Spiralfedern in Verbindung setzte.

Man kann dann, die beiden Fälle zusammenfassend, sagen, daß von der Übergangsstelle der kleinen zu den großen Kugeln zwei Impulse ausgehen, von denen sich der eine nach vorwärts, der andere nach rückwärts fortpflanzt. Die Art des nach rückwärts gehenden Impulses hängt ab von der relativen Masse der Kugeln. Beim Übergange der ursprünglichen Stoßbewegung von Kugeln kleinerer Masse auf größere wirkt der nach rückwärts gehende Impuls wie ein nach rückwärts ausgeübter Stoß. Beim Übergange von Kugeln größerer Masse auf kleinere dagegen wie ein Zug nach vorwärts, ausgeübt auf die an der Grenze befindliche größere Kugel.

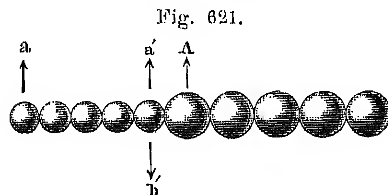
Der in dem ersten Falle nach rückwärts ausgeübte Stoß ist desto stärker, je größer die Masse der größeren Kugeln ist, er ist dagegen gleich Null, wenn die Kugeln sämtlich gleich sind. Denkt man sich die größeren Kugeln unendlich groß, so hat man denselben Fall wie beim Stoße auf eine feste elastische Wand oder den Fall, daß die letzte Kugelreihe festgehalten wird. Der ganze Impuls wird durch Reflexion am festen Ende nach rückwärts gerichtet. Denkt man sich dagegen die zweite Kugelreihe von unendlich kleiner Masse, d. h. ganz fehlend, so hat man eine einfache Kugelreihe mit freiem Ende, der nach rückwärts gehende Impuls wird negativ, d. h. ein Zug in der ursprünglichen Richtung.

Stoß und Zug können als Ursache von Verdichtung und Verdünnung aufgefaßt werden. Man könnte daher sagen, daß bei der Reflexion am festen Ende die vorausgehende Verdichtung einer Welle als solche reflektiert werde, während am freien Ende die ankommende Verdichtung als Verdünnung zurückkehre. Es ist aber zweckmäßiger, weil weniger leicht irreführend, statt Verdichtung und Verdünnung die Richtung (das Zeichen) der Exkursionen bzw. die Schwingungsphase ins Auge zu fassen. Es ergibt sich dann, daß bei der Reflexion am freien Ende die Exkursionsrichtung (die Phase) unverändert bleibt, während bei der Reflexion am festen Ende die Exkursionsrichtung das Zeichen wechselt, bzw. die Phase in die entgegengesetzte verwandelt wird. Man sagt daher im letzteren Falle auch, es gehe bei der Reflexion eine halbe Welle verloren.

Zur experimentellen Bestätigung dieses wichtigen Satzes eignet sich ganz gut die im § 199 beschriebene Wellenmaschine von Weinhold und die daselbst angegebene Vorrichtung von F. Richarz.

Es ist nun nicht schwierig, diese ganze Betrachtungsweise aus der longitudinalen Richtung in die transversale zu übertragen. Denken wir uns wiederum eine Reihe elastisch verbundener Kugeln, Fig. 621, von denen die zweite Gruppe größere Masse besitzt, und stellen wir uns vor, daß die äußerste kleine Kugel einen Impuls in der Richtung des Pfeiles a erleide, der sich dann von Kugel zu Kugel fortpflanzt, bis endlich die letzte kleine Kugel die erste große in Bewegung setzen soll. Während bis dahin jede Kugel zur Ruhe kommt, da sie ihre ganze lebendige Kraft an die gleich große Nachbar-

Fig. 621.

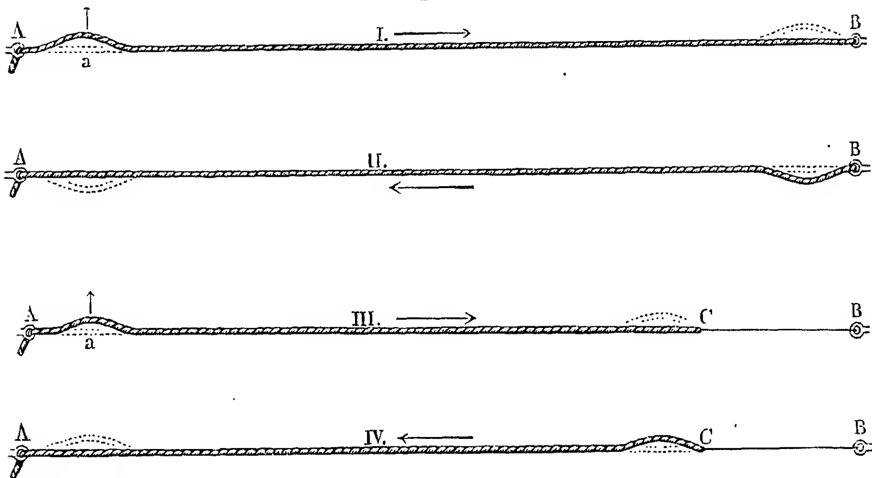


kugel überträgt, ist dies bei der letzten nicht mehr der Fall, sie wird vielmehr in der Richtung nach b' zurückgestoßen und dadurch zum Ausgangspunkte eines die kleinen Kugeln nach rückwärts durchlaufenden, nach unten gerichteten Impulses. Gleichzeitig wird sich längs der großen Kugeln ein Impuls nach oben, A, fortpflanzen. Geht jedoch umgekehrt die Bewegung von den großen Kugeln zu den kleinen über, so wird die letzte große Kugel von der kleinen nicht zurückprallen, auch nicht zur Ruhe kommen, sondern ihr nachfolgen und dadurch den Ausgangspunkt eines Impulses von derselben Richtung abgeben, der sich rückwärts durch die Kugelreihe fortpflanzt.

Auch hier kann man von der Annahme der Kugeln größerer Masse oder kleinerer Masse zu den Extremen übergehen, indem man sich einmal die letzte Kugel ganz festgehalten, das andere Mal ganz frei beweglich denkt.

Die experimentelle Bestätigung dieses Falles gelingt ganz gut mit einer Reihe gleich weit abstehender Kugeln aus Holz oder Metall, welche man durch einen Kautschukstrang verbunden hat. Doch läßt sich dies auch schon mit einem gewöhnlichen starken Seile von etwa 6 m Länge zeigen.

Fig. 622.



Zu diesem Zwecke befestigen wir das eine Ende des Seiles an einem festen Haken B, Fig. 622, ziehen das andere Ende durch einen festen Ring und geben ihm durch Anziehen mit der linken Hand eine geeignete Spannung. Hierauf führen wir mittels eines kantigen Schlägels auf den Punkt a des Seiles einen starken raschen Schlag in horizontaler Richtung, wodurch eine Ausbiegung nach links (in der Zeichnung Fig. 622 I. nach oben gerichtet) entsteht, die nun rasch als Wellenberg nach B fortschreitet. Diese Bewegung erfolgt um so rascher, je stärker wir das Seil anspannen. Verfolgen wir nun mit Aufmerksamkeit die weiteren Bewegungen des Seiles, so bemerken wir, daß der Wellenberg von B aus auf die rechte Seite (in der Zeichnung nach unten) überspringt und von dort zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Daselbst springt er wieder auf die linke (obere) Seite zurück und wiederholt von da seinen vorigen Weg noch mehrere Male, bis endlich der Verlauf der Bewegungen undeutlich wird und das Seil zur Ruhe kommt.

Fig. 622 I. zeigt also den Zustand des Seiles am Anfange und Ende des Verlaufes der direkten Welle, Fig. 622 II. dasselbe am Anfange und Ende der reflektierten Bewegung. Statt zu sagen, der Wellenberg springe auf die andere Seite über, drücken wir uns besser so aus, der Wellenberg komme als Wellental zurück, oder die Welle kehre mit entgegengesetztem Zeichen (Phase) zurück. Man sieht ein, daß von A nach B stets nur ein Wellenberg, von B nach A stets nur ein Wellental fortschreitet; man hat also das Schema: Berg hin, Tal zurück, Berg hin, Tal zurück usw.

Um diese Reflexion am freien Ende zu zeigen, müssen wir ein frei bewegliches Seilende herstellen, was wir annähernd dadurch erreichen, daß wir dasselbe von C (Fig. 622 III.) an als ganz dünne Schnur sich fortsetzen lassen. Verfahren wir dann wie früher, so schreitet der Wellenberg zunächst bis C fort und geht dann auf derselben Seite, also ebenfalls als Wellenberg wieder nach A zurück (Fig. 622 IV.). Am dortigen festen Ende aber wird er als Tal reflektiert, geht als solches bis C, von dort wieder als Tal zurück, um bei A wieder als Berg reflektiert zu werden. Diesmal verläuft also die Bewegung nach dem Schema: Berg hin, Berg zurück, Tal hin, Tal zurück usw.

Wir haben es hier ursprünglich nur mit einem Wellenberge, also nur mit der Hälfte einer vollständigen Welle zu tun gehabt. Es ist leicht einzusehen, daß für eine vollständige Welle im wesentlichen dasselbe gilt, da einfach das nachfolgende Wellental alle Bewegungen mit entgegengesetzter Schwingungsrichtung wiederholt.

Statt eines horizontal ausgespannten gewöhnlichen Seiles bedient sich Tyndall eines vertikal hängenden, mit Sand gefüllten Gummischlauches, dessen oberes Ende an der Decke eines 6 bis 10 m hohen Zimmers befestigt ist. Die Füllung mit Sand hat den Zweck, bei gleicher Elastizität die Masse des Schlauches, also auch seine Schwingungsdauer zu vergrößern.

Fassen wir das Vorgetragene zusammen, so können wir bezüglich der Reflexion der Longitudinal- wie der Transversalwellen folgende Sätze aussprechen:

So oft eine Wellenbewegung an die Grenze zweier Medien ungleicher Dichte gelangt, wird dieselbe zum Teil reflektiert, eine vollständige Reflexion tritt an der ganz festen oder ganz freien Grenze des Mediums ein.

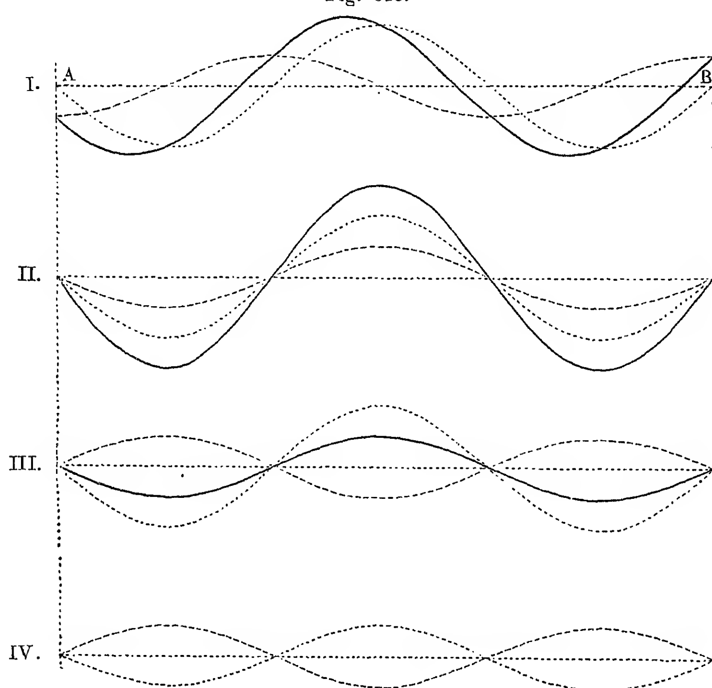
Bei der Reflexion an dem dünneren Medium (am freien Ende) beginnen die Exkursionen der reflektierten Welle mit unveränderter Schwingungsrichtung (mit demselben Zeichen); bei der Reflexion am dichteren Medium (am festen Ende) beginnen die Exkursionen der reflektierten Welle mit entgegengesetzter Schwingungsrichtung (mit entgegengesetztem Zeichen).

Im ersten Falle kehrt also die Wellenbewegung um, ohne eine Verschiebung der Phase oder scheinbare Verzögerung zu erleiden. Im zweiten Falle verwandelt sich die Phase der reflektierten Welle im Momente der Reflexion in die entgegengesetzte oder die Wellenbewegung erleidet scheinbar eine Verschiebung um eine halbe Wellenlänge.

§ 208. Interferenz der Wellen; Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen. Wenn in einem elastischen Medium nicht bloß von

einem Punkte, sondern von zweien oder mehreren Punkten Wellenbewegungen ausgehen, so werden dieselben dort, wo sie zusammentreffen, eine resultierende Bewegung hervorrufen. Diesen Vorgang bezeichnet man im allgemeinen mit dem Ausdrucke Interferenz der Wellen. Wollen wir auch hier an die Wasserwellen anknüpfen, so können wir uns vorstellen, daß in einen Teich mit ruhigem Wasserspiegel an zwei entfernten Stellen Steine hineingeworfen werden. Die um die Einfallstellen herum sich bildenden Kreise erweitern sich immer weiter, begegnen sich endlich, durchdringen sich und bringen so Interferenz der Wasserwellen hervor. Die Bewegungen innerhalb der Flächen, in denen sich die Kreise überdecken, erfolgen nach den allgemeinen mechanischen Prinzipien. Die Bewegung jedes Punktes ist die resultierende jener Einzelbewegungen, die der Punkt im betrachteten Augenblicke als Teil der einzelnen Bewegungen besitzen würde. Dadurch werden jedoch die

Fig. 623.



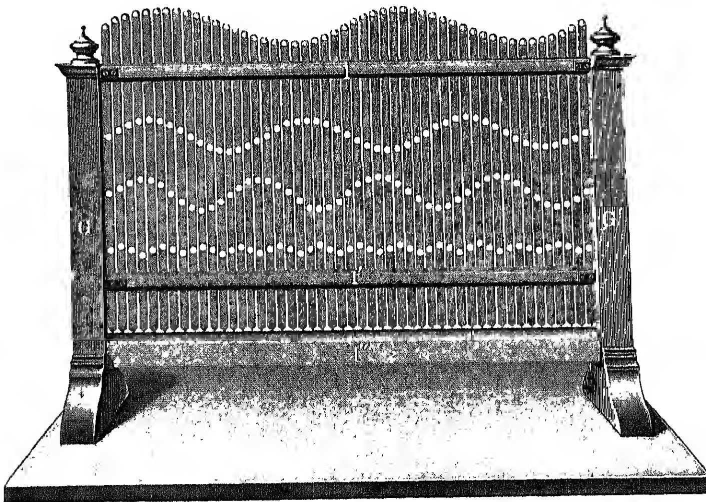
Einzelbewegungen nicht vernichtet, noch wird dadurch die Fortpflanzung oder Ausbreitung der Wellen gestört, vielmehr setzen dieselben nach der Durchkreuzung ihre Wege fort, als ob nichts vorgefallen wäre. Eine Ausnahme hiervon tritt nur im Falle sehr starker Exkursionen ein, wie sie beispielsweise bei den von E. Mach studierten Explosionswellen vorkommen. Das angeführte Prinzip wird gewöhnlich das Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen genannt.

Um an der Wasseroberfläche Interferenz zweier Wellenbewegungen hervorzurufen, ist jedoch nicht nötig, zwei Steine hineinzuwerfen; da nämlich die an den Uferrand anstoßenden Wellen daselbst reflektiert werden, so begegnen sie alsbald anderen direkten oder ebenfalls reflektierten Wellen,

müssen wir daher zunächst die einfachsten Fälle in Betrachtung ziehen. Wir beschränken uns daher zunächst auf isochrone Wellen, also Wellen gleicher Wellenlänge, welche längs eines und desselben linearen Mediums zustande kommen. Da ferner, wie eben bemerkt wurde, die Transversalwellen leichter zu übersehen sind als die longitudinalen, so wollen wir die Interferenzvorgänge zuerst an den ersteren studieren und dann die Ergebnisse auch auf die letzteren übertragen.

Denken wir uns also ein horizontal gespanntes Seil und auf dieses irgendwie gleichzeitig zwei Wellenbewegungen gleicher Schwingungsdauer übertragen. Denken wir uns dann das Seil plötzlich in seiner momentanen Lage fixiert und fragen nach der Form, welche dasselbe zeigen wird. *AB*, Fig. 623 I., stelle das Seil in der Ruhelage, die punktierte Sinuslinie die eine Welle, die gestrichelte Sinuslinie die zweite Welle, die ganz ausgezogene Linie die resultierende Wellenlinie vor. Die letztere wird dadurch erhalten, daß man die Ordinaten der komponierenden Wellengänge mit Rücksicht auf ihr Zeichen addiert. Exkursionen nach oben geben also wieder eine solche nach oben von einer Höhe gleich der Summe der einzelnen. Ebenso Exkursionen nach unten. Entgegengesetzte Exkursionen geben eine solche nach

Fig. 624 a.



der Richtung der größeren Komponente, und zwar von einer absoluten Höhe gleich der Differenz der Komponenten. In diesem Beispiele haben die Wellen einen Gangunterschied von $^1/_4$ Wellenlänge.

Die Fig. 623 II. zeigt das Resultat für den Fall, daß die Wellen ohne Gangunterschied zusammentreffen, Fig. 623 III. den Fall, wo der Gangunterschied genau gleich der halben Wellenlänge ist. Sind außerdem die Amplituden der beiden Wellen gleich groß, so hat dies, wie in Fig. 623 IV. dargestellt, den Erfolg, daß momentan alle Punkte des Seiles sich in der Ruhelage befinden.

Um sich die Ableitung der resultierenden Wellenform in diesen, sowie in anderen später zu erörternden Wellenkombinationen zu erleichtern, kann man sich eines einfachen Apparates bedienen, den der Verfasser vor längerer Zeit für Vorlesungszwecke konstruiert hat [1]).

Fig. 624 a zeigt diesen Apparat in der Anfangsstellung.

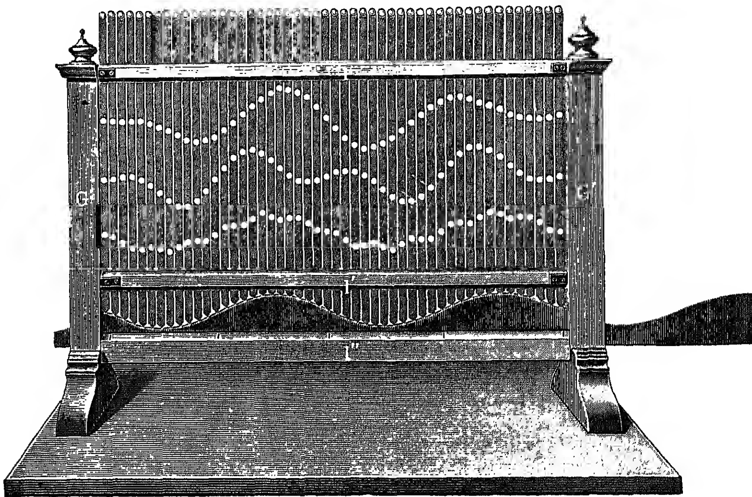
Fig. 624 b zeigt denselben nach eingeschobener Wellenschablone.

Fig. 624 c gibt eine Seitenansicht des Gestelles in größerem Maßstabe.

Fig. 624 d zeigt einen Vertikalschnitt in der Schaurichtung.

Fig. 624 e gibt eine Darstellung einiger Teile in der Ansicht von vorn mit Hinweglassung bedeckender Teile.

Fig. 624 b.

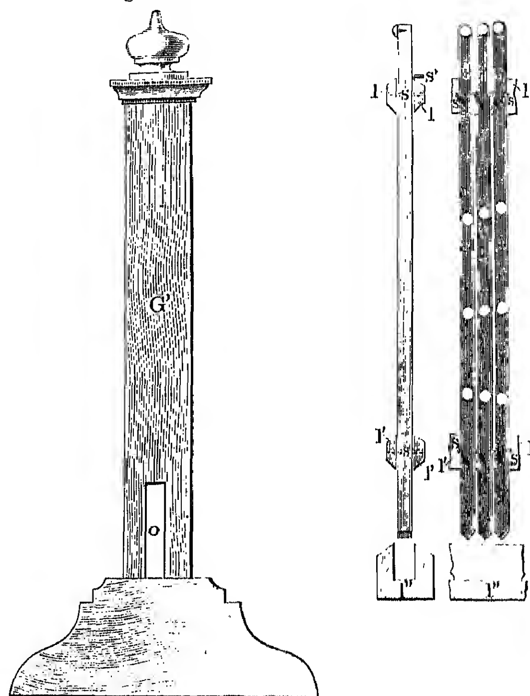


Das Gestell $G\,G'$ bildet einen rechteckigen Rahmen aus Holz. Die horizontalen Leisten l und l' sind, wie aus Fig. 624 d zu ersehen ist, vertikal geschlitzt und bilden mitsamt den Verbindungsstiften s die Führung für 49 Stäbchen von 1,2 cm Breite und Dicke und verschieden großer Länge. Durch von rückwärts eingesetzte Stifte s' werden sämtliche Stäbchen in einer Anfangslage gehalten, bei welcher ihre unteren zugeschärften Enden in einer horizontalen Linie liegen, während die oberen an der Vorderseite mit weißen Knöpfen ausgestatteten Enden einen Wellenzug von zwei Wellenlängen darstellen.

Eine aus einem Brettchen von 1 cm Dicke ausgeschnittene Wellenschablone von gleicher Amplitude und Wellenlänge wird durch den Schlitz o des Gestelles, Fig. 624 c, eingeschoben und gleitet, von der genuteten Leiste l'' (Fig. 624 d, e) geführt, unter den Enden der Stäbchen hindurch, wobei dieselben entsprechend dem Wellenzuge gehoben werden. Fig. 624 b zeigt jene

[1]) Derselbe wurde später in der Zeitschrift f. physik. u. chem. Unterricht 1, 1888 beschrieben. Ähnliche einfachere Apparate sind schon früher von Dove, Brücke und A. Höfler beim Unterricht benutzt worden. Der hier beschriebene Apparat erscheint mit weiteren Ausstattungen versehen, die ihn für weiter unten zu besprechende Demonstrationen geeignet machen. Er erspart dem Lehrer sehr viel Zeit und Mühe, die sonst zum Zeichnen der Kurven aufgewendet werden muß.

Stellung der Schablone, bei welcher durch die Interferenz der beiden Wellenzüge eine Aufhebung derselben eintritt, indem die Knopfreihe in eine gerade Linie sich anordnet. Bei Verschiebung der Schablone um eine halbe Welle tritt eine Verdoppelung der Amplituden ein.



Für die später zu besprechende Interferenz von Wellen ungleicher Wellenlänge dienen die an der Vorderseite der Stäbchen in Form vertiefter Kreise angebrachten weißen Scheibchen, Fig. 624 a, deren oberste Reihe einen Wellenzug aus drei ganzen Wellen mit $^2/_3$ so großer Wellenlänge, die zweite einen Wellenzug mit vier ganzen Wellen mit halb so großer Wellenlänge, die unterste einen Wellenzug geringerer Amplitude mit 12 der kürzeren Wellen darstellt. Dieselben bleiben bei der Demonstration der Wellen gleicher Wellenlänge außer Beachtung und können eventuell verdeckt werden.

Ebenso enthält der Apparat auf der Rückseite noch besondere Wellenzüge aufgetragen, deren Gestaltung und Anwendung an späterer Stelle beschrieben und erklärt werden soll. Durch die Anwendung weiterer Schablonen mit anderen Amplituden und Wellenlängen können die Versuche noch mannigfaltig modifiziert werden [1]).

---

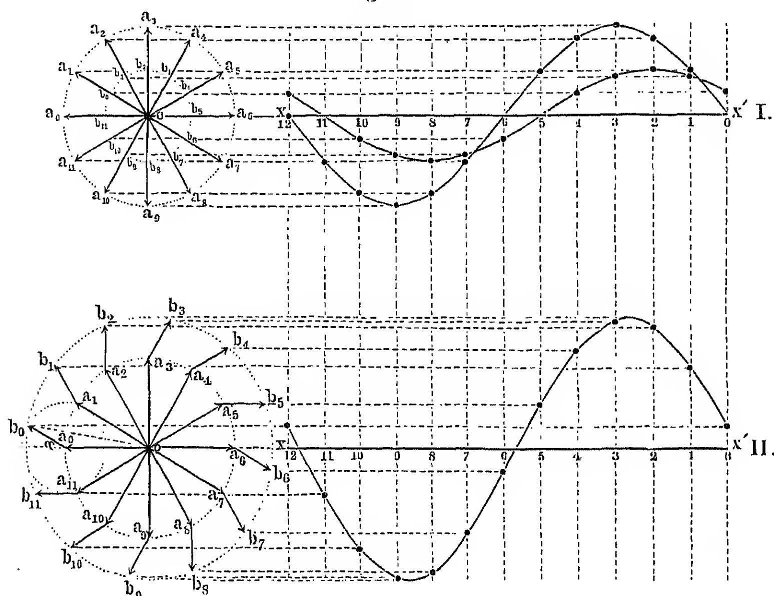
[1]) Ein, wenn auch geringfügiger Mangel des Apparates besteht darin, daß derselbe eigentlich nur die Interferenz einer stillstehenden mit einer fortschreitenden Welle, nicht aber die Interferenz zweier sich entgegenschreitender Wellen zeigen läßt. Man erhält daher wohl genau die aufeinander folgenden Formen der daraus hervorgehenden Welle, aber sie erleidet eine Verschiebung. Um dies zu vermeiden, müßte man das ganze Gestell mit gleicher Geschwindigkeit der Schablone entgegenschieben. Es ließe sich das auch durch eine Konstruktion bewerkstelligen, würde aber den Apparat unnötig komplizieren und verteuern. Ein Wellenapparat, der beide Wellen einander entgegenführt, ist um 1880 in Graz von A. Boltzmann gebaut und jüngst von Arth. Boltzmann mit einigen anderen beschrieben worden (Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien CXIII, Abt. IIa, Dez. 1904). Ein neuerer ist von W. Schmidt 1904 in den Verhandlungen d. deutschen physik. Gesellschaft, VI. Jahrg., beschrieben. Beide Apparate bewirken die Gegenbewegung mittels zweier Zahnstangen mit dazwischen gelagertem Zahnrad.

E. Grimsehl hat einen mit dem oben beschriebenen im Prinzip identischen Apparat angegeben, bei welchem sich mehrere Wellenzüge übereinanderlagern lassen, wogegen auf die Verschiebung der Wellen während ihrer Kombination verzichtet werden muß (Zeitschr. f. physik. u. chem. Unterr. 17, 35 (1904).

Daß durch die Zusammensetzung zweier Sinuskurven gleicher Wellenlänge von beliebiger Amplitude und beliebigem Gangunterschiede immer wieder eine Sinuskurve von derselben Wellenlänge hervorgehen müsse, läßt sich [1]) auf folgende einfache Weise durch Konstruktion zeigen.

Wie seinerzeit erklärt wurde (§ 54), erhält man die Sinuskurve aus der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung. Ein Punkt, welcher zwischen a_3 und a_9, Fig. 625 I., hin und her schwingt, hat in jedem Moment von der Geraden $a_0 a_6$ denselben Abstand wie die Spitze eines Zeigers von der Länge der Amplitude, welcher mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um O als Achse im Kreise herumgeführt wird. Dabei muß natürlich die Umlaufszeit des Zeigers gleich der Dauer einer Doppelschwingung sein und die Be-

Fig. 625.



wegung der Zeigerspitze in a_0 beginnen, wenn die Schwingung von O an beginnt. Trägt man die Vertikalabstände, welche die Zeigerspitze nach gleichen Bruchteilen der Umlaufszeit, also nach gleichen Winkelfortschritten erreicht, als Ordinaten auf gleich weit abstehenden Punkten der Abzisse xx' auf, so erhält man die eine Sinuskurve der Fig. 625 I.

Auf ganz gleiche Weise erhielte man die zweite Sinuskurve der Fig. 625 I., welche sich nur durch kleinere Amplitude und einen Gangunterschied von $^1/_{12}$ Wellenlänge von der früheren unterscheidet. Diese beiden Sinuskurven zusammensetzen, heißt jene Kurve aufsuchen, welche durch einen schwingenden Punkt entsteht, welcher, während er die Schwingungen nach der größeren Kurve durchmacht, auch noch zu Schwingungen nach der kleineren verhalten wird. Um dies herzustellen, können wir uns denken, daß sich ein kleinerer Zeiger von der Länge der Amplitude Ob_0 um die Spitze des größeren Zeigers a_0 als Achse im Kreise herumbewege (Fig. 625 II.). Für isochrone

[1]) Nach E. Mach.

lichen Maßstabes hingleitet. Dieser Schieber trägt ebenfalls eine Teilung, deren Striche bis zur Berührung mit den Strichen der Maßstabteilung gelangen, wie dies Fig. 45 zeigt. Die Teile des Verniers sind aber kleiner als die des Maßstabes, so daß z. B., wie in der Figur, auf 9 Teile des letzteren 10 Teile des Verniers fallen oder allgemein n Teile des Verniers auf $n - 1$ Teile des Maßstabes. Es ist also jeder Vernierteil in unserem Spezialfall um 0,1 oder allgemein um $1/n$ kleiner als ein Maßstabteil. Nehmen wir jetzt an, man habe das eine Ende der zu messenden Länge genau mit dem Nullpunkt der Teilung unseres Maßstabes zur Koinzidenz gebracht, so schiebt man den Vernier von oben gegen das andere Ende der fraglichen Länge heran, bis sein Nullpunkt mit diesem Ende zusammenfällt, es sei dies z. B. bei der Stellung des Schiebers wie in Fig. 46 der Fall. Alsdann sieht man nach, über welchem Teile des Maßstabes sein Nullstrich steht — es ist dies hier über 42 gegen 43 hin der Fall — und sucht darauf den Vernierteil auf, der mit einem Maßstabstrich genau zusammenfällt — dies ist hier der dritte Strich des Verniers von 0 an —. Daraus folgt, daß die zu messende Länge = 42,3 Maßstabteile ist. Man erkennt nämlich sofort, daß der Nullstrich des Schiebers 0,3 Maßstabteile über dem Strich 42 des letzteren steht, wenn man bedenkt, daß jeder Vernierteil um 0,1 Maßstabteil kleiner als dieser ist, also, da der Strich 3 koinzidiert, der Strich 2 um 0,1, der Strich 1 um 0,2 und der Nullstrich um 0,3 Maßstabteil vom nächsten Maßstabstrich nach oben zurückstehen muß. — Fallen also, wie angedeutet, allgemein n Vernierteile auf $n - 1$ Maßstabteile, so wird man mit dem Vernier bis auf $1/n$ Maßstabteil genau messen können. Es dürfte hiernach scheinen, daß man n nur sehr groß zu nehmen hat, um beliebig kleine Bruchteile der Maßstabteile, als beispielsweise des Millimeters, mit dem Vernier messen zu können. Die Dicke der Teilstriche des Maßstabes und seines Verniers setzt indessen dieser Verfeinerung der Messung durch den Vernier eine praktische Grenze; bei Millimeterteilungen auf Messing oder Eisen geht man gewöhnlich nicht über $^1/_{20}$ mm, d. h. 20 Teile des Verniers auf 19 mm des Maßstabes hinaus, und es bedarf schon einer sehr feinen Teilung auf Silber und einer Ablesung mit starker Lupe, wenn man bei einer Millimeterteilung noch einen Vernier mit 50 auf 49 Teile des Maßstabes soll anwenden können, der dann 0,02 mm ablesen läßt, ohne daß mehr als ein bestimmter Vernierstrich und nicht etwa zwei benachbarte zugleich mit Maßstabstrichen zusammenzufallen scheinen.

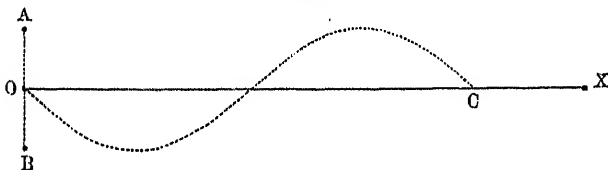
Wie für lineare Teilungen, so hat man auch für Kreisteilungen das Prinzip des Verniers angewendet, um Bruchteile der Teile des Kreises zu messen. In der Fig. 47 ist das Segment $A A$ eines Kreisbogens (Limbus) in ganze und halbe Grade geteilt; längs dieses Bogens gleitet ein kürzeres Kreisbogensegment B, das am Arme D (Alhidade) befestigt ist und mit diesem um das gemeinschaftliche Zentrum C beider Bogen drehbar ist. Wie man sieht, ist das Segment B als Vernier in 30 Teile geteilt, welche 29 Teilen, d. h. halben

Nonius, geb. 1492) im Jahre 1542 angegeben hat, um Unterabteilungen der Grade eines Quadranten zu messen, stützt sich zwar auf ein ähnliches Prinzip wie der Vernier, ist aber in der Anwendung durchaus verschieden, so daß die Bezeichnung des Verniers mit Nonius als ungerechtfertigt zu bezeichnen ist. Die Theorie des Vernier ist übrigens schon von Christ. Clavius aus Bamberg 1611 gegeben worden.

Schwingungen müssen wir dabei annehmen, daß beide Zeiger gleichzeitig einen ganzen Umlauf vollenden, wobei ihre Winkellagen relativ zur Abszisse zu nehmen sind. Die relative Lage beider Zeiger zueinander bleibt dann offenbar stets dieselbe, wie wenn sie starr verbunden wären. Dem Gangunterschiede der Wellen, bzw. der Phasendifferenz der Schwingungen entspricht der konstante Winkel φ, welchen die Verlängerung des Zeigers $O a_0$ mit dem Zeiger $a_0 b_0$ bildet. In Fig. 625 ist dieser Winkel $\varphi = 30^0$, also die Phasendifferenz $= {}^1/_{12}$ angenommen. Da bei der Konstanz des Winkels φ die Spitze des Zeigers b_0 ebenso einen Kreis beschreiben muß wie das Ende einer geraden Verbindungslinie $O b_0$, so erhellt sofort, daß wiederum eine Sinuskurve entstehen muß, und zwar von gleicher Wellenlänge, da ja auch die Umlaufszeit (Schwingungsdauer) der kombinierten Bewegung dieselbe ist. Die Figur läßt auch sofort erkennen, wie sich die Amplitude der zusammengesetzten Welle und ihr Gangunterschied gegenüber den komponierenden Wellen durch einfache Konstruktion des Dreiecks $O a_0 b_0$ auffinden läßt. Man hat nur mit den Amplituden $O a_2$ und $a_0 b_0$ der Komponenten das Dreieck mit dem Außenwinkel φ entsprechend der Phasendifferenz zu konstruieren. Die dritte Seite $O b_0$ dieses Dreiecks ist dann die resultierende Amplitude, der Winkel $a_0 O b_0$ entspricht dem Gangunterschiede der resultierenden Welle mit der ersten Komponente. Man übersieht sofort, daß die resultierende Amplitude von dem Gangunterschiede wesentlich abhängt, daß sie am größten für $\varphi = 0$, am kleinsten für $\varphi = 180$ wird; daß sie im Maximum gleich der Summe, im Minimum gleich der Differenz der Amplituden der Komponenten wird.

§ 209. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung. Um die längs eines linearen Mediums, z. B. längs eines Seiles, entstehenden Wellenbewegungen mathematisch darzustellen, hat man Gleichungen zu entwickeln, welche gestatten, die momentanen Exkursionen jedes Punktes, sowie seine momentane Geschwindigkeit für jeden beliebigen Zeitpunkt zu berechnen.

Fig. 626.



Diese Gleichungen gründen sich auf jene der schwingenden Bewegung eines Punktes, auf welchen eine Kraft einwirkt, welche in jedem Moment proportional dem Abstande des Punktes von seiner Ruhelage ist. Diese Bewegungsart, welche harmonische Bewegung oder auch Pendelbewegung genannt wird, haben wir im § 54 untersucht und sind dabei zur Aufstellung der Gleichungen gelangt, die wir, nach einigen Änderungen in der Bezeichnung, nachfolgend wieder aufführen.

Es stelle in Fig. 626 OX den elastischen Körper (das Seil) in seiner Ruhelage vor. Das Ende O werde zu Schwingungen längs AB angeregt, welche sich längs OX fortpflanzen und daselbst die Transversalwelle erzeugen. Es bedeute:

$a = OA = OB$ die Amplitude,
y den momentanen Abstand oy des schwingenden Punktes (nach aufwärts positiv, nach abwärts negativ gerechnet),
v_0 die Geschwindigkeit im Punkte O,
v „ „ „ Abstande y,
T die Dauer einer Doppelschwingung,
t die Zeit seit Beginn der Bewegung von O nach aufwärts.

Es gilt dann für die Exkursionen die Gleichung:

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

für die Geschwindigkeiten:

$$v = v_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bedeuten ferner:
C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,
λ die Wellenlänge,

so besteht nach § 202 der Zusammenhang:

$$\lambda = CT.$$

In einem Abstande x vom Punkte O an nach rechts kommt die Welle an in der Zeit $t = \frac{x}{C}$, zu dieser Zeit beträgt der Wert von y für den Punkt O:

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \sin 2\pi \frac{x}{CT} = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Um diesen Betrag von y, nämlich um $a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$, ist daher in bezug auf die Exkursion ein Punkt der Welle einem anderen voraus, welcher um die Strecke x weiter vom Ausgangspunkte entfernt liegt. Um denselben Betrag ist also der letztere im Rückstande.

Nehmen wir daher allgemein als Nullpunkt der Abszisse einen Punkt, welcher in der Zeit t erreicht wird, so ist daselbst der Wert von

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

für den um die Strecke x weiter entfernten Punkt aber ist

also
$$\left.\begin{aligned} y &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ v &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Eine weitere Aufgabe, welche durch Rechnung zu lösen ist, ist folgende. Es seien zwei Wellen gleicher Wellenlänge λ zusammenzusetzen, deren Amplituden a und a' sind, welche gegeneinander einen Gangunterschied $= d$ besitzen. Es soll die resultierende Amplitude A und der Gangunterschied der resultierenden Welle D gegenüber einer der beiden komponierenden Wellen bestimmt werden.

Diese Aufgabe könnte folgendermaßen angefaßt werden. Nach (1) ergeben sich für die Exkursionen y und y' die Werte:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right)$$

für die Exkursionen Y der kombinierten Welle ist nun die Summe dieser Ausdrücke zu bilden. Diese führt nach einer Reihe von Umformungen auf einen Ausdruck von der Form:

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{D}{\lambda}\right),$$

worin für A zu setzen ist:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2\,aa' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Zur Ermittelung von D gilt:

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Statt diesen Weg auszuführen, wollen wir übersichtlicher und einfacher mittels der im § 208 mitgeteilten Konstruktion (Fig. 625 II.) zum Ziele gelangen. Dieselbe läßt unmittelbar erkennen, erstens, daß die resultierende Welle wiederum eine Sinuskurve ist, zweitens, daß die Dreiecksseite Ob_0 gleich der resultierenden Amplitude A ist, endlich, daß der Winkel $a_0 O b_0$ der Phasendifferenz zwischen der resultierenden Welle und der Welle von der Amplitude $O a_0$ entspricht.

Bezeichnen wir also $O b_0$ mit A, $O a_0$ mit a, $a_0 b_0$ mit a', den Winkel $a_0 O b_0$ mit ψ, so folgt aus dem Dreieck nach dem Carnotschen Satze unmittelbar:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2\,aa' \cos \varphi}.$$

Aus der Proportion

$$\varphi : 2\pi = d : \lambda$$

folgt aber $\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}$, mithin:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2\,aa' \cos \frac{2\pi d}{\lambda}},$$

wie oben unter (2).

Aus demselben Dreieck folgt:

$$A : a' = \sin \varphi : \sin \psi$$

$$\sin \psi = \frac{a' \sin \varphi}{A} = \frac{a'}{A} \sin \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Aus der Proportion

$$\psi : 2\pi = D : \lambda$$

folgt

$$\psi = \frac{2\pi D}{\lambda},$$

also, indem wir dies oben einsetzen:

$$\sin \frac{2\pi D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin \frac{2\pi d}{\lambda},$$

wie oben unter (3).

D ist der Gangunterschied zwischen der resultierenden Welle und jener Welle mit der Amplitude a; der Gangunterschied zwischen der resultierenden und der anderen komponierenden Welle muß daher $d-D$ sein.

Die Formel (2) läßt erkennen, was die Fig. 625 II. sofort übersehen läßt, daß für $\varphi = 0$, d. h. wenn $d = 0$ oder $= n\lambda$ (wo n eine ganze Zahl ist) $A = a + a'$ wird, welches der Maximalwert ist.

Ebenso ergibt sich für $\varphi = 180$:

$$A = a - a';$$

hierbei ist der Gangunterschied d gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$.

Sind überdies die beiden Amplituden a und a' gleich groß, so folgt:

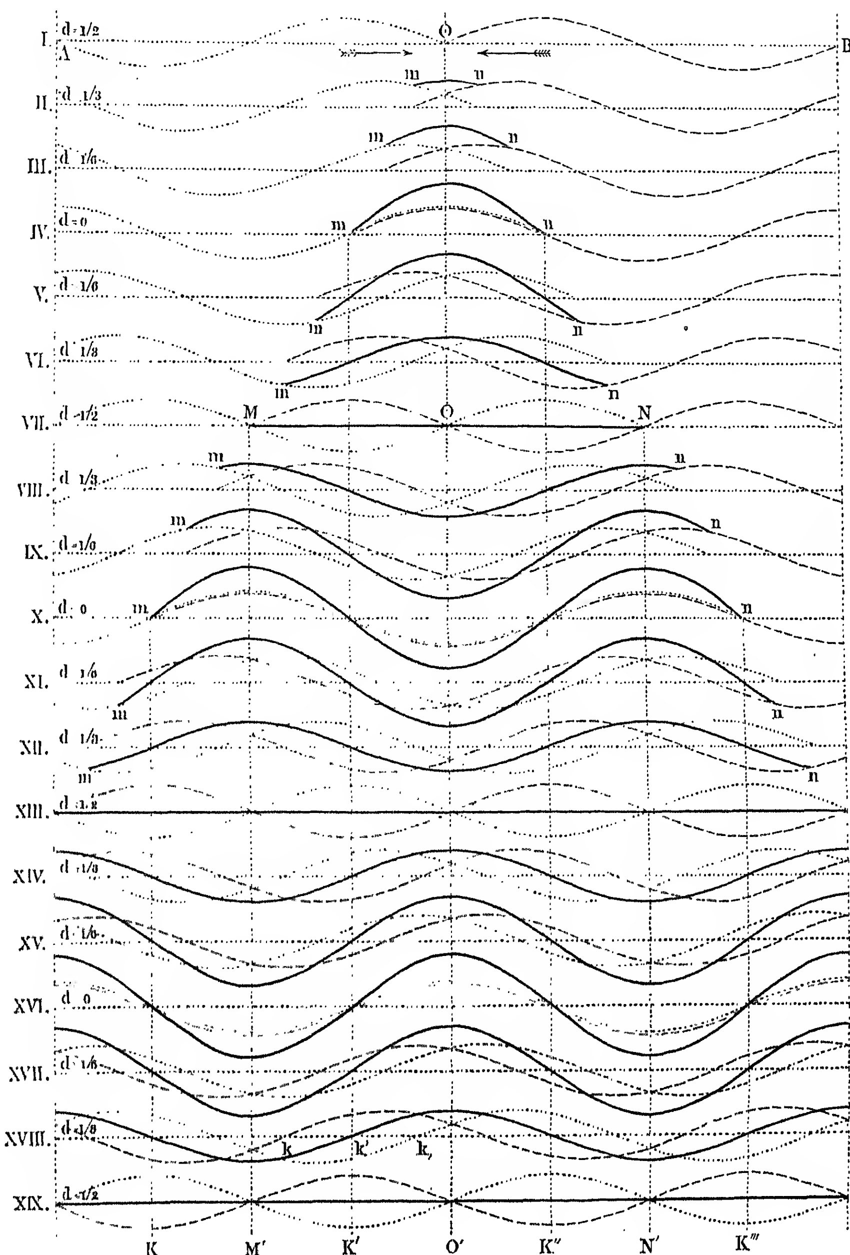
$$A = a - a' = 0.$$

Beträgt bei gleichen Amplituden der Gangunterschied $^1/_4$ Wellenlänge, so ist $\varphi = 90^0$, daher $\psi = 45^0 = {}^1/_8 . 360$; mithin ist die resultierende Welle gegen beide komponierenden um einen Gangunterschied von $^1/_8\, \lambda$ verschoben.

§ 210. Interferenz sich begegnender Wellen, Bildung stehender Wellen. In den vorangehenden Paragraphen wurde der Fall behandelt, daß zwei Wellen gleicher Wellenlänge zur Interferenz gelangen, welche entweder relativ zueinander nicht fortschreiten, oder von denen wir nur die momentane Lage der resultierenden Welle in Betrachtung ziehen. Gehen also zwei Wellen mit gleicher Geschwindigkeit nach derselben Richtung vor, so behält notwendigerweise die resultierende Welle ihre Gestalt und Amplitude während ihres Fortschreitens bei, da der Gangunterschied konstant bleibt. Bei der Interferenz von Wellen, welche zueinander eine relative Geschwindigkeit haben, also sich begegnen oder überholen, ist der Gangunterschied ein in jedem Augenblicke wechselnder, periodisch veränderlicher. Es muß daher auch die resultierende Wellenform eine periodische Aufeinanderfolge der Formen darstellen, welche aus der Kombination der interferierenden Wellen bei den verschiedenen Gangunterschieden hervorgehen. Um zu zeigen, was hierbei in dem Falle herauskommt, wo sich endlose Wellenzüge gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude begegnen, ist die Konstruktion der Fig. 627 I. bis XIX. ausgeführt. Die punktierte und die gestrichelte Kurve stellen die Komponenten, die ganz ausgezogene Kurve die Resultierende vor. Fig. 627 I. zeigt die beiden Wellen in dem Moment, wo sie im Punkte O zusammentreffen. In diesem Augenblicke ist ihr Gangunterschied $d = {}^1/_2\, \lambda$; denn es würde einer Verschiebung im Sinne ihrer Bewegungsrichtung von einer halben Wellenlänge bedürfen, um die beiden Wellen zur Deckung zu bringen. In Fig. 627 II. sind beide Wellen um je $^1/_{12}$ ihrer Wellenlänge über den Punkt O, wo sie sich begegneten, hinweggeschritten; ihr Gangunterschied, früher $= {}^6/_{12}$, hat sich demnach um $^2/_{12}$ vermindert, beträgt also jetzt nur mehr $^4/_{12} = {}^1/_3$ einer Wellenlänge. Die durch Addi-

tion der Ordinaten erhaltene Kurve mn stellt die resultierende Form der kombinierten Welle vor. Die folgenden Fig. 627 III., IV., V., VI. und so fort

Fig. 627.



stellen das Resultat der Interferenz in immer späteren Zeitmomenten vor, die um je $^1/_{12}$ der Schwingungsdauer voneinander abstehen, wobei also der Gangunterschied sich um je $^2/_{12}\ \lambda$ verändert. In Fig. 627 IV. ist derselbe

$= 0$ geworden. Die beiden Komponenten kommen, soweit sie übereinander greifen, zur vollständigen Deckung, es entsteht eine Resultierende von doppelter Amplitude. In den Fig. 627 V., VI. tritt wieder ein Gangunterschied auf, der in Fig. 627 VII. eine halbe Wellenlänge erreicht. Hier beträgt die Strecke, längs welcher die Wellen übereinander zu liegen kommen, bereits eine ganze Wellenlänge. Längs dieser ganzen Strecke MN heben sich momentan alle Exkursionen gegenseitig auf, die resultierende Welle hat momentan die Form der geraden Linie MN.

Die weitere Entwickelung des Interferenzvorganges läßt sich nun sofort aus den folgenden Figuren ersehen, welche kaum mehr einer weiteren Erklärung bedürfen. In Fig. 627 X. kommt es wieder zur vollen Unterstützung, in Fig. 627 XIII. dagegen zur gegenseitigen Aufhebung der Exkursionen. Die Interferenz erstreckt sich nunmehr auf zwei Wellenlängen. Setzen wir die Zeichnung innerhalb dieses Rahmens fort, so ergibt sich bei Fig. 627 XVI. neuerdings Verdoppelung, bei Fig. 627 XIX. Aufhebung der Exkursionen.

Bezüglich der resultierenden Welle läßt sich nun folgendes entnehmen. Erstens muß dieselbe, wie in den §§ 208 und 209 nachgewiesen wurde, immer wieder die Form einer Sinuskurve haben, und zwar von gleicher Wellenlänge. Zweitens ergibt die Konstruktion, daß die resultierende Welle nicht fortschreitet, sondern an der Stelle bleibt. Die Maxima der Ordinaten sind nämlich offenbar stets symmetrisch in der Mitte der Maxima der Komponierenden gelegen. Da die letzteren aber von beiden Seiten gleich schnell zusammenrücken, so kann das Maximum der Resultierenden nicht von der Stelle rücken. Sämtliche Bäuche der Resultierenden bleiben also unter den Vertikallinien MM', OO', NN', ändern daselbst ihre Höhe, aber nicht ihren Platz.

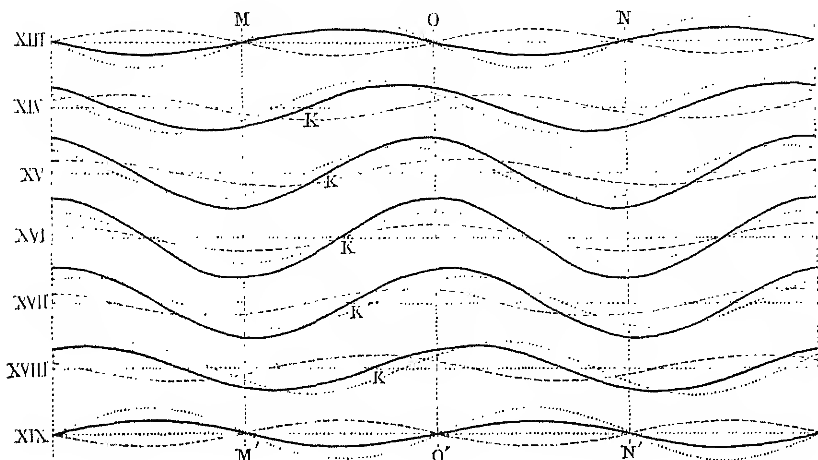
Ebenso übersieht man sofort, daß die Nullexkursionen (Knotenpunkte) der resultierenden Welle in der Mitte zwischen den Nullexkursionen der komponierenden Wellen liegen und dort an der Stelle verbleiben müssen. Also z. B. der Knotenpunkt k' zwischen k und k_1 in Fig. 627 XVIII. Es bleiben also sämtliche Knotenpunkte der resultierenden Kurve an den über K, K', K'', K''' errichteten Vertikallinien stehen.

Das Resultat der Interferenz zweier gegeneinander fortschreitender Wellen gleicher Wellenlänge und Amplitude ist also eine stehende Welle gleicher Wellenlänge und doppelter Amplitude. Eine solche stehende Welle hat das Charakteristische, daß ihre Berge und Täler nicht fortschreiten, sondern auf derselben Stelle miteinander wechseln. Dabei gehen alle Punkte des schwingenden Körpers gleichzeitig durch die Ruhelage und erreichen auch gleichzeitig die äußersten Exkursionen. Läßt man also auf irgend eine Weise längs eines gespannten Seiles von beiden Seiten einander endlose Wellenzüge entgegengehen, so teilt sich das Seil in Partien von je einer halben Wellenlänge ab, welche, wie die Fig. 627 XIII. bis XIX. zeigen, gleichzeitig und zwar zweimal während der ganzen Dauer einer Einzelschwingung geradlinig werden und dazwischen in abwechselnd entgegengesetzter Richtung Ausbauchungen annehmen.

Wären die Amplituden der beiden Wellenzüge nicht gleich groß, so könnte man sich die Welle mit der größeren Amplitude in zwei Wellen zerlegt denken, von denen die erste eine gleiche Amplitude hätte mit der entgegenbewegten. Diese beiden würden dann für sich eine stehende Welle abgeben. Der Überschuß der Amplitude der zweiten Welle entspricht

dann einer fortschreitenden Welle. Unter diesen Umständen gehen dann nicht mehr alle Punkte gleichzeitig durch die Ruhelage wie bei der reinen stehenden Welle; sowohl die Bäuche als die Knoten haben eine fortschreitende Bewegung. Die Fig. 628 stellt hierfür ein Beispiel vor. Die

Fig. 628.



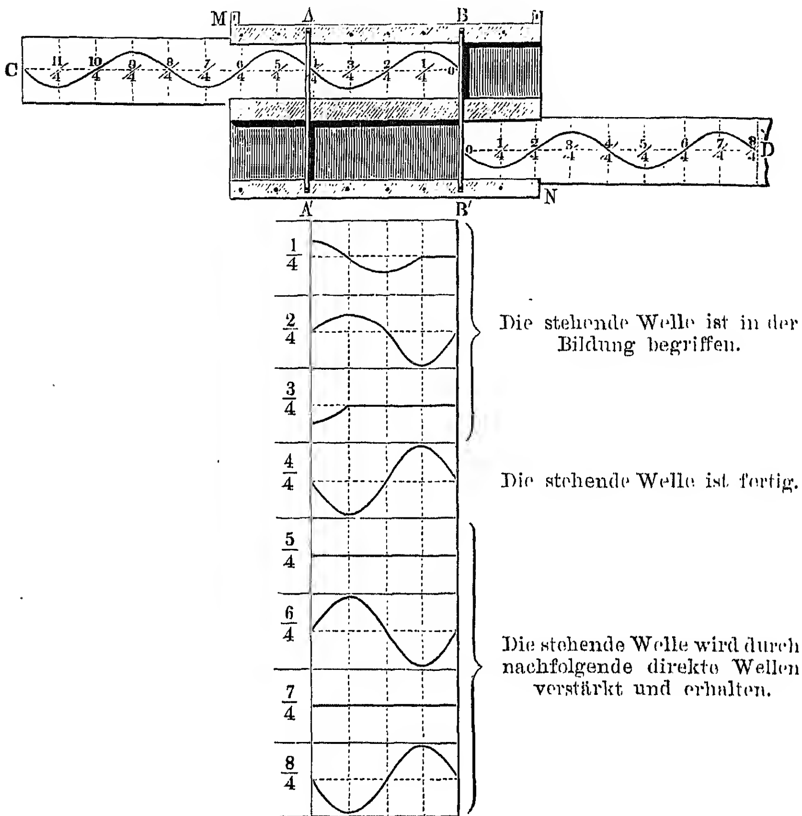
römischen Ziffern deuten die analogen Fälle der Fig. 627 an. Die Amplitude der gestrichelten Komponente ist halb so groß als die der punktierten; im übrigen bedarf die Figur wohl keiner Erklärung.

§ 211. Stehende Wellen infolge Interferenz direkter fortschreitender mit reflektierten Wellen; Meldes Versuche. Die in dem vorausgegangenen Paragraphen gewonnenen Resultate, verbunden mit jenen des § 207 über die Reflexion am festen oder freien Ende des elastischen Körpers führen nun zusammen zur Erklärung der sehr häufigen und wichtigen Tatsache, daß durch das Zusammenwirken direkter fortschreitender Wellen mit solchen, welche nach ihrer Reflexion zurückkehren, stehende Schwingungen sich bilden. Damit das jedoch eintreten könne, muß zwischen den Dimensionen des elastischen Körpers und der Wellenlänge ein gewisses Verhältnis obwalten. Da aber die Wellenlänge wiederum von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungszahl abhängt, so ergeben sich daraus die Bedingungen, unter welchen ein elastischer Körper durch auf ihn ein wirkende Schwingungen gegebener Tonhöhe ins Mitschwingen oder in „Resonanz“ versetzt werden kann.

Zunächst soll gezeigt werden, wie an einem an beiden Enden befestigten gespannten Seile stehende Wellen durch Interferenz der direkten mit den reflektierten entstehen können. Hierbei leistet eine einfache Vorrichtung wesentliche Dienste, welche in Fig. 629 in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe abgebildet ist. Auf dem Brettchen MN sind zwischen parallelen Leisten Streifen von Pappe (CD) verschiebbar, auf welchen Wellenkurven nebst ihren Abteilungen in Viertelwellen gezeichnet sind. Zwei andere Leisten AA' und BB' können in Abständen gleich Vielfachen von $^1/_4$ Wellenlänge vertikal und parallel befestigt werden. In der Fig. 629 stehen sie z. B. eine Wellenlänge

gespannten Seiles vor. Die ganze Vorrichtung wird auf der Wandschreibtafel aufgehängt, so daß unmittelbar darunter die resultierenden Kurven gezeichnet werden können. Der Leser wird es vorteilhaft finden, sich die Wellensysteme (in größerem Maßstabe) auf Papierstreifen zu zeichnen und auf dem Tische unter zwei Linealen, welche die Vertikalleisten vertreten, aneinander zu ver-

Fig. 629.



schieben. Es sind mehrfach auch Vorrichtungen konstruiert worden, bei welchen die Wellenzüge auf Bänder ohne Ende, welche um je zwei Walzen in entgegengesetzter Richtung laufen, aufgetragen sind. Die Länge des schwingenden Körpers wird dabei durch vorgestellte Schirme begrenzt. Benutzt man den unter Fig. 624 beschriebenen Apparat, so sollte man nicht allein die Schablone, sondern auch das Gestell gleichzeitig gegeneinander verschieben, um die resultierend stehende Welle wirklich stillstehend zu erhalten. Die Form der stehenden Welle wird demnach auch erhalten, wenn man das Gestell in Ruhe beläßt, aber die Schablone ums Doppelte verschiebt.

Beginnen wir mit dem Falle, daß die Länge des Seiles gleich der Wellenlänge, so erhalten die Leisten AA' und BB' die in Fig. 629 gezeichnete Lage. Nehmen wir ferner an, beide Enden seien befestigt; der Wellenberg wird also stets als Wellental, Wellental als Wellenberg reflek-

tiert. Die Figur zeigt den Moment, wo die direkte Welle an BB' anstößt. Von hier beginnt die Interferenz; wir finden ihr Resultat in den aufeinander folgenden Zeitpunkten nach $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ usw. Schwingungsdauer, indem wir beide Streifen gegen BB' verschieben, die Bezifferungen $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ usw. an die Innenkante von BB' stellen und dann die algebraische Summe der Exkursionen konstruieren. Dies ist in der Fig. 629 durchgeführt. Zum besseren Verständnis ist es zweckmäßig, noch mehrere Unterabteilungen zu machen, z. B. den Zustand des Seiles für je $^1/_{12}$ Schwingungsdauer auszumitteln. Man erkennt leicht, daß nach einer ganzen Schwingungsdauer die zum zweiten Male reflektierte erste Welle mit der gleichzeitig bei A eintretenden zweiten direkten Welle zusammenfällt, also durch dieselbe verstärkt wird. Man ersieht ferner, daß die fertige, stehende Welle an den Enden und in der Mitte ruhig stehende Punkte, d. h. Knotenpunkte, besitzt, durch welche sie in zwei schwingende Hälften zerlegt wird, welche beide gleichzeitig, aber in entgegengesetzter Richtung durch die Ruhelage hindurchschwingen.

Verkürzen wir nun die Distanz AB um $^1/_4$ Wellenlänge, so daß also die beiden Vertikalleisten noch $^3/_4$ Wellenlänge voneinander abstehen. Die Durchführung der obigen Konstruktion ergibt dann, daß die zum zweiten Male reflektierte erste Welle mit der gleichzeitig bei A eintretenden Wellenbewegung in entgegengesetzter Schwingungsrichtung zusammentrifft, mithin die direkten Wellen durch die reflektierten vernichtet werden. Da dies mit jeder folgenden Welle sich wiederholt, so entstehen in diesem Falle gar keine stehenden Wellen.

Nehmen wir jetzt die durch den Abstand AB der Vertikalleisten vorgestellte Seillänge gleich einer halben Wellenlänge (indem wir z. B. die Leiste AA' auf die Mitte zwischen AA' und BB' stellen) und führen dieselbe Konstruktion wie früher durch, so erhalten wir eine Reihe von Zeichnungen, welche wir nicht eigens abzubilden brauchen, da sie vollständig mit denen der rechtsseitigen Hälfte in Fig. 629 übereinstimmen. Die stehende Welle ist diesmal schon nach einer halben Schwingungsdauer fertig; sie bleibt jedoch stets eine halbe Welle, bei welcher nur eine Ausbauchung vorhanden ist, welche abwechselnd als Berg und Tal auftritt und inzwischen momentan die geradlinige Ruhelage annimmt.

Versuchen wir endlich, die Seillänge gleich $^1/_4$ Wellenlänge zu nehmen, so überzeugen wir uns sofort, daß der bei $^3/_4$ Wellenlänge eingetretene Fall eintritt, nämlich die zweimal reflektierten und direkten Wellen sich gegenseitig aufheben.

Dehnt man diese Betrachtungen auch auf größere Längen als eine Wellenlänge aus, so gelangt man zu dem allgemeinen Resultat, daß ein an beiden Enden befestigtes Seil (sowie auch eine gespannte Saite) nur dann in stehende Schwingungen versetzt werden kann, wenn die Länge ein gerades Vielfaches einer Viertelwellenlänge, also gleich $^1/_2$, 1, $1^1/_2$, 2 usw. Wellenlängen ist.

Will man die Schwingungsgesetze für ein Seil (einen Stab) ermitteln, von welchem nur ein Ende unverrückbar befestigt, das andere Ende, wie Fig. 623 III und IV darstellt, beweglich ist, so ersetzt man den Streifen D der Fig. 629 durch einen solchen nach Fig. 630, bei welchem die Schwingungsrichtungen entgegengesetzt sind. Man findet dann leicht, daß in diesem Falle stehende Schwingungen nur möglich sind, wenn die Länge des Seiles

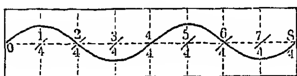
(Stabes) gleich einem ungeraden Multiplum einer Viertelswellenlänge, also gleich $^1/_4$, $^3/_4$, $^5/_4$ usw. der Wellenlänge ist.

Endlich kann man auch noch den Fall eines an beiden Enden freien elastischen Körpers (z. B. eines in der Mitte eingeklemmten elastischen Stabes) untersuchen, indem man darauf Rücksicht nimmt, daß in diesem Falle an beiden Enden der Wellenberg als solcher und ebenso das Wellental als solches reflektiert werden.

Die experimentelle Bestätigung dieser theoretischen Ergebnisse ist in mannigfacher Weise möglich.

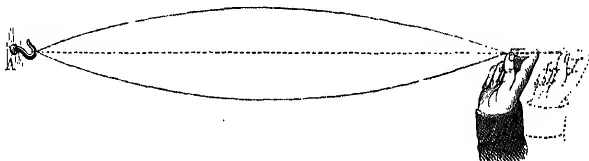
Die Schwingungen des Seiles kann man, wenn beide Enden befestigt sind, dadurch hervorbringen, daß man in einiger Entfernung von der Befestigungsstelle rhythmische Exkursionen erzeugt und die Schwingungszahl so lange ändert, bis sich die stehenden Wellen bilden. Solange die Spannung des Seiles dieselbe bleibt, ist auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe. Da nun der während einer ganzen Schwingung zurückgelegte Weg der Welle gleich der Wellenlänge ist, so ist diese proportional der Schwingungsdauer, also verkehrt proportional der Schwingungszahl. Durch Erhöhung der Schwingungszahl kann man also die Wellenlänge verkürzen. Man hat es demnach in der Gewalt, die Wellenlänge nach der Seillänge zu richten, doch könnte man auch umgekehrt die Seillänge nach der Wellenlänge richten. Endlich kann man die Wellenlänge auch dadurch modifizieren und der Seillänge anpassen, daß man die Spannung des Seiles ändert. Stärkere Spannung ruft größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also längere Wellen hervor. Nach allen diesen Methoden ist es möglich, das Seil so in stehende Schwingungen zu versetzen, daß es mit einem Bauche oder mit zwei, drei, vier usw. Bäuchen (halben Wellen) schwingt.

Fig. 630.



Viel leichter gelingt, wenn das Seil horizontal gespannt ist, dieses Experiment, wenn man den geradlinigen Transversalschwingungen kreisförmige substituiert. Befestigt man das Ende einer langen, weißen, mehrere Millimeter dicken Schnur am Umfange einer rotierenden Scheibe, so daß es Kreise mit etwa 1 dm Radius beschreibt, so kann man leicht stehende Wellen mit zehn und mehr Knotenpunkten erhalten und auch zeigen, wie bei unveränderter Geschwindigkeit durch Vermehrung der Spannung die Anzahl derselben sich vermindert, weil die Wellenlänge sich vergrößert.

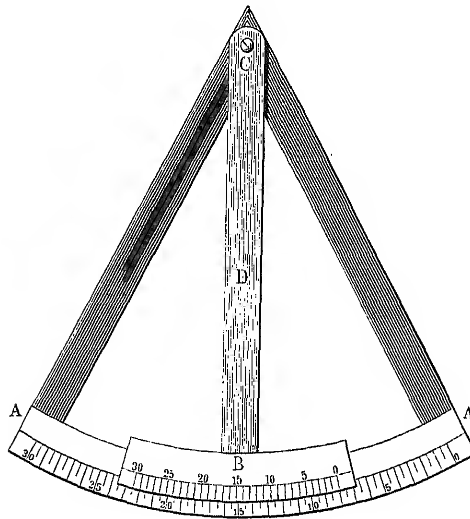
Fig. 631.



Eine andere Art, ein Seil in Transversalschwingungen zu versetzen, ist durch die Fig. 631 genügend angedeutet. Hierbei macht die erregende Hand selbst keine transversale, sondern longitudinale Schwingungen, welche aber transversale Schwingungen des Seiles erzeugen. Dabei ist jedoch der wichtige Umstand zu beachten, daß jeder ganzen Schwingung der Hand nur eine halbe

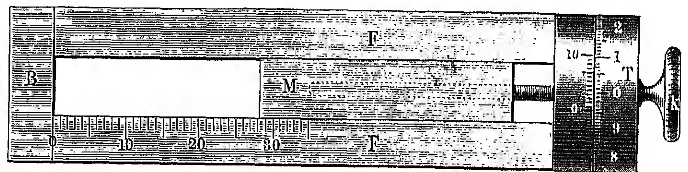
Graden des Segments AA entsprechen; es ist also jeder Vernierteil um $^1/$ kleiner als ein Kreisteil oder $^1/_2{}^0$, man kann also mittels des Verniers noc $^1/_{60}{}^0 = 1'$ genau aus der Übereinstimmung eines seiner Striche mit eine Strich der Kreisteilung messen. — Ist, wie dies bei feineren Instrumente geschieht, der Kreis auf Silbe in $^1/_6{}^0 = 10'$ geteilt und so man am Vernier noch 10' d. h. also $^1/_{60}$ Kreisteil gena ablesen können, so muß als der Vernier so geteilt sein, da 60 seiner Teile auf 59 Teil des Kreises fallen. Die Mög lichkeit sicherer Ablesung de Verniers erfordert in diesen Falle schon einen größere Durchmesser des Kreises, ab gesehen von der Benutzung einer starken Lupe.

Fig. 47.



Die Mikrometer-schraube. Wenn wir eine Schraube um ihre Achse ein-mal herumdrehen, so wird bei fester Schraubenmutter sie selbst um die Höhe eines Schraubenganges in der Richtung der Achse vorrücken oder, wenn sie selbst sich nicht fortbewegen kann, so wird sie die bewegliche Mutter um ebenso-viel in derselben Richtung fortschieben. Bringt man also auf einer am Schraubenende befestigten Trommel eine Teilung an, auf welche ein fester Index weist, so wird man an ihr entsprechende Teile einer Umdrehung der Schraube oder also einer Fortschiebung der Mutter um eine Schraubengang-höhe ablesen können. Ist die Schraubenganghöhe klein und die Trommel

Fig. 48.



in viele Teile eingeteilt, so werden sich so offenbar recht kleine Größen durch das Fortschieben der Schraubenmutter messen lassen daher der Name **Mikrometerschraube**. Die Fig. 48 kann das Prinzip und die Funktion einer solchen Mikrometerschraube verdeutlichen. Wenn man am Schraubenkopf k dreht, so wird bei jeder ganzen Umdrehung die Mutter M, welche als Schlitten innerhalb der Führung FF beweglich ist, um eine Schraubenganghöhe, das ist 1 mm fortgeschoben, und man wird die Zahl der ganzen Schraubendrehungen an der linearen Skala F ablesen können; die Bruchteile aber einer Umdrehung liest man an der in 100 Teile geteilten

chwingung des Seiles entspricht. Die Schwingungszahl des erregenden Körpers muß daher bei dieser Anordnung noch einmal so groß sein als bei der transversalen Anordnung. Die beste und schönste Methode zur Erregung von stehenden Transversalwellen ist die von F. Melde erfundene[1]), welche darauf beruht, gespannte Fäden durch die Schwingungen einer Stimmgabel (oder auch einer Glasglocke, einer Saite usw.) anzuregen.

Fig. 632 zeigt einen der nach Meldes Angaben von Schubart in Marburg ausgeführten Apparate zur Anstellung dieser schönen Versuche.

Fig. 632.

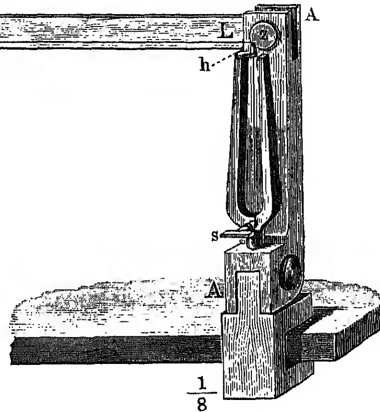
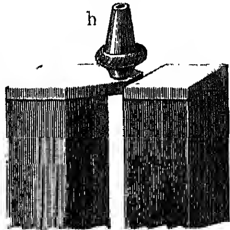


Fig. 633.



Auf einem Holzstück A, welches an ein Tischblatt festgeschraubt werden kann, ist eine Stimmgabel angebracht, deren linker Schenkel oben ein Messingplättchen mit einer kleinen Hülse h trägt, deren Achse mit der Mittellinie der ganzen Gabel zusammenfällt. Auf dem anderen Schenkel ist ein zweites Messingplättchen aufgeschraubt, welches lediglich dazu dient, das auf dem linken Schenkel aufgeschraubte zu äquilibrieren. In Fig. 633 ist das obere Ende der beiden Schenkel in natürlicher Größe dargestellt.

Durch diese Hülse h ist ein Seidenfaden c (oder auch eine Violin-e-Saite) gezogen, welcher einerseits in dem Zapfen s am unteren Ende der Stimmgabel befestigt, andererseits aber durch einen Spalt des Messingschiebers b gezogen ist und hier mittels der kleinen Schraube d festgeklemmt werden kann. Durch Umdrehung des Zapfens s kann man die Spannung des Fadens nach Belieben vermehren oder vermindern.

Will man die Spannung durch Gewichte regulieren, so läßt sich statt der Klemme d eine Rolle mit horizontaler Achse anbringen, über welche der Faden gelegt wird.

Der Messingschieber b ist an einer 1 m langen Latte verschiebbar, so daß man den Faden nach Belieben verlängern oder verkürzen kann.

Die Latte L selbst ist um den Zapfen z drehbar, so daß man den Faden, welcher in unserer Figur eine horizontale Richtung hat, um jeden beliebigen

[1]) F. Melde, Pogg. Ann. **109**, 192 bis 215, 1859 und **111**, 513 bis 540, 1860; eine neuere Zusammenstellung dieser und neuerer Experimente findet sich noch Wiedem. Ann. **21**, 452, 1884 und **24**, 497, 1885, sowie in Melde, Akustik, Leipzig 1883.

Winkel von der Horizontalen entfernen und auch ganz vertikal stellen kann, wenn man die Latte L aus der horizontalen Lage um 90° dreht.

Auch die Stimmgabel ist um den Zapfen drehbar, mittels dessen sie in das Holzstück A eingeschraubt ist.

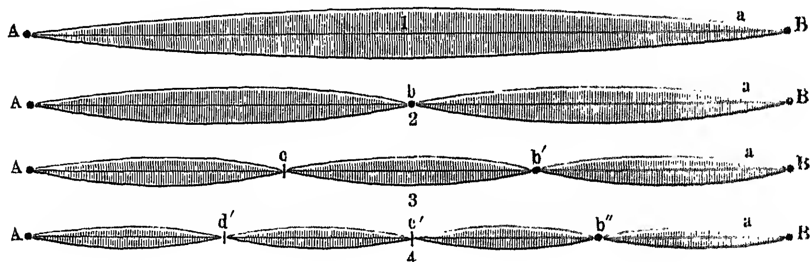
Betrachten wir zunächst die Erscheinungen, welche man an dem Apparate beobachten kann, wenn alles in der Fig. 632 dargestellten Lage ist.

Wird die Stimmgabel zum Tönen gebracht, was am einfachsten durch Anstreichen mit einem Baßgeigen-Fiedelbogen geschieht, so werden durch die Vibrationen der Hülse h Wellen in dem Faden erzeugt, welche in der Richtung von h gegen d hin fortschreiten und, bei d reflektiert, wieder gegen h hin zurücklaufen. Durch die Interferenz der direkten und der reflektierten Wellen wird nun der Faden in stehende Schwingungen versetzt, wenn die Länge des Fadens genau ein Vielfaches von der halben Länge der Wellen ist, welche die vibrierende Stimmgabel in dem Faden erzeugt.

Je stärker der Faden gespannt ist, desto schneller pflanzen sich die von der Stimmgabel ausgehenden Vibrationen in demselben fort, desto größer wird also die Länge der Wellen, welche der Faden fortpflanzt. Durch Veränderung der Fadenspannung hat man es also in der Gewalt, zu bewirken, daß die Länge des Fadens 1mal, 2mal, 3mal usw. so groß ist als die halbe Wellenlänge.

Ist der Faden so gespannt, daß seine Länge gleich $^1/_2$ Wellenlänge ist, so schwingt er seiner ganzen Länge nach entsprechend der Fig. 634_1.

Fig. 634.



Ist der Faden so gespannt, daß seine Länge gleich $^2/_2$ Wellenlängen, so schwingt er in der durch Fig. 634_2 dargestellten Weise, d. h. es bildet sich ein Schwingungsknoten in der Mitte des Fadens.

Ist der Faden so gespannt, daß seine Länge gleich ist $^3/_2$ Wellenlängen, so schwingt er in der durch Fig. 634_3 dargestellten Weise, d. h. es bilden sich zwei Schwingungsknoten und drei Bäuche.

Hat man bei der gegenseitigen Stellung der Stimmgabel und des Fadens, wie sie in Fig. 632 dargestellt ist, die Spannung des Fadens so reguliert, daß er seiner ganzen Länge nach schwingt (entsprechend der Fig. 634_1), wenn man die Stimmgabel anstreicht, so ist der Ton des Fadens (welcher namentlich ganz gut hörbar ist, wenn er durch eine Violin-e-Saite gebildet wird) die nächst tiefere Oktav vom Ton der Stimmgabel. Ist also der Gabelton c_1, so ist der Fadenton unter den angegebenen Umständen c_0; die entsprechende Spannung des Fadens wollen wir mit S_1 bezeichnen.

Vermindert man nun die Spannung des Fadens mehr und mehr, so gelangt man endlich zu einer Spannung S_2, bei welcher sich, wenn man die Stimmgabel anstreicht, ein Knoten in der Mitte des Fadens bildet (Fig. 634_2). Auch unter diesen Umständen ist der Ton des Fadens die nächst niedere Oktav von dem der Stimmgabel; bei der Spannung S_2 würde also der Ton des Fadens, wenn er ohne Schwingungsknoten seiner ganzen Länge nach oszillierte, um zwei Oktaven tiefer sein als der Stimmgabelton.

Zwischen der Spannung S_1 und der Spannung S_2 gibt es eine andere, die wir mit S_a bezeichnen wollen, für welche sich der Faden in der der Fig. 634_3 entsprechenden Weise abteilt, also drei Bäuche bildet. In diesem Falle aber ist die Schwingungsweite des Fadens bei weitem geringer, als man sie bei den Spannungen S_1 und S_2 beobachtet.

Die Bahn, welche der Punkt h beschreibt, während die Stimmgabel vibriert, ist nun nicht geradlinig, sondern elliptisch. Die große Achse dieser Ellipse fällt mit der Richtung des Fadens zusammen, sie ist longitudinal; die allerdings bei weitem kleinere kleine Achse dieser Ellipse steht rechtwinkelig zur Richtung des Fadens, sie ist transversal.

Die bei der Spannung S_1 und S_2 beobachteten Oszillationen des Fadens rühren von dem longitudinalen Anteil der Gabelvibrationen her. Die durch die longitudinale Bewegung von h erzeugten Wellen sind aber nicht allein weit intensiver als die durch die Transversalbewegung von h erzeugten, sondern sie pflanzen sich auch im Faden mit doppelt so großer Geschwindigkeit fort.

Bei den Spannungen S_1 und S_2 sind die Oszillationen des Fadens, welche durch die Longitudinalvibrationen des Punktes h erzeugt werden, so überwiegend, daß gegen sie die Oszillationen verschwinden, welche von den Transversalvibrationen von h herrühren.

Bei der Spannung S_a dagegen können die Longitudinalvibrationen von h keine stehenden Wellen des Fadens erzeugen, weil die Fadenlänge unter diesen Umständen $^3/_4$ von der Länge der Wellen ist, welche durch die Longitudinalvibrationen von h im Faden erzeugt werden; deshalb aber werden bei der Spannung S_a die stehenden Wellen sichtbar, welche in dem Faden durch die Transversalvibrationen von h erzeugt werden.

Dreht man die Leiste LL aus der in Fig. 632 dargestellten Lage um 90^0, so daß der Faden vertikal steht, so sind die Vibrationen von h durchaus transversal zum Faden. Dieser zeigt alsdann

bei der Spannung S_1	2 Bäuche	und 1	Knoten
„ „ „ S_a	3 „	„ 2	„
„ „ „ S_2	4 „	„ 3	„

Einige sehr schöne, mit größeren Mitteln ausführbare Modifikationen dieses Versuches sind von J. Tyndall angegeben worden[1]). Derselbe ersetzte den Faden durch einen Platindraht, der durch einen elektrischen Strom zum Glühen erhitzt wird. Dabei leuchten die Knoten am hellsten, während die Bäuche, weil sie durch die Bewegung stärker abgekühlt werden, weniger hell glühen.

[1]) J. Tyndall, Der Schall, deutsche Ausgabe von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869.

Nach Looser kann die Stimmgabel durch eine elektrische Klingel ersetzt werden, deren Glocke abgeschraubt ist. Der Faden wird an dem Klöppel befestigt. Die Schwingungsweite ist dann größer als bei der Stimmgabel.

Vorleseversuche über Messungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in gespannten Fäden hat W. Elsässer[1]) beschrieben.

§ 212. Stehende Luftwellen; Resonanzröhren. Wie wir im § 198 gezeigt haben, unterscheiden sich die Longitudinalwellen von den Transversalwellen wesentlich dadurch, daß an Stelle der auf die Fortpflanzungsrichtung senkrechten Exkursionen der letzteren solche Exkursionen treten, welche in die Richtung der Fortpflanzung selbst fallen. Wir können daher auch alles das, was wir in den §§ 208 bis 210 in bezug auf die Zusammensetzung und Interferenz zweier Transversalwellen vorgetragen haben, auf die Longitudinalwellen übertragen, indem wir bezüglich der Exkursionen aus der Querrichtung in die Längsrichtung übergehen. Wir erhalten so die Form der resultierenden Longitudinalwellenbewegung aus der entsprechenden Transversalwelle, ohne daß wir nötig hätten, die Addition der Exkursionen nochmals durchzuführen.

Als longitudinal schwingenden Körper können wir uns eine Weinholdsche Spirale (§ 199) oder eine Luftsäule, welche in eine Röhre eingeschlossen ist, vorstellen. Ein geschlossenes Ende dieser Röhre würde dem festgehaltenen Ende der Spirale beziehungsweise dem befestigten Ende eines Seiles entsprechen. Ebenso wäre ein offenes Ende der Röhre analog dem freien Ende der Spirale, beziehungsweise des Seiles oder eines eingespannten elastischen Stabes. Am geschlossenen Ende einer Röhre werden daher Longitudinalwellen so reflektiert, daß sie mit einem Gangunterschiede von einer halben Wellenlänge zurückkehren, während sie vom offenen Ende ohne Gangunterschied zurückkehren (§ 207).

Die Fig. 635 ist nun dazu bestimmt, die korrespondierenden Bewegungen stehender Transversal- und Longitudinalwellen darzustellen.

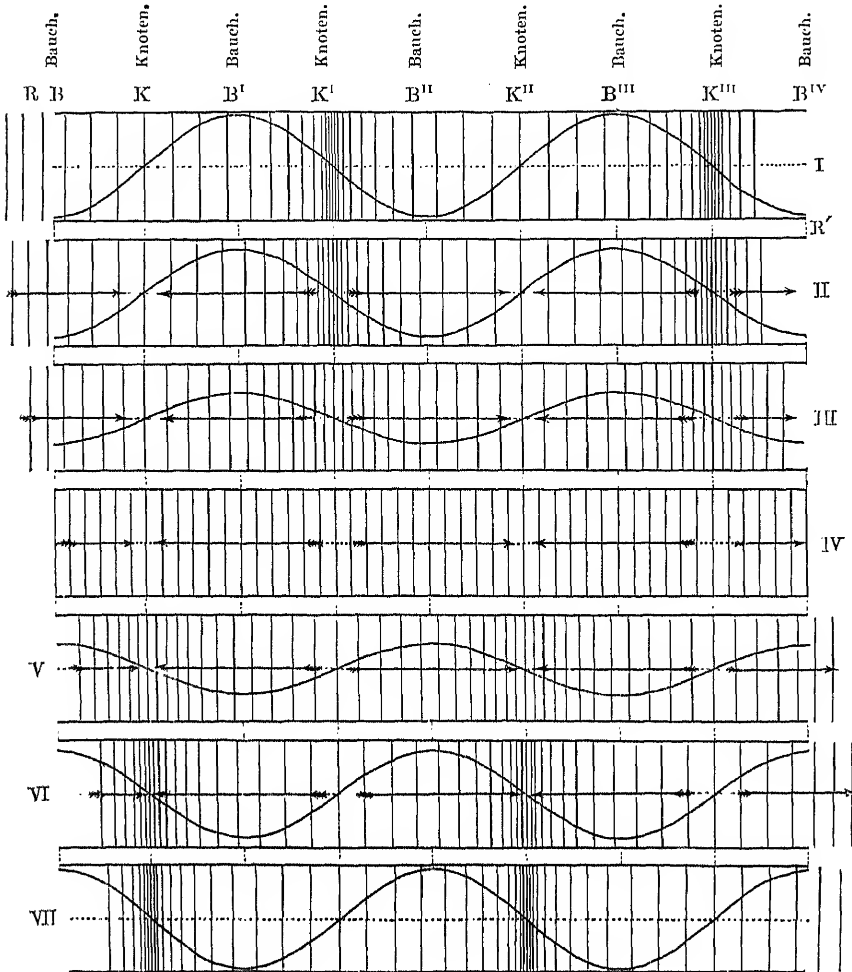
Zu diesem Zwecke sind in das Innere der Röhre RR' sowohl die longitudinal schwingenden Luftschichten in Form von Vertikallinien, als auch die korrespondierende Transversalwelle eingezeichnet. Die Länge der an beiden Enden offenen Röhre ist gleich zwei Wellenlängen. Fig. I. zeigt den Schwingungszustand im Moment einer größten Exkursion. Die momentane Geschwindigkeit aller Teile ist gleich Null. Die Luftschichten zeigen an den Knoten K und K'' eine Verdünnung, an den Knoten K' und K''' eine Verdichtung. Wie es zu diesen kommt, ist leicht einzusehen, wenn man sich die Entstehung der Zeichnung vergegenwärtigt. Fig. IV. zeigt die Röhre im Ruhezustande, die Grenzlinien der Luftschichten haben daselbst überall gleichen Abstand. Verschiebt man nun jede dieser Grenzlinien um ebensoviel nach rechts oder nach links, als die Ordinaten der Kurve in I. nach oben oder nach unten reichen, so resultiert die Verteilung der Luftschichten, wie sie in I. dargestellt ist. Am linksseitigen Ende rücken die Luftschichten über das Röhrenende hinaus, am rechtsseitigen ziehen sie sich vom Ende zurück. Es wird nützlich sein zu bemerken, daß die Größe dieser Exkursionen sehr übertrieben angenommen und in Wirklichkeit viel geringer ist.

[1]) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht **16**, 200 (1903).

Die Figuren II, III bis VII zeigen nun den Verlauf der stehenden Schwingungen bis zum Ende einer halben Schwingungsdauer. In II beginnen die Luftmassen von den Knoten, wo die größte Verdichtung herrschte, sich auszubreiten und gegen die anderen Knoten, wo die größte Verdünnung war, sich hinzubewegen.

Auf diesem Wege passieren alle Luftschichten im gleichen Moment ihre Ruhelage (Fig. IV); die Pfeile deuten die Bewegungsrichtung an. In Fig. V

Fig. 635.



ist die Ruhelage überschritten, es beginnt die Verdichtung an den Knoten K und K^{II}, die Verdünnung an den Knoten K^{I} und K^{III}, welche in Fig. VII ihren höchsten Grad erreichen. Von dort wiederholt sich in der zweiten Hälfte der Schwingungsdauer die Reihe der Figuren von unten nach oben mit verkehrter Pfeilrichtung.

Wir machen nochmals darauf aufmerksam, daß Knoten und Bäuche stehen bleiben und daß Verdünnung und Verdichtung durchaus nicht mit

Wellental und Wellenberg (den Bäuchen) korrespondieren, sondern mit aufsteigendem und absteigendem Knoten. Dagegen fallen die Stellen größter Geschwindigkeit der Luft mit den Bäuchen zusammen.

An der Fig. 635 ist nun auch leicht zu übersehen, welche Länge eine offene und eine einseitig geschlossene Röhre bei gegebener Wellenlänge eines Tones haben muß, wenn ihre Luft in stehende Schwingungen geraten, d. h. Resonanz geben soll. Offenbar kann am geschlossenen Ende keine Stelle größter Exkursion, d. h. kein Bauch sein, weil ja die Luft dort sich nicht bewegen kann. Andererseits kann am offenen Ende keine Verdichtung oder Verdünnung eintreten, weil daselbst die Luft mit der Atmosphäre im Gleichgewicht des Druckes stehen muß. Eine beiderseits offene Röhre darf also nur von B bis B^{I} oder bis B^{II} oder B^{III} oder bis B^{IV} reichen, d. h. sie muß eine Länge haben gleich $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{3\lambda}{2}$, 2λ ..., d. h. gleich einem geraden Multiplum der Viertelwellenlänge.

Eine einseitig geschlossene Röhre dagegen darf nur eine solche Länge haben, daß sie von einem Bauche bis zu einem Knoten reicht, also die Längen BK, BK^{I}, BK^{II}, BK^{III}, das ist eine Länge gleich $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{5\lambda}{4}$, $\frac{7\lambda}{4}$ usw., allgemein eine Länge gleich einem ungeraden Multiplum der Viertelwellenlänge. Diese Regeln stimmen vollkommen mit jenen überein, welche in § 211 für Transversalschwingungen abgeleitet wurden.

Ist die Länge der Röhre gegeben, so muß sich, soll Resonanz stattfinden, die Wellenlänge nach ihr richten, folglich auch die Schwingungszahlen der Töne, welche in dieser Röhre Resonanz hervorrufen sollen. Man kann somit für jede offene oder einseitig geschlossene Röhre die Schwingungszahlen der Töne berechnen, welche die Luft (oder ein anderes Gas) in derselben zu Mitschwingungen veranlassen können, sobald man ihre Länge L und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C des Schalles in dem eingeschlossenen Gase kennt.

Es ist für die **beiderseits offene** Röhre von der Länge L die Wellenlänge des Tones

$$\lambda = 2L, \quad L, \quad \frac{2L}{3}, \quad \frac{L}{2} \ldots$$

die Schwingungszahl

$$n = \frac{C}{\lambda} = \frac{C}{2L}, \quad \frac{C}{L}, \quad \frac{3C}{2L}, \quad \frac{2C}{L} \ldots$$

für die **einseitig geschlossene** Röhre von der Länge L die Wellenlänge des Tones

$$\lambda = 4L, \quad \frac{4L}{3}, \quad \frac{4L}{5}, \quad \frac{4L}{7} \ldots$$

die Schwingungszahl

$$n = \frac{C}{\lambda} = \frac{C}{4L}, \quad \frac{3C}{4L}, \quad \frac{5C}{4L}, \quad \frac{7C}{4L} \ldots$$

Um das Vorgetragene mit Experimenten zu belegen, gibt es verschiedene Methoden.

Hält man eine eben angeschlagene gewöhnliche Stimmgabel, welche etwa den Ton ā (a^1) von 435 ganzen Schwingungen per Sekunde gibt,

dessen Wellenlänge in Luft gewöhnlicher Temperatur $\lambda = \frac{340}{435} = 0,7816$ m = rund 78 cm beträgt, über eine beiderseits offene, ungefähr 5 cm weite, unten in Wasser eingetauchte Glasröhre (Fig. 636), so hört man keine Verstärkung des Tones, wenn der wasserleere Teil der Röhre die Länge $\frac{\lambda}{2} = 39$ cm beträgt. Hebt oder senkt man die Röhre, so beginnt die Resonanz und wird am stärksten für die Längen $\frac{\lambda}{4} = 19^1/_2$ und $\frac{3\lambda}{4} = 58^1/_2$ cm. Besitzt die Röhre eine vom oberen Ende a nach unten gehende Teilung in Centimeter, so kann man die Längen direkt abmessen. Dabei beobachtet man, daß zwar der Abstand der beiden Maxima der Resonanz mit der obigen Rechnung, welche für $\frac{\lambda}{2}$ 39 cm ergibt, übereinstimmt, daß dagegen das erste Maximum für $\frac{\lambda}{4}$ nicht genau auf die Länge 19,5 cm, sondern etwa auf 17,5 cm fällt. Diese Differenz erklärt sich durch den Umstand daß die

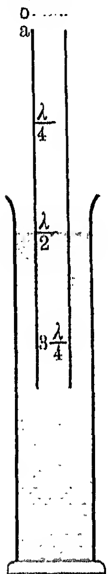


Fig. 636.

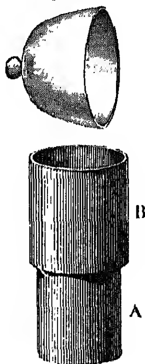
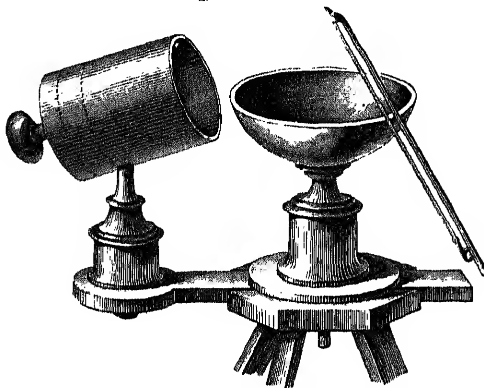


Fig. 637.


Fig. 638.

stehende Welle über das obere Ende der Röhre heraustritt und sich dort ausbreitet.

Nach v. Helmholtz'[1]) Berechnung beträgt der Unterschied in der Stellung des ersten Maximums $\frac{\pi}{4} R$, worin R den Radius der Röhre bedeutet. Für die 5 cm weite Röhre ergibt somit die Rechnung einen Unterschied $= \frac{3,14}{4} 2,5 = 1,96$ cm; daraus ergibt sich die Regel, zur Ausmittelung von λ nicht den Abstand des ersten Maximums vom Ende, sondern den Abstand der beiden Maxima voneinander, welcher genau $= \frac{\lambda}{2}$ ist, zu messen.

[1]) Helmholtz, Vorlesungen III, Akustik, S. 239. Hat die Röhre an der Mündung den Radius R, im Innern den Radius R_1, so gilt für den Unterschied zwischen der wahren und der reduzierten Röhrenlänge die Beziehung $\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4} R$. Für $R = R_1 \sqrt{2}$ verschwindet α, für $R = R_1$ wird $\alpha = \frac{\pi}{4} R$.

Um das Mittönen einer Luftsäule noch weit auffallender zu erhalten, kann man statt der Stimmgabel eine sogenannte Käseglocke und statt der Glasröhre weite Röhren von Pappdeckel anwenden, wie dies in Fig. 637 dargestellt ist. Die Papprōhren haben einen Durchmesser von 12 bis 15 cm; die untere *A* ist am Boden geschlossen; die zweite *B* läßt sich mit einiger Reibung auf und nieder schieben, so daß man die Gesamtlänge der Röhre nach Bedürfnis abändern kann. Die Käseglocke kann einen Durchmesser von 15 bis 20 cm haben.

Um die Glocke zum Tönen zu bringen, hält man sie mit der linken Hand am Knopfe fest und streicht dann den Rand mit einem passenden Fiedelbogen. Dieselbe Glocke wird nun, auf diesee Weise behandelt, bald höhere, bald tiefere Töne geben; man muß es aber durch möglichst gleichförmiges und langsames Streichen dahin zu bringen suchen, daß sie ihren tiefsten Ton gibt. Hat man den gewünschten Ton hervorgebracht, so hält man die tönende Glocke über die Papprōhre, wie es die Fig. 637 andeutet, und wird dann, falls die Röhre die richtige Länge hat, ein überraschend kräftiges Anschwellen des Tones wahrnehmen.

Savart hat für diesen Versuch einen besonderen in Fig. 638 abgebildeten Apparat konstruiert, welcher wohl keiner weiteren Erklärung bedarf[1].

Das Mittönen erfolgt, wenn die Länge der Röhre $^1/_4$ oder wenn sie $^3/_4$, $^5/_4$ usw. von der Wellenlänge des einfallenden Tones ist.

Die Fig. 639 deutet an, wie das Experiment mit einer beiderseits offenen Röhre anzustellen ist, wozu übrigens auch der Savartsche Apparat, Fig. 638, verwendet werden kann, wenn man den beweglichen Boden entfernt und dafür eine offene Röhre zur Verlängerung ansetzt. In diesem Falle erfolgt dann das Mittönen, wenn die Länge der Röhre $^1/_2$, 1, $1^1/_2$, 2 usw. Wellenlängen des erregenden Tones beträgt.

Fig. 639.

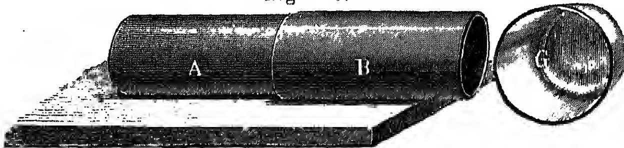
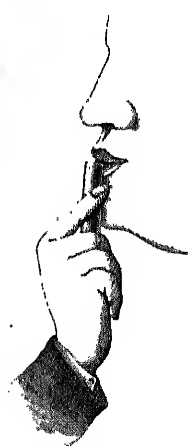


Fig. 640.



Um die Luft in einer Röhre, sei es eine offene oder gedeckte, in stehende Schwingungen zu versetzen und sie also zum Selbsttönen zu bringen, ist nicht gerade nötig, einen tönenden Körper vor die Öffnung zu halten, wie dies ja die Orgelpfeifen zeigen. Hier ist es ein am offenen Ende der Röhre vorbeiströmender, an ihren Rändern sich brechender Luftstrom, welcher durch seine Stöße Wellen erzeugt, die, am anderen Ende reflektiert, mit den neu einfallenden interferieren. Wenn auch diese Stöße anfangs nicht ganz regelmäßig sind, so werden sie doch alsbald, wenigstens wenn die Röhre, wie man sagt, gut anspricht, durch den Einfluß der rückkehrenden Wellen reguliert, so daß sich

[1]) Hierher gehörige einfache Interferenzversuche hat H. Rebenstorff in der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 16, 30, 1903 beschrieben.

regelmäßig stehende Schwingungen bilden, durch welche die Luft in der Röhre selbsttönend wird.

Die einfachste Art, die Luft in einer kleineren gedeckten Röhre zum Tönen zu bringen, ist die, daß man sie in vertikaler Richtung vor den Mund hält (das geschlossene Ende nach unten gekehrt, während das offene Ende an die untere Lippe gehalten wird), Fig. 640, und dann schräg gegen den Rand der Röhre bläst.

§ 213. Singende Flammen, analysierender Spiegel, stroboskopische Untersuchungsmethode. Eine andere Methode, um die Luft in einer offenen Röhre zum Tönen zu bringen, ist die, daß man Wasserstoffgas in einem Gefäße erzeugt und es durch eine feine Spitze ausströmen läßt, das

Fig. 641.

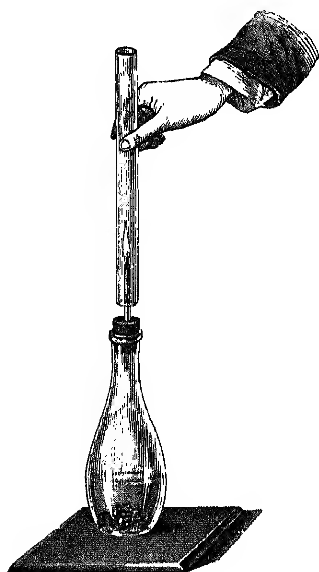
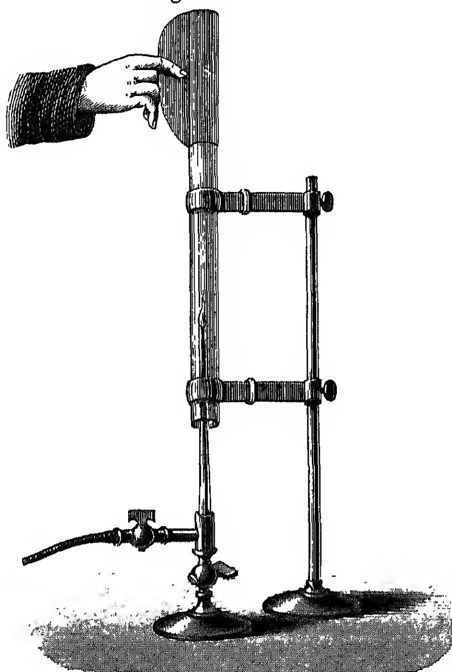


Fig. 642.



Gas anzündet und dann die Glasröhre darüber hält, Fig. 641. Eine solche Vorrichtung führt den Namen „chemische Harmonika".

Es versteht sich von selbst, daß man statt des Wasserstoffgases zu diesem Versuche auch Leuchtgas oder Acetylengas anwenden kann, welches seiner helleren Flamme wegen zu den weiter unten beschriebenen Versuchen sogar vorteilhafter ist. Fig. 642 zeigt einen zu diesem Zwecke dienenden Gasbrenner. Das Leuchtgas strömt durch einen Gummischlauch ein und entweicht durch eine verhältnismäßig enge Öffnung am oberen Ende eines ungefähr 20 cm langen Metallrohres, wo das Gas angezündet wird. Über die Flamme wird dann die von einem passenden Stativ getragene Glasröhre herabgeschoben. Bringt man am oberen Ende der Glasröhre einen aus dünnem Blech verfertigten Zylinder s an, so wird der Ton tiefer, wenn man s in die Höhe schiebt und dadurch die tönende Luftsäule verlängert.

Statt des in Fig. 642 abgebildeten Brenners genügt auch ein 20 bis 30 cm langes, oben mit einer engen Ausströmungsöffnung endendes Glasrohr, dessen unteres Ende in dem das Leuchtgas zuführenden Schlauche steckt. Dieses Glasrohr wird durch ein entsprechendes Stativ in vertikaler

Fig. 643.

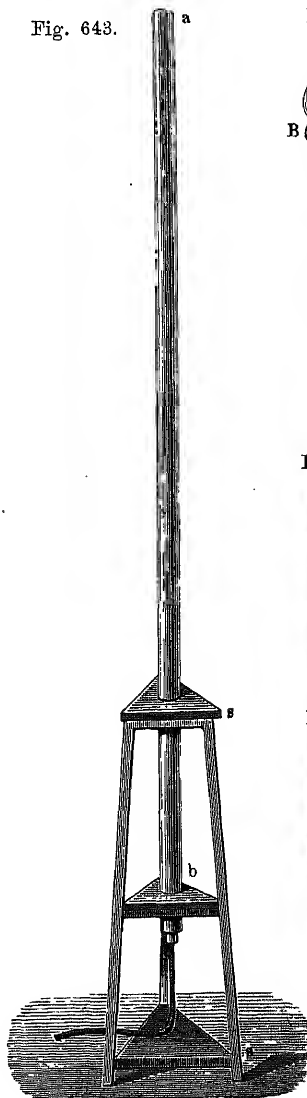


Fig. 644.



Fig. 645.

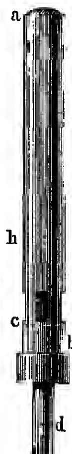
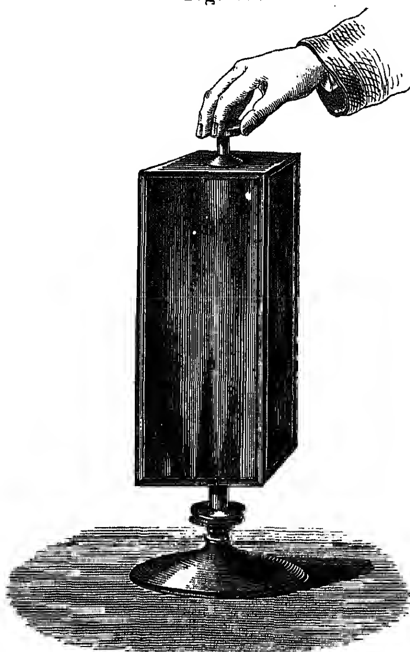


Fig. 646.



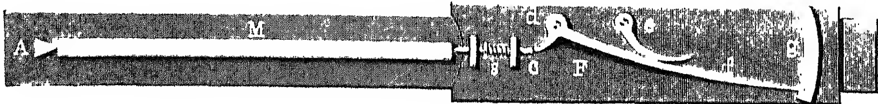
Stellung gehalten. Das tönende Rohr nimmt man gewöhnlich 15 bis 30 mm weit und 20 bis 100 cm lang, während die Mündung des Brenners 0,5 bis 1 mm im Durchmesser hat. Die durch einen Hahn regulierbare Größe der Flamme, sowie deren Höhenstellung in der Röhre ist durch Probieren zu ermitteln. Mit Wasserstoff gelingt der Versuch sicherer bei Anwendung sehr kleiner Flammen und Röhren geringerer Dimensionen; Leuchtgas erfordert größere Röhren, die Flamme desselben kommt aber ebenfalls leichter zum Tönen, wenn sie ziemlich klein ist.

Je länger und weiter das Rohr, desto tiefer ist der Ton, desto größer muß aber auch die Flamme werden. Einen tiefen und ungemein kräftigen Ton z. B. gibt eine 4,5 m lange und 0,1 m weite Blechröhre, welche von einem entsprechenden festen Ständer *s s*, Fig. 643, getragen wird. Um die Luft in einer solchen Röhre zum Tönen zu bringen, wendet man Rundbrenner, Fig. 644, von 20 bis 22 Öffnungen an. Hat man Stellung und Größe der

Trommel T ab, und zwar, wenn, wie in der Figur, als Index der Nullpunkt eines in 10 Teile auf 9 Trommelteile geteilten Verniers benutzt wird, bis auf 0,1 Trommelteil genau. Man wird folglich mit dieser Mikrometerschraube ein Fortschieben ihrer Mutter M bis auf 0.001 mm oder 1 μ genau messen können. Allerdings wird dabei eine sehr exakte Konstruktion der Schraube, d. h. genau gleiche Höhe der Schraubengänge und ein sehr gleichförmiges Ansteigen dieser vorausgesetzt.

Fühlhebel und Poggendorffsche Spiegelablesung. Handelt es sich darum, kleine Verlängerungen, etwa durch die Wärme, eines Maßstabes M, der mit seinem einen Ende gegen ein festes Lager A in Fig. 49 stößt, zu messen, so kann dies passend mittels des Fühlhebels F in der Figur

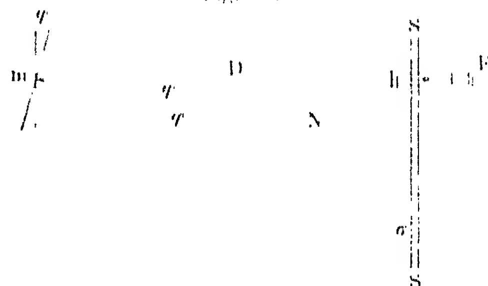
Fig. 49.



geschehen. Ein einerseits zugespitzter Stahlstift s, der in einem Lager liegt und durch eine Spiralfeder mit der Spitze gegen das andere Maßstabende angedrückt wird, stößt mit dem anderen flachen Ende auf den kürzeren Arm c eines um die Achse d drehbaren Winkelhebels, dessen längerer Arm f auf eine Gradbogenteilung g weist. Eine zweite Feder e drückt den Arm c stets gegen das stumpfe Ende s an. Der Winkelhebel wird jede Verlängerung des Maßstabes M im Verhältnis der Länge der beiden Hebelarme f und c vergrößert auf der Teilung g angeben. Wäre dieser Gradbogen z. B. in Millimeter geteilt, das Verhältnis der Hebelarme 50 : 1 und am Ende des Hebels f ein Vernier angebracht, der am Gradbogen $^1/_{10}$ mm ablesen ließe, so würde man kleine Verlängerungen von M bis $^1/_{500}$ mm oder bis 2 μ genau messen können.

Fügt man aber zum Winkelhebel noch die Poggendorffsche Spiegelablesung hinzu, so kann man die Genauigkeit der Messung viel weiter treiben. Bringt man nämlich an einer drehbaren Achse mit ihr festverbunden einen Planspiegel an, so kann man gemäß der Darstellung der Fig. 50 kleine Drehungswinkel φ dieses Spiegels bzw. der Achse dadurch sehr genau bestimmen, daß man nach Poggendorff mittels eines Fernrohres F im Spiegel die Anzahl Skalenteile beobachtet, um welche sich das

Fig. 50.



Spiegelbild der Skala SS bei der Drehung des Spiegels hinter dem Fadenkreuz des Fernrohres verschiebt, indem statt des Nullpunktes der Skala oberhalb des Fernrohres bei der anfänglichen Lage des Spiegels nunmehr der Skalenteil σ in demselben erscheint. Wenn N die Normale des Spiegels nach seiner Drehung um den Winkel φ darstellt, welche bei der anfänglichen Lage des-

Flamme so reguliert, daß die Röhre ihren Grundton kräftig hören läßt, so braucht man nur die Flamme zu verkleinern, um zu bewirken, daß statt des Grundtones der erste Oberton der Röhre erklingt. Der gleiche Versuch läßt sich natürlich auch mit kleineren Röhren anstellen.

Um aus Blechröhren von 2 bis 3 m Länge und 7 bis 8 cm Weite anhaltende und schöne Orgeltöne hervorzulocken, wendet Rausch[1]) einen weiten Bunsenschen Gasbrenner von folgender Einrichtung an. Das 130 mm lange, 17 mm weite Blechrohr *a b*, Fig. 645, steckt auf einer bis zur Höhe *c* hinaufreichenden Verstärkung des Glasrohres *d*, dessen Ausströmungsspitze sich in der Höhe, 90 mm unter *a*, befindet. Etwas oberhalb *c* ist das Rohr *a b* mit vier Öffnungen von 12 mm Höhe und 6 mm Breite versehen, durch welche die zur vollständigen Verbrennung des Leuchtgases nötige Luftmenge einströmt. Oben ist das Rohr *a b* durch eine Drahtnetzkappe geschlossen, welche folgendermaßen hergestellt wird. Aus einem eisernen Drahtnetz von 170 bis 200 Maschen auf den Quadratcentimeter wird eine Scheibe von 4 cm Durchmesser ausgeschnitten, dieselbe ausgeglüht und nun mit Hilfe eines zylindrischen, halbkugelig endigenden Holzstückes von unten her in das Rohr *a b* eingetrieben, an dessen oberem Ende es dann durch Reibung festhält. Anfangs läßt man das Gas reichlich ausströmen, zündet es an, läßt den Brenner gehörig heiß werden und reguliert dann den Gaszufluß durch den Brennerhahn, bis die Flamme nur noch 2 cm hoch ist. Führt man jetzt den Brenner von unten her in das durch ein Stativ vertikal gehaltene Blechrohr ein, bis die Flamme 5 bis 7 cm hoch über dessen unterer Öffnung steht, so erfolgt ein kräftiges Tönen der Luftsäule im Rohre.

Um die Flamme sehen und durch den rotierenden Spiegel untersuchen zu können, hat Rausch das untere Ende des Blechrohres mit einem gläsernen zylindrischen Ansatz von 11 cm Länge versehen.

Hält man eine etwa 30 cm lange Röhre so über eine Flamme von entsprechender Größe, daß dieselbe 7 cm vom unteren Röhrenrande absteht, so erfolgt ein lebhaftes Singen; zieht man die Glasröhre so weit in die Höhe, daß das Singen eben aufhört, so beginnt es alsbald wieder, wenn der Ton der Röhre in der Nähe gesungen oder auf andere Weise, etwa durch eine Orgelpfeife, hervorgebracht wird. Das Singen dauert nun auch fort, wenn der erregende Ton aufgehört hat. Tyndall und Schaffgotsch haben diese Erscheinung unabhängig voneinander beobachtet und näher untersucht.

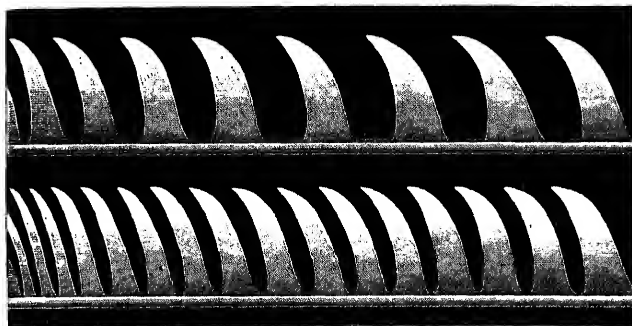
Mit bloßem Auge betrachtet, scheint eine singende Flamme stetig zu brennen, höchstens bemerkt man an derselben eine Verlängerung und ein unruhiges Zittern; daß dieselbe aber successiv aufleuchtet und wieder fast verschwindet, hat bereits Rogers durch eine mit schwarzen und weißen Sektoren bemalte Scheibe bewiesen. Bei rascher Rotation verschwinden die Sektoren im Tageslicht; bei Beleuchtung durch die chemische Harmonika erscheinen jedoch die Sektoren je nach der Geschwindigkeit der Scheibe ruhend oder nach der einen oder anderen Richtung langsam rotierend.

Wenn man die Flamme anblickend den Kopf rasch bewegt oder auch nur die Augenachse rasch dreht, indem man den Blick rasch auf seitwärts gelegene Punkte richtet, so entstehen die im folgenden beschriebenen Flammenbilder auf der Netzhaut.

[1]) Pogg. Ann. 127.

Um den Zustand der singenden Flammen zu untersuchen, sind rotierende Spiegel sehr geeignet. Vier gewöhnliche oder besser sog. Platinspiegel, welche die vier vertikalen Seitenwände eines parallelepipedischen Kästchens von 12 bis 15 cm Seitenlänge bilden, sind um eine vertikal stehende Achse leicht und mäßig rasch drehbar. Es bedarf übrigens keiner besonderen Drehvorrichtung, man kann den Spiegelwürfel auf jeder Schwungmaschine anbringen. Bequemer ist in vielen Fällen eine vom Verfasser angewandte Konstruktion, insbesondere dann, wenn auf dem Experimentiertisch nicht mehr hinlänglicher Raum für die Schwungmaschine vorhanden ist, Fig. 646. Der Spiegelkasten ruht mit seinem oberen Teile auf der Spitze eines eisernen zylindrischen Stabes, welcher im schweren Fuße befestigt ist und durch die an den Boden angeschraubte Hülse hindurchgeht. Letztere trägt überdies für den Bedarfsfall einen Schnurlauf, der mit einem abgesondert stehenden Schwungrade in Verbindung gebracht werden kann. Steht eine Flamme in der Röhre ungefähr in gleicher Höhe mit der Mitte der Spiegel, so erscheint sie bei rascher Rotation der Spiegel als ein zusammenhängender Lichtstreifen, solange die Flamme nicht singt, sobald aber die Luftsäule in der Röhre zum Tönen gebracht wird, erblickt man eine Reihe getrennter Flammenbilder, Fig. 647, welche nur unten durch einen blaß-

Fig. 647.



blauen Lichtstreif verbunden sind. Wasserstoffgas ist zu diesem Versuche weniger geeignet, weil seine Flamme gar zu lichtschwach ist. Die im rotierenden Spiegel erscheinenden Flammenbilder rücken einander um so näher, je höher der Ton ist, welchen die Flamme in der Röhre erzeugt und je langsamer der Spiegel rotiert.

Reichert hat den Spiegelapparat in der Fig. 648 dargestellten Form konstruiert, bei welchem nur ein Spiegel in Anwendung kommt, welcher gegen die horizontale Rotationsachse schräg gestellt ist. Die Ebene des Spiegels macht einen Winkel von ungefähr 15° mit der vertikalen Scheibe *ab*. Der Durchmesser des Spiegels beträgt 15 bis 25 cm. Man kann diese Vorrichtung an jedem Rotationsapparat mit horizontaler Umdrehungsachse anbringen. Die Flammenbilder erscheinen auf diesem rotierenden Spiegel als auf einem Kreisbogen liegend, wie es unsere Figur andeutet.

Diese Erscheinung ist die Folge davon, daß die Flamme jedesmal wächst, wenn die Schichten der tönenden Luftsäule sich gegen die Mitte der Röhre

hin bewegen, während die Flammengröße auf ein Minimum herabsinkt, so oft sich die Luftschichten von der Mitte der Röhre wegziehen.

Über die Formveränderungen, welche eine singende Flamme während einer jeden Oszillation erfährt, kann der rotierende Spiegel keine Auskunft geben, weil derselbe in die Breite gezogene und ineinander fließende Bilder liefert, während das Prinzip der stroboskopischen Scheiben, welche in der Lehre vom Licht näher betrachtet werden sollen, wie Plateau (1836) und Doppler (1845) unabhängig voneinander gezeigt haben, ein vorteilhaftes Hilfsmittel bietet, die Oszillationen rasch vibrierender Körper zu analysieren und von Topler zuerst zur Untersuchung der singenden Flammen angewendet wurde[1]).

Die Oszillationen eines tönenden Körpers sind viel zu schnell, als daß wir dieselben mit bloßem Auge verfolgen könnten, die verschiedenen Formen

Fig. 648.

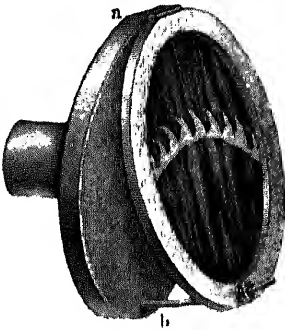
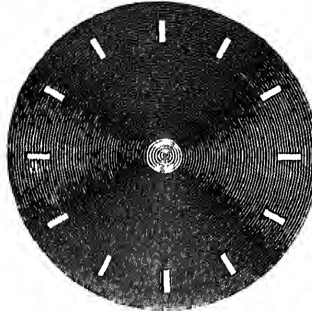


Fig. 649.



z. B., welche eine singende Flamme während einer vollständigen Oszillation durchläuft, vereinigen sich zu einem Totalbilde, in welchem die Form eines einzelnen Momentes vollkommen verschwindet.

Kann man es aber dahin bringen, daß das Auge nur momentan die oszillierende Flamme erblickt, so sieht man deutlich die Gestalt, welche dieselbe in diesem Augenblicke hat. Es läßt sich dies unter anderem mit Hilfe einer Scheibe, Fig. 649, von ungefähr 50 cm Durchmesser erreichen, welche in der Nähe ihres Randes mit einer konzentrischen Reihe einander gleicher und gleich weit voneinander abstehender Schlitze versehen ist und welche in ihrer Ebene mit entsprechender Geschwindigkeit um eine durch ihren Mittelpunkt gehende feste Achse gedreht werden kann. Der Apparat ist so aufgestellt, daß, wenn sich eine Öffnung bei *a* befindet, ein nahe an dieselbe herangebrachtes Auge eine hinter ihr befindliche singende Flamme deutlich sehen kann. Steht die Scheibe still, so sieht man durch den Schlitz bei *a* den Totaleindruck aller Phasen (momentanen Zustände) der singenden Flamme; wenn aber die Scheibe rasch rotiert, so sieht man die Flamme immer nur in solchen Momenten, in welchen eine Öffnung vor dem Auge passiert, und zwar sieht man dann diejenige Phase der Flamme, in welcher sie sich eben befindet. In der Regel wird für jede folgende Öffnung, welche das Auge passiert, die Phase der Flamme eine etwas andere sein, und so kommt es denn, daß die Flamme sich zu verändern scheint.

---

[1]) Pogg. Ann. 128.

Nehmen wir zunächst an, die rotierende Scheibe sei mit der singenden Flamme unisono, d. h. die Scheibe drehe sich mit solcher Geschwindigkeit, daß sie, nach Art der Sirene angeblasen (§ 223), den gleichen Ton gebe wie die singende Flamme, so durchläuft die Flamme eine vollständige Vibration in der gleichen Zeit, welche zwischen dem Vorübergange zweier aufeinander folgenden Öffnungen vor dem Auge vergeht. Hat nun die Flamme gerade ihren niedersten Stand erreicht, wenn eine Öffnung das Auge passiert, so wird das gleiche stattfinden, wenn die folgenden Öffnungen der Reihe nach vor dem Auge vorübergehen; man sieht die Flamme stets in ihrer tiefsten Stellung, sie scheint also ruhig in dieser Stellung zu verharren. Wäre die Flamme jedesmal in ihrer höchsten Phase, wenn eine Öffnung das Auge passiert, so würde man dieselbe so sehen, als ob sie ungeändert in ihrer größten Höhe verbliebe.

Die Sache ändert sich aber sogleich, wenn das Unisono zwischen Scheibe und Flamme gestört wird. Nehmen wir z. B. an, die Scheibe rotiere etwas langsamer! Wenn die Flamme in dem Moment, in welchem irgend eine Öffnung das Auge passiert, gerade in ihrem tiefsten Stande angekommen ist, so wird sie ihre nächste Oszillation vollendet und abermals ihren tiefsten Stand erreicht haben, ehe die nächste Öffnung das Auge passiert, und wenn diese Öffnung vor das Auge kommt, ist die Flamme bereits wieder etwas gewachsen; noch mehr ist sie gewachsen, wenn die zweite, die dritte usw. Öffnung vor dem Auge vorübergeht.

Der Gangunterschied zwischen der tönenden Flamme und der rotierenden Scheibe betrage $\frac{1}{n}$ der Schwingungsdauer der Flamme, so wird jede folgende Öffnung die Flamme so weit verändert zeigen, wie es einer Zeit von $\frac{1}{n}$ der ganzen Schwingungsdauer entspricht. Sehen wir in einem bestimmten Moment die Flamme in ihrer niedersten Stellung, so sehen wir sie wieder in derselben in dem Moment, wo das $n$te Loch das Auge passiert, da die Flamme inzwischen gerade $n + 1$ volle Bewegungen in Wirklichkeit ausgeführt hat. Scheinbar durchläuft sie inzwischen nur einmal die aufeinander folgenden Formen, d. h. sie scheint $n$mal langsamer zu oszillieren, als sie wirklich oszilliert. Je geringer man also den Gangunterschied zwischen Flamme und Scheibe macht, desto langsamer sieht man die Flamme oszillieren, desto leichter ist es, die verschiedenen Formen zu verfolgen, welche sie in Wirklichkeit ungleich schneller durchläuft.

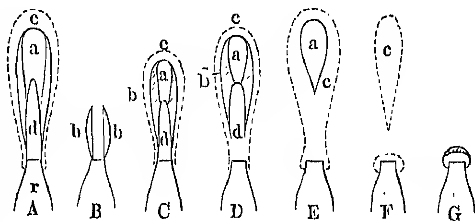
Die Scheibe, mit welcher Töpler experimentierte, hatte 20 Öffnungen und wurde durch ein Uhrwerk gedreht, welches bis zu einem gewissen Grade die Geschwindigkeit der Rotation zu regulieren erlaubte.

Die Ausführung der eben angedeuteten Versuche bedarf aber, wenn sie brauchbare Resultate liefern soll, mancherlei Vorsichtsmaßregeln, namentlich optischer Natur, in betreff deren wir auf die bereits zitierte Originalabhandlung verweisen müssen.

In Fig. 650 zeigt A den $2^1/_2$mal vergrößerten Durchschnitt einer Leuchtgasflamme, welche aus einer 0,9 mm weiten Brennerspitze hervorbricht und in einem 623 mm langen Rohre singt, wenn dieselbe mit bloßem Auge beobachtet wird. a ist die leuchtende Spitze der inneren Flamme; dieselbe geht nach unten in die blaue Zone $b\,b$ über, welche in der Figur schraffiert

angedeutet ist. Der innere Raum *d* ist wahrscheinlich ganz dunkel; endlich ist die ganze Flamme an ihrem äußeren Saume von einer Zone *c* umgeben, welche mit schwachem, rötlichgelbem Lichte schimmert. Die Bilder *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* zeigen die Auflösung dieser singenden Flamme durch das Stroboskop. Zu Anfang jeder Schwingung bricht aus der glühenden Brennerspitze *r* nur ein blaues Flämmchen hervor, welches einen oben offenen Zylindermantel bildet. In der zweiten Phase *C* umschließt die Spitze des blauen Teiles bereits die Anfänge des leuchtenden Teiles *a*, und man bemerkt Spuren der äußeren Zone *c*. Bei *D* ist der leuchtende Teil *a* schon deutlich entwickelt, der blaue Teil ist von der Brennermündung losgerissen. In der Phase *E* ist die blaue Zone ganz verschwunden, die helle Spitze *a*, sowie die Hülle *c* haben das Maximum ihrer Größe erreicht. Hierauf verschwindet *a*, und es bleibt nur die Zone *c*, welche als mattes gelbrotes Wölkchen in einiger Entfernung über dem Brenner schwebt, während sich unmittelbar an der Brennerspitze noch ein Restchen von *c* zeigt. Die sechste Phase *G* zeigt, wie das ganze obere Flammenbild verschwunden ist und nur auf der Ausflußöffnung ein kaum sichtbares Licht lagert, aus welchem sich in der folgenden Schwingung dieselbe Reihenfolge von Erscheinungen entwickelt. — In etwas anderer Weise verläuft die Erscheinung bei Anwendung von Wasserstoffgas.

Fig. 650.



Nicht bloß innerhalb einer Röhre kann eine Flamme zum Singen gebracht werden; es gibt auch frei brennende singende Flammen. Sie entstehen, wenn ein explosives Gasgemisch, z. B. aus Wasserstoff und Luft, aus einer Röhre ausströmt, welche zu enge ist, als daß die Explosionsflamme zurückschlagen könnte. In diesem Falle entsteht der Ton durch eine rasche Aufeinanderfolge von Explosionen.

Die Anzahl der mit singenden Flammen anzustellenden Experimente ist ungemein groß; es ist ganz unmöglich, sie alle hier zu beschreiben, weshalb wir auf die Originalmitteilungen verweisen müssen[1]).

Weiter unten werden wir noch weitere Anwendungen des stroboskopischen Prinzips auf akustische Erscheinungen kennen lernen.

§ 214. Orgelpfeifen, manometrische Flammen, Kundtsche Röhren.

Die zweckmäßigste Methode, die Luft in Röhren in den Zustand stehender Schwingungen zu versetzen, ist diejenige, welche man bei den Orgelpfeifen, auch Labialpfeifen genannt, in Anwendung gebracht hat. Die Einrichtung derselben ist aus Fig. 651 und 652 zu ersehen. Man unterscheidet an ihnen den Fuß, den Mund (das Maul) und die Röhre.

In Fig. 651, welche eine Zinnpfeife darstellt, ist der Fuß mit *FF*, die Röhre mit *RR* bezeichnet. Die Röhre hat an ihrem unteren Ende vorn eine Öffnung *ab*, welche der Mund oder das Maul genannt wird. Fuß und Röhre

[1]) Meldes Akustik, S. 306; Weinholds Vorschule der Physik, 4. Aufl., S. 250; Rayleigh, Wiedem. Ann., Beibl. B **3**, 63; Gruel, Pogg. Ann. **126**, 638; H. Rebenstorff, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unters. **15**, 274, 280 usw.

sind durch eine dünne Zinnplatte getrennt; zwischen der vorderen Kante dieser Platte, welche den Boden der Schallröhre bildet, und der vorderen Wand des Fußes bleibt eine schmale Spalte, durch welche die unten in den Fuß eingeblasene Luft austritt und, sich an der oberen Kante des Mundes brechend, die Luftsäule in der Röhre *RR* in stehende Schwingungen versetzt.

Fig. 651.

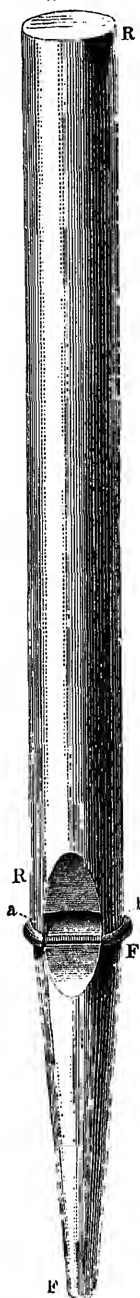
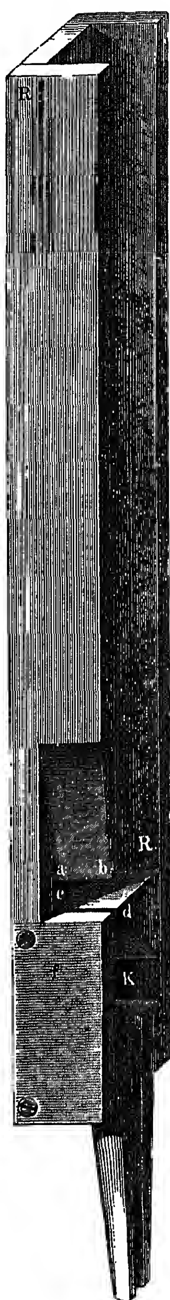


Fig. 652.



Die Einrichtung der hölzernen Orgelpfeifen ist aus dem Durchschnitt Fig. 652 zu ersehen. Die in den Fuß eingeblasene Luft dringt aus dem Behälter *K* durch einen schmalen Spalt *cd* hervor und bricht sich an der oberen Kante *ab* des Mundes, von welchem unsere Figur nur die linke Hälfte *abcd* zeigt.

Statt einer förmlichen Orgel kann man sich zu Versuchen mit Orgelpfeifen, seien es nun gedeckte, wie Fig. 651, oder offene, wie Fig. 652, der in Fig. 653 abgebildeten Vorrichtung bedienen. Mit Hilfe des Blasebalges *p* wird die Luft in den Balg *ss* getrieben, aus welchem sie dann durch die anfangs vertikal herab, dann horizontal nach vorn hin gehende Röhre *f* in die Windlade *cc* gelangt. Die obere Fläche dieses Kastens enthält eine Reihe von Löchern, auf welche die vertikalen Löcher des Holzstückes *dd*, von welchem unsere Figur nur einen Teil zeigt, münden. In die Löcher des Holzstückes *dd* wird der Fuß der Pfeifen eingesetzt. Zwischen den Löchern des Brettes *dd* und entsprechenden Löchern der Windlade *cc* befinden sich aber Schieber, welche selbst mit Löchern versehen sind, so daß man nach Belieben den Wind in eine Pfeife kann eintreten lassen, wenn man den entsprechenden Schieber vorzieht, oder den Wind von dieser Pfeife absperrt, wenn man den Schieber zurückschiebt, wie dies durch Fig. 654 noch besser erläutert wird, welche die Einrichtung der Schieber in größerem Maßstabe darstellt, als die vorige Figur. Der Schieber 1 ist zurückgeschoben, der Schieber 2 ist vorgezogen.

Eine und dieselbe Pfeife kann mehrere Töne geben. Der tiefste (der Grundton) einer gedeckten Pfeife ist derjenige, dessen Wellenlänge 4mal so groß ist, als die Länge der Röhre; die höheren Töne, welche die Pfeife gibt, sind diejenigen, welche einer 3mal, 5mal usw. kürzeren Wellenlänge

Fig. 653.

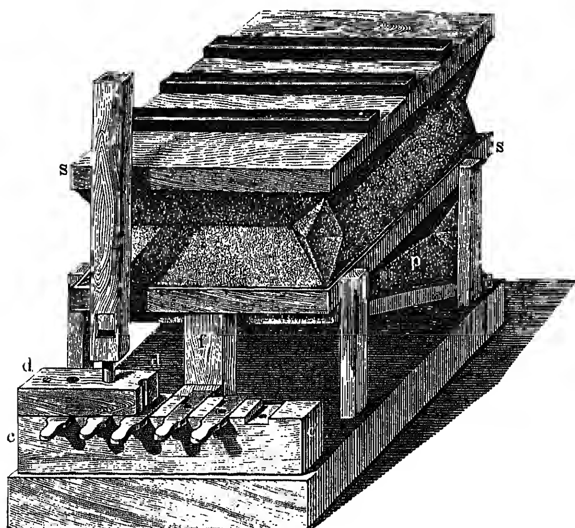


Fig. 655.

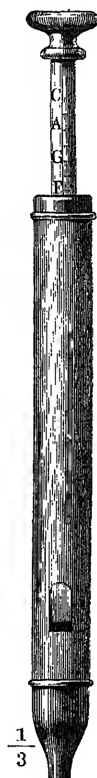
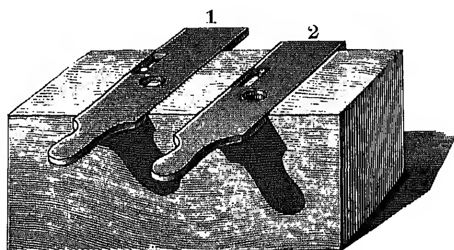


Fig. 654.



entsprechen, welche also durch stehende Schwingungen erzeugt werden, welche eine 3mal, 5mal usw. kleinere Oszillationsdauer haben als der tiefste Ton der Pfeife.

Den tiefsten Ton gibt die Pfeife bei schwächerem, die höheren Töne bei stärkerem Anblasen.

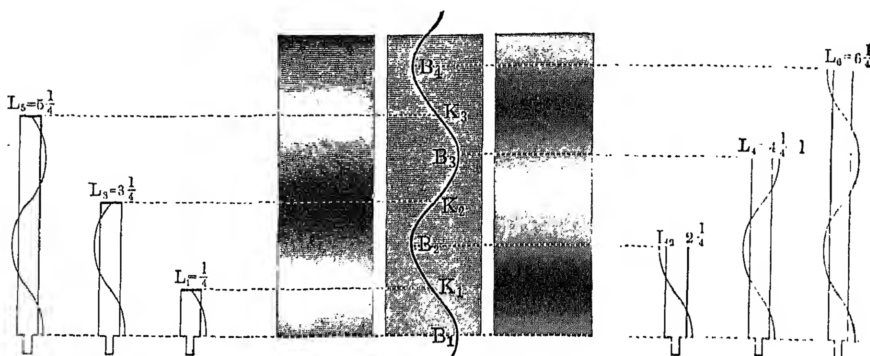
Um Versuche mit gedeckten Pfeifen zu machen, kann man auch sog. Stimmpfeifen, Fig. 655, anwenden. Es sind dies ungefähr 30 cm lange, hölzerne, runde Pfeifen, in welchen ein durch einen Korkstopfen gebildeter, am unteren Ende eines hölzernen Stempels befestigter Kolben auf- und niedergeschoben werden kann, wodurch sich die tönende Luftsäule nach Belieben verlängern oder verkürzen läßt.

Auch eine offene Pfeife gibt mehrere Töne, je nachdem sie durch schwächeren oder stärkeren Wind angeblasen wird. Die Wellenlänge des tiefsten Tones, den sie gibt, des Grundtones, ist doppelt so groß wie die

Pfeifenlänge. Für diesen Grundton bildet sich ein Schwingungsknoten in der Mitte der Röhre. Die Wellenlänge des zweiten Tones der offenen Pfeife ist gleich der Länge der Pfeife selbst und die beiden Schwingungsknoten, welche sich in diesem Falle bilden, sind je um ein Viertel der Röhrenlänge von den Enden entfernt.

Die Fig. 656 gibt eine Übersicht des Verhaltens der gedeckten und der offenen Pfeifen. In dem mittleren Vertikalstreifen ist die Wellenbewegung

Fig. 656.



als Transversalwelle mit den stehenden Bäuchen B und Knoten K angedeutet. Links und rechts davon ist die momentane Dichtenanordnung der Luft durch Schattierung dargestellt. Seitwärts sind die Längen der Pfeifen mit eingezeichneter Transversalwelle angedeutet. Der tiefste Ton, welchen eine Pfeife geben kann, wird, wie erwähnt, ihr Grundton genannt, die anderen Töne, welche sie bei verstärktem Winde gibt, heißen die Obertöne.

Wenn man an verschiedenen Stellen einer Orgelpfeife Löcher macht, die man nach Belieben durch einen Schieber verschließen oder öffnen kann, so kann man zeigen, daß der Ton durchaus nicht geändert wird, wenn man ein Loch öffnet, welches sich an der Stelle eines Bauches befindet, daß jedoch eine Änderung eintritt, wenn ein Loch an einer anderen Stelle geöffnet wird.

Um die Schwingungsknoten der Luftsäule in einer Röhre zu zeigen, wendet Hopkins eine gläserne Röhre an, welche ungefähr 3 cm im Durchmesser hat und welche ungefähr 60 cm lang ist. Die Röhre wird über einer Metallplatte befestigt, welche in gleicher Weise festgeschraubt wird, wie die Platten, welche zur Erzeugung der Klangfiguren dienen. Letztere wird durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen zum Tönen gebracht. Der Ton der Platte muß der Länge der Röhre entsprechen. In der Röhre hängt an einem Faden ein Rähmchen herab, über welches eine zarte Membran gespannt ist, die mit Sand bestreut wird. Dieser Sand bleibt ruhig liegen, wenn das Rähmchen an die Stelle eines Knotens gebracht wird; an allen anderen Stellen dagegen wird er herabgeworfen, was natürlich an der Stelle der Bäuche am stärksten der Fall ist.

Weil man durch Anstreichen einer Metallplatte nicht immer mit Sicherheit den gewünschten Ton erhält, so ist es zweckmäßig, den Versuch so abzuändern, daß man die Glasröhre in den Fuß einer Orgelpfeife, Fig. 657, steckt; man hat auf diese Weise eine oben offene Orgelpfeife von Glas, welche

mit Sicherheit ihren tiefsten Ton und bei verstärktem Winde oder verkleinerter Mundöffnung seine Oktave gibt.

Für den tiefsten Ton der Röhre bleibt der Sand ruhig liegen, wenn sich das Rähmchen in der Mitte der tönenden Luftsäule befindet, wie Fig. 657 andeutet; an der gleichen Stelle kommt aber der Sand sogleich in lebhafte Bewegung, wenn durch stärkeren Wind die Oktave des Grundtones erzeugt wird, während man in gleicher Weise für diesen höheren Ton die Schwingungsknoten bei *a* und *b* nachweisen kann.

Sehr schön lassen sich die Schwingungsknoten mittels der manometrischen Flammen von König nachweisen. An eine offene Orgelpfeife, welche in Fig. 658 so dargestellt ist, daß ihre horizontalen Dimensionen in $^1/_5$, die

Fig. 657.



Fig. 658.

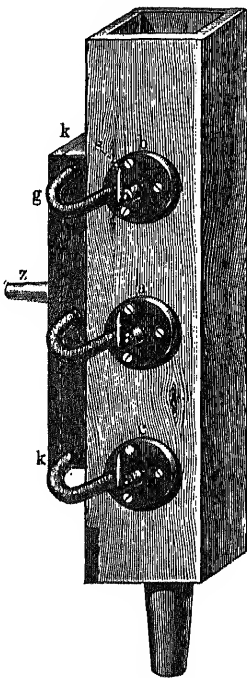
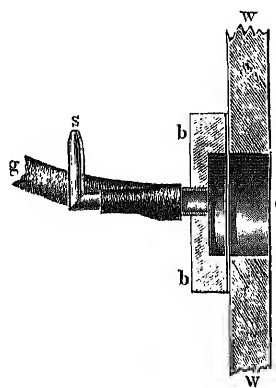


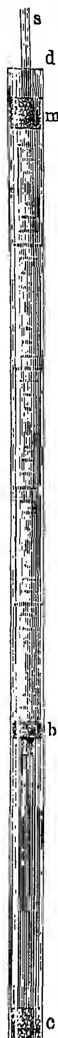
Fig. 659.



vertikalen aber in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe aufgetragen sind, ist seitlich ein Kästchen *kk* aufgeschraubt, in welches durch einen an das Röhrchen *z* anzusteckenden Gummischlauch Leuchtgas einströmt. Aus dem Kästchen *kk* wird dann das Gas durch drei kurze Röhrchen in die kleinen Holzkästchen *a*, *b* und *c* geleitet, aus welchen es endlich durch drei kleine Brenner ausströmt. Die Mitte von *a* befindet sich an der Stelle, an welcher sich in der Pfeife ein Schwingungsknoten bildet, wenn sie ihren Grundton gibt. An der Stelle der Schwingungsknoten, welche der Oktav des Grundtones entsprechen, sind die Kästchen *b* und *c* aufgeschraubt. An Stelle dieser Kästchen ist die Wand der Pfeife durchbohrt, die Höhlung des Kästchens aber ist von der Luft in der Röhre durch eine dünne Kautschukplatte getrennt, wie man dies in Fig. 659 sieht, welche ein Gaskästchen samt Brenner in $^1/_2$ der natürlichen Größe darstellt. Wenn die Röhre nicht tönt, sind die Flammen der drei Brenner ganz gleich; gibt die Pfeife ihren Grundton, so geraten alle drei Flammen in eine zitternde Bewegung; für die mittlere Flamme ist dies am bedeutendsten, weil sich das mittlere Kästchen an der Stelle eines Schwingungsknotens, also da befindet, wo Verdichtung und Verdünnung

stärker auftreten, als an irgend einer anderen Stelle der Röhre. Hat man den Gaszufluß so geregelt, daß die drei Flämmchen klein genug sind, so löscht die mittlere beim Ertönen des Grundtones aus. Für die Oktav des Grundtones brennt die mittlere Flamme ruhig, weil sie sich an der Stelle eines Bauches befindet, während die beiden anderen, welche jetzt an der Stelle von Knoten stehen, lebhaft erzittern oder selbst ausgelöscht werden.

Fig. 660.



Der Mund der Pfeife ist auf derselben Seite angebracht, auf welcher das Kästchen *kk* angeschraubt ist. Die gegenüberstehende Wand (in unserer Figur die Wand rechts) ist durchbrochen und durch eine Glasplatte geschlossen, damit man mit diesem Apparate auch den durch Fig. 657 erläuterten Versuch anstellen kann.

Wenn man die manometrischen Flammen tönender Pfeifen durch rotierende Spiegel untersucht, so erhält man ähnliche Resultate, wie wir sie bereits bei den singenden Flammen kennen gelernt haben. Wenn man auf derselben Windlade zwei offene Pfeifen aufsetzt, von welchen die eine die Oktav der anderen gibt und deren jede in ihrer Mitte (also im Schwingungsknoten ihres Grundtones) mit einem manometrischen Kästchen versehen ist, so sieht man im Spiegel die in Fig. 647, S. 616 dargestellte Erscheinung, daß die eine Flammenreihe doppelt so viel Zähne zeigt als die andere, wenn man mittels eines Kautschukröhrchens dafür gesorgt hat, daß sich der Brenner der einen Pfeife nahe unter dem der anderen befindet.

Eine weitere Methode, die Schwingungsknoten in tönenden Luftsäulen sichtbar zu machen, hat Kundt angegeben[1]. Um die Luft in einer längeren Röhre in stehende Schwingungen zu versetzen, wird auf der einen Seite derselben die Hälfte einer engeren Glasröhre *ab*, Fig. 660, von ungefähr 1 cm äußerem Durchmesser und 1 m Länge mittels eines wohl schließenden Korkes bei *c*, welcher auf der Mitte der Röhre *ab* festsitzt, in die etwas weitere Röhre *cd* eingeführt. An das Ende *b* der engeren Röhre ist ein Kork angesetzt, dessen Gestalt aus der Figur zu ersehen ist und dessen breiterer Teil zwar in den Querschnitt der weiteren Röhre paßt, sich aber doch ohne Reibung in derselben verschieben läßt. Das andere Ende des Rohres *cd* ist durch einen wohl schließenden Kork *m* abgesperrt, den man mittels des Stäbchens *s* etwas vor- oder zurückschieben kann. Wird der äußere Teil des Rohres *ab* mit einem befeuchteten wollenen Lappen gerieben, so gerät er in Longitudinalschwingungen und läßt infolgedessen einen kräftigen Ton hören. Dabei vibriert der Kork *b* in der Längsrichtung der Röhre und seine Stöße werden in dem weiteren Röhrenstücke Schallwellen erzeugen, welche bei *m* reflektiert werden, so daß sich zwischen *b* und *m* stehende Schwingungen bilden. Befindet sich nun die Röhre in horizontaler Lage und ist auf der ganzen Länge zwischen *b* und *m* ein feiner Staub

[1] [illegible]

selben mit dem senkrechten Abstand D der Skala SS vom Spiegel zusammen fiel, so ist offenbar:

$$tang\ 2\varphi = \frac{\sigma}{D},$$

oder da man für kleine Winkel statt der Tangente den Bogen setzen kann

$$\varphi = \frac{\sigma}{2D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

Ist also z. B. die Skala in Millimeter geteilt und die Entfernung D derselben vom Spiegel 1719 mm, so entspricht einem Skalenteil ein Winke $\varphi = 1'$, und da man mit einem guten Fernrohr auf diese Distanz noch siche 0,1 mm schätzen kann, so werden wir den Drehungswinkel noch bis auf 6' genau messen können.

Denken wir uns also auf der Achse d des Fühlhebels F in Fig. 49 einen solchen Spiegel aufgesetzt und seine Drehung, wie zuletzt angenommen, mi Fernrohr und Skala beobachtet, so wird die Bewegung l des kurzen Hebel armes c für einen kleinen Drehungswinkel φ der Achse sein: $l = c \, . \, arc \, . \, \varphi$ Setzen wir also $c = 3$ mm, so wird $\varphi = 6'' : l + 0{,}000\,09$ mm oder nah 0,1 μ sein, d. h. man würde Verlängerungen des Maßstabes M bis 0,1 μ genau messen können.

§ 18. Instrumente zur genaueren Längenmessung. Die Instrumente, deren man sich unter Benutzung der beschriebenen Hilfsmittel zu Erhöhung der Genauigkeit der Messung bedient, um gegebene Längen auch in den Fällen zu messen, wo man mit dem Maßstab selbst nicht unmittelba

Fig. 51.

an diese herankommen kann, zerfallen in zwei Gruppen, indem man sich dabe entweder des mechanischen Kontakts oder der optischer Pointierung bedient.

Kontaktinstrumente. Unter diesen Längenmeßinstrumenten er wähnen wir zuerst die

Schublehre oder den Kalibermaßstab. Die Schublehre besteht aus einem in Millimeter geteilten flachen Maßstab von rechteckigem Querschnitt wie ihn Fig. 51 verkleinert darstellt, an dessen einem Ende ein aus Stahl angefertigter Querarm A befestigt ist, der unten abgeschrägt ist, so daß er auch wohl in Modifikation der Figur in eine Spitze ausläuft. Ein zweiter ganz ähnlicher Querarm B ist an einer auf dem Maßstab zu verschiebender Hülse C befestigt, welche mit der Klemmschraube D an beliebiger Stelle desselben zu klemmen ist. Die Hülse hat über der Teilfläche des Maßstabes einen Ausschnitt mit gegen die Teilung hin zugeschärfter Kante, auf welcher

Semen Lycopodii, Kieselerde, am besten Korkstaub) verbreitet, so sammelt r sich in Querlinien[1]), welche vorzugsweise in den Bäuchen ausgebildet rscheinen, während in den Knotenpunkten der Staub einfach angehäuft wird der auch Ringe bildet. Der Abstand zweier aufeinander folgender Bäuche st gleich einer halben Wellenlänge des Tones in der Luft.

Am regelmäßigsten bilden sich die Staubwellen in *b m*, wenn die Länge lieses Röhrenstückes möglichst genau ein Vielfaches der zugehörigen Luftvelle ist.

Kundt hat die Röhre *c d* mit zwei Seitenröhrchen versehen, mittels leren man sie evakuieren und mit einem anderen Gase füllen kann. Je achdem *c d* mit anderen Gasen gefüllt ist, ergeben sich verschiedene Werte ür die Wellenlänge desselben Tones, also auch verschiedene Werte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in diesen Gasen. Für Kohlenäure rücken die Maxima der Staubanhäufung näher zusammen, für Leuchtgas und Wasserstoffgas rücken sie weiter auseinander.

Bezeichnen wir die Länge einer Staubwelle für Luft mit 1, so ist dieelbe in dem gleichen Apparate für Kohlensäure 0,8, für Leuchtgas 1,6, für Wasserstoffgas 3,56. Danach ergibt sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Kohlensäure 331 . 0,8 = 265 m, in Leuchtgas 331 . 1,6 = 530 m und in Wasserstoffgas 331 . 3,56 = 1178 m[2]).

W. Jaeger[3]) hat die Kundtsche Methode auch zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Dämpfen von Äther, Alkohol und Wasser benutzt, um laraus das Verhältnis der spezifischen Wärmen zu berechnen. Er verwendete verkohlten Korkstaub, da dieses Pulver auch in den gesättigten Dämpfen noch gute Staubfiguren liefert.

Interessante Erweiterungen der Kundtschen Klangfiguren sind von Fr. Schaumburg[4]) beschrieben worden, welcher die zylindrischen Röhren lurch prismatische und anders geformte ersetzte und statt der longitudinal chwingenden Stäbe auch transversal schwingende Körper, ja sogar die menschliche Stimme substituierte.

§ 215. Dichtigkeitsänderungen in den Knotenpunkten. Die im vorigen Paragraphen besprochenen Versuche beweisen unzweifelhaft, daß in len Knotenpunkten tönender Luftsäulen abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft stattfinden; sie geben aber keine Auskunft über die Größe dieser Dichtigkeitsänderungen, welche Kundt durch Anwendung von Wassermanometern ermittelt hat[5]).

Setzt man ein Wassermanometer einfach an der Stelle eines Knotenpunktes in die Wand einer tönenden Luftsäule ein, so kann es freilich seinen Stand nicht dauernd ändern, ja es wird nicht einmal in sichtbare Schwankungen geraten, weil Verdichtung und Verdünnung viel zu rasch abwechseln, als daß die Wassersäule denselben folgen könnte. Verbindet man aber nach

[1]) Über die Querlinien oder „Rippen" siehe Dvořáks Mitteilungen in Pogg. Ann. **151**, 634 (1874).

[2]) Man vergleiche auch die Beobachtungen von Dvořák, Wien. Akad. Ber. 72, II, 227 (1875).

[3]) Wiedem. Ann. **36**, 165 (1889).

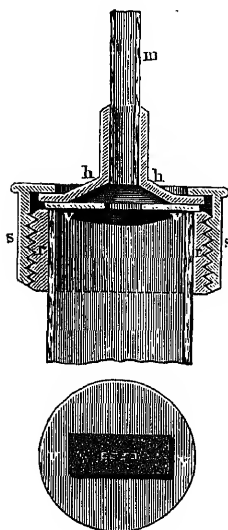
[4]) Inaugural-Dissertation, Marburg 1889.

[5]) Pogg. Ann. **134**.

Kundt das Manometer mit einem Ventil, welches durch einen stärkeren Luftdruck von Seiten der Pfeife her gegen das Manometer gehoben wird, sich also nur in solchen Momenten öffnet, für welche in dem entsprechenden Knotenpunkte eine Verdichtung eintritt, so muß das Manometer steigen, bis seine Höhe dem Dichtigkeitsmaximum der Luft in dem Knotenpunkte entspricht. — Hat man dagegen dem Ventil die entgegengesetzte Lage gegeben, so wird es sich in den Momenten öffnen, in welchen im Knotenpunkte eine Luftverdünnung eintritt, in diesem Falle zeigt es also das Dichtigkeitsminimum der Luft in den Knotenpunkten an.

Als Kundt solche Ventilmanometer am oberen Ende einer gedeckten 30 cm langen gläsernen Orgelpfeife anbrachte, ergab sich bei kräftigem Ertönen ihres Grundtones im einen Falle ein Steigen, im anderen Falle ein Sinken des Wassermanometers um 20 bis 25 cm. Die Druckdifferenz zwischen dem Maximum der Verdichtung und der Verdünnung am Boden einer etwa 30 cm langen gedeckten Orgelpfeife kann also bei starkem Tönen gegen 60 cm Wasserdruck, also ungefähr $^1/_{13}$ Atmosphäre, betragen. Dieses Resultat zeigt, daß in unseren musikalischen Instrumenten, bei welchen die Luft den tönenden Körper bildet, die Dichtigkeitsänderungen derselben größer sind, als man bisher anzunehmen geneigt war.

Fig. 661.



Die Ventilmanometer können auch statt an dem Ende einer gedeckten Pfeife in dem Knoten einer offenen Pfeife angebracht werden; in diesem Falle ergeben sich aber die Druckdifferenzen ungefähr nur halb so groß wie in dem oben betrachteten Falle.

Die Konstruktion der Ventilmanometer, wie sie Kundt am oberen Ende einer gedeckten Pfeife anbrachte, wird durch Fig. 661 erläutert. Auf das Ende der gläsernen Röhre von einer etwas über 30 cm langen Orgelpfeife ist ein Ring *r* von Messing gekittet, dessen obere Endflächen eben abgeschliffen und in dessen Umfang ein Schraubengewinde eingeschnitten ist. Auf den Rand dieses Ringes wird zunächst die Ventilplatte *v* und auf diese ein Messingstück gelegt, welches im Umfange eben und in dessen etwas erhabener Mitte das Manometerrohr *m* eingekittet ist. Das Messingstück *h* wird samt der Ventilplatte *v* durch die Überfangsschraube *s* auf den Rand des Glasrohres und des Ringes *r* aufgepreßt. In die messingene Ventilplatte *v* ist ein Schlitz von 1 mm Breite und 5 bis 10 mm Länge eingeschnitten und über denselben eine leicht bewegliche Membran gespannt, die an beiden Enden auf die Platte aufgeklebt ist. Das Manometer zeigt das Maximum oder das Minimum des Druckes im Knotenpunkte an, je nachdem die Ventilplatte so gelegt ist, daß sich die Membran auf ihrer oberen oder auf ihrer unteren Seite befindet.

Für die Membranen der Ventile wandte Kundt entweder sehr dünne Kautschukstreifen oder Guttaperchapapier an. Die Spannung der kleinen Membran muß so gewählt sein, daß das Ventil, mit dem Munde angeblasen, einen Ton hören läßt, der nicht allzu weit von dem der Orgelpfeife entfernt ist.

Nach V. Dvořák[1]), welcher die Versuche von Kundt wiederholt und mit Modifikationen bereichert hat, sind die Angaben des Manometers nicht immer verläßlich, da insbesondere auch die vom Wasser freie Länge der Manometerröhre auf dieselben von Einfluß ist.

V. Dvořák ist es auch gelungen, mittels passend konstruierten Ventils und Manometers die Druckänderungen in der freien Luft in der Nähe der Pfeife, welche beim Tönen derselben entstehen, nachzuweisen. Näheres hierüber an der zitierten Stelle.

Töpler und Boltzmann wandten zur Bestimmung der Dichtigkeitsänderungen der Luft am Boden einer gedeckten Pfeife eine sehr sinnreiche optische Methode an[2]), welche darauf beruhte, daß zwei von einer Lichtquelle ausgehende intermittierende Lichtbündel nach dem Fresnel-Aragoschen Prinzip zur Erzeugung des Interferenzphänomens benutzt werden. Läßt man dann das eine Strahlenbündel außerhalb der Pfeife, das andere durch die Pfeife quer hindurchgehen, so wird durch die Dichteänderung der Luft der Gangunterschied der interferierenden Strahlenbündel verändert. Aus den eintretenden Verschiebungen der Interferenzstreifen, welche stroboskopisch verlangsamt erscheinen, kann dann die Dichteänderung der Luft berechnet werden. Nach den Versuchen der genannten Verfasser betrug die Dichtigkeitsänderung am Boden einer quadratischen, 36 cm langen und 5,2 cm weiten Orgelpfeife $^1/_{26}$ bis $^1/_{23}$ einer Atmosphäre.

Prof. E. Mach[3]) modifizierte dieses Verfahren und machte es auch für offene Pfeifen anwendbar. Demselben Autor ist auch die erste stroboskopische Darstellung der Luftschwingungen zu verdanken. A. Raps[4]) bediente sich bei seinen ähnlichen Untersuchungen eines Jaminschen Interferentialrefraktors mit photograpischer Registrierung und erhielt damit sehr schöne Resultate.

Fig. 662.



§ 216. Einfluß der Form der Pfeifen auf die Tonhöhe. Die aus den vorhergehenden Paragraphen sich ergebende Folgerung, daß die Tonhöhe einer Pfeife nur durch deren Länge bedingt sei, ist nicht unbedingt für alle Gestalten der Pfeife richtig, indem die Tiefe der Pfeife, die Breite des Mundloches usw. von wesentlichem Einfluß auf die Tonhöhe sind. Es geht dies auch schon aus den Bemerkungen des § 212, S. 611, hervor.

Savart hat gezeigt, daß zwei Pfeifen *a* und *b*, Fig. 662, welche gleiche Länge und Tiefe haben, welche aber ungleich breit sind, denselben Ton geben (vorausgesetzt, daß in beiden der Mund die volle Breite der Röhre einnimmt), nur ist der Ton der schmalen Pfeife schwächer.

Wenn aber bei gleicher Höhe und Breite die Tiefe zweier Pfeifen verschieden ist, wie z. B. bei den Pfeifen *b* und *c*, Fig. 662, so ist ihr Ton

[1]) V. Dvořák, Beobachtungen am Kundtschen Manometer. Wien. Akad. Ber. 68, II, 7 bis 9.

[2]) Pogg. Ann. 141.

[3]) Optisch-akustische Versuche, Prag 1873.

[4]) Über Luftschwingungen. Habilitationsschrift, Leipzig 1893.

nicht mehr gleich, er ist höher für die Röhre von geringerer Tiefe, also in unserem Beispiel höher für die Pfeife *c* als für die Pfeife *b*.

Nach Bertsch ist die Tonhöhe zweier Pfeifen gleich, wenn für beide die Summe der Höhe und der doppelten Tiefe dieselbe ist. Demnach müßte eine Pfeife von 20 cm Länge und 2 cm Tiefe denselben Ton geben wie eine andere von 16 cm Länge und 4 cm Tiefe.

Wenn zwei Orgelpfeifen einander ähnlich sind, d. h. wenn die entsprechenden Dimensionen in gleichem Verhältnis stehen, und wenn der Mund bei verhältnismäßiger Größe in beiden die gleiche Stellung hat, so verhalten sich die Schwingungszahlen ihrer Töne umgekehrt wie die entsprechenden Dimensionen. Eine Pfeife *A* gibt z. B. einen Ton, welcher die nächst niedere Oktave des von einer Pfeife *B* gegebenen Tones ist, wenn *A* doppelt so lang, doppelt so breit und doppelt so tief ist als *B*.

Die Größe und Stellung des Mundloches hat einen sehr bedeutenden Einfluß auf die Tonhöhe der Pfeife. Es ist schon bemerkt worden, daß, wenn man die Weite des Mundloches, d. h. die Entfernung der Lippen, vergrößert, die Röhre leichter ihren Grundton gibt; daß sie aber leichter die Obertöne gibt, wenn man das Mundloch enger macht. Einen anderen Einfluß übt die Breite des Mundloches aus. Wenn z. B. in einer quadratischen Röhre das Mundloch die ganze Breite einer Seite hat, so erhält man einen höheren Ton, als wenn man das Mundloch schmäler macht; man kann auf diese Weise den Ton selbst bis zur Septime herunterstimmen, besonders wenn die Röhre fast kubisch ist. Deshalb bringen auch die Orgelbauer zu beiden Seiten des Mundloches kleine Bleiplatten an, welche Ohren genannt werden, und die man durch Biegen etwas nähert oder voneinander entfernt, um die Tonhöhe zu regulieren.

Man weiß schon lange durch oft wiederholte Versuche, daß der Ton eines Hornes und einer Trompete von dem Stoff des Instrumentes und dem Grade der Härtung abhängt; ein Horn z. B., welches im Feuer gehärtet ist, ohne daß man seine Gestalt geändert hat, würde nur gedämpfte Töne geben. Die Orgelbauer kennen auch den Einfluß des Stoffes der Röhren auf die Natur des Tones, und sie versichern, daß man die Beschaffenheit des Zinns an den Metallröhren oder die des Holzes an den Holzröhren nur etwas zu verändern brauche, um das Instrument schlecht zu machen. Diese Beobachtungen sind durch die zahlreichen Versuche bestätigt worden, welche Savart mit Röhren von mehr oder weniger gespanntem Pergament und mehr oder weniger feuchtem Papier angestellt hat; er fand: 1. daß der Ton in quadratischen Röhren, deren Seite 2 cm und deren Höhe 30 cm beträgt, sich um mehr als eine Oktave herunterstimmen läßt, wenn man das Papier, welches die Wände bildet, mehr und mehr anfeuchtet; dieses Papier war auf die festen Kanten des Prismas wie auf einen Rahmen aufgeklebt; 2. daß sich der Ton durch diese Mittel um so leichter herabstimmen läßt, je kürzer die Röhren sind; in kubischen Röhren kann man ihn um mehr als zwei Oktaven herabstimmen; 3. daß man nur einen Teil der Wand aus Papier oder Pergament zu machen braucht, um den Ton herabzustimmen.

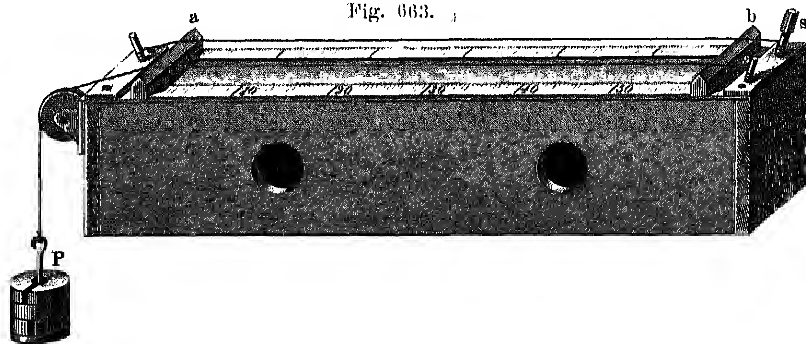
Zweites Kapitel.

Von den Tönen.

§ 217. Die musikalischen Intervalle. Die Lehre von den Tönen in bezug auf ihre musikalische Verwendung, sei es in ihrer Aufeinanderfolge (Melodie), sei es in ihrem Zusammenklange (Harmonie), überschreitet das Gebiet der Physik und gehört großenteils den Gebieten der Physiologie und der theoretischen Musik an. Der Umstand, daß es gelungen ist, manche ästhetische Gesetze auf physikalische Grundlagen zurückzuführen, veranlaßt uns, die Elemente der Lehre von den musikalischen Tönen hier auseinander zu setzen; für ein eingehenderes Studium dieses hoch interessanten Gegenstandes müssen wir auf Spezialwerke verweisen[1]).

Nach den Ergebnissen der §§ 211 und 212 sind wir in den Stand gesetzt, Töne verschiedener Höhe, deren relative Schwingungszahlen uns bekannt sind, hervorzurufen. Die Orgelpfeifen würden sich hierzu insofern am besten eignen, als sie, insbesondere die gedeckten Pfeifen, fast ganz reine Töne liefern. Die gespannten Saiten geben, mit den Fingern gezupft oder mit dem Bogen gestrichen, keine isolierte Töne, sondern Klänge, welche außer dem Hauptton noch höhere (Obertöne) enthalten. Da dies jedoch für die nächsten Zwecke nicht stört, dagegen die Verkürzung der Saiten leichter

Fig. 663.



durchführbar ist, als der Übergang von längeren Pfeifen zu kürzeren, so wollen wir die Experimente zur Ableitung der musikalischen Tonstufen (Intervalle) und der Zusammenklänge (Akkorde) an einem Instrumente angestellt denken, welches unter dem Namen Monochord bekannt ist, ob-

---

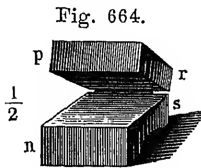
[1]) z. B. in H. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. E. Mach, Einleitung in die Helmholtzsche Musiktheorie. A. v. Öttingen, Harmoniesystem in dualer Entwickelung.

wohl es gewöhnlich mit mehr als nur einer Saite bespannt ist. Fig. 663 stellt ein Monochord mit zwei Saiten dar.

Die beiden Saiten sind über einem Kasten ausgespannt, der aus vier starken Seitenbrettern besteht, auf welche ein Resonanzboden, d. h. ein ganz dünnes Brett von Tannenholz, geleimt ist, dessen Bedeutung später erläutert werden soll. Die beiden Stege *a* und *b* begrenzen den frei schwingenden Teil der Saiten, die eine derselben wird durch die Gewichte *P* gespannt, die andere durch den Stimmstock *s*.

Um eine der beiden Saiten zu verkürzen, ohne gleichzeitig ihre Spannung zu ändern, bedient man sich des beweglichen Steges (Fig. 664), indem man die Saite zwischen dem Fußstück *n s* und dem Deckel *p r* einklemmt. Die klemmenden Flächen sind mit weichem Leder belegt. Hierdurch wird verhindert, daß sich die Schwingungen auf den nicht benutzten Teil der Saite übertragen.

Fig. 664.



Wir beginnen damit, daß wir die beiden Saiten bei gleicher Länge auf die gleiche Tonhöhe bringen, indem wir die Spannung der einen oder der anderen so lange ändern, bis wir keinen Unterschied der Töne mehr wahrnehmen. Dabei wird freilich vorausgesetzt, daß wir entweder selbst ein hinreichend entwickeltes musikalisches Gehör haben, oder uns durch ein solches unterstützen lassen. Die absolute Höhe des Tones ist dabei ganz gleichgültig. Das Verhältnis der beiden gleichen Töne wird Unisono genannt und durch den Bruch $^1/_1$ ausgedrückt.

Verkürzen wir nun die eine Saite auf die Hälfte, so muß nach § 211 die Wellenlänge auch auf die Hälfte, mithin die Schwingungszahl auf das Doppelte gebracht werden. Der Ton, den nun die Saite gibt, hat trotz seiner bedeutend größeren Höhe einen auffallend ähnlichen Charakter wie der tiefere der anderen Saite; er ist gewissermaßen eine Wiederholung des letzteren in höherer Tonlage. Auch hat er die Eigenschaft, daß er mit dem tieferen Tone, den wir von nun an Grundton (oder Tonica) nennen wollen, zusammen sich zu einem harmonisch klingenden Tongemisch vereinigt, welches sich als angenehm empfundener Klang (Konsonanz) darstellt. Dies wird am besten dadurch bemerkbar gemacht, daß man durch kleine Verschiebungen des Steges das Tonverhältnis ein wenig ändert. Sofort tritt ein äußerst unangenehmes Tongemisch (Dissonanz) auf, welches wieder in die Konsonanz zurückverwandelt wird, sowie man das Saitenverhältnis 1 : 2 herstellt.

Das Verhältnis des Tones mit doppelter Schwingungszahl zum Grundtone wird Oktave genannt und mit $^2/_1$ bezeichnet. Man sagt auch, der obere Ton sei die Oktave des Grundtones. Der Name Oktave wird später seine Erklärung finden.

Durch Verschieben des Steges von der Lage, welche der halb so langen Saite bis zu jener, die der ursprünglichen Länge entspricht und wiederholtes gleichzeitiges Anstimmen der beiden Saiten, findet man dann, das zwischen Unisono und Oktave noch mehrere Verhältnisse der Tonhöhen eine Konsonanz liefern, während alle zwischen diesen liegenden Verhältnisse mehr oder weniger ausgesprochene Dissonanzen liefern. Die Konsonanzen treten auf, wenn die Saite auf $^2/_3$, $^3/_4$, $^3/_5$, $^4/_5$ und $^5/_6$ ihrer Anfangslänge verkürzt ist. Dabei ist die Konsonanz um so vollkommener, je kleiner die Zahlen dieser

Brüche sind, so daß also unter obigen Verhältnissen $^2/_3$ die beste, $^5/_6$ die wenigst vollkommene Konsonanz geben. Das Verhältnis $^6/_7$ gibt bereits eine starke Dissonanz. Die Schwingungszahl des Tones der Saitenlänge $^2/_3$ ist $^3/_2$ mal so groß als jene des Grundtones, dessen Schwingungszahl wir zur Einheit wählen. Das Tonverhältnis $^3/_2$ wird Quinte genannt. Die Namen der übrigen konsonierenden Tonverhältnisse sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Relative Saitenlänge und Schwingungszahl des Grundtones	Relative Saitenlänge des höheren Tones	Relative Schwingungszahl des höheren Tones	Name des Tonverhältnisses (Intervalls)
1	1	1	Unisono
1	$^1/_2$	2	Oktave
1	$^2/_3$	$^3/_2$	Quinte
1	$^3/_4$	$^4/_3$	Quarte
1	$^3/_5$	$^5/_3$	Sexte
1	$^4/_5$	$^5/_4$	Große Terz
1	$^5/_6$	$^6/_5$	Kleine Terz

Verkürzt man die Saite noch weiter als bis zur Hälfte, so begegnet man noch weiteren konsonierenden Tönen. Bei der Saitenlänge $^1/_3$ erhält man den Ton mit der relativen Schwingungszahl 3, welcher Duodezime genannt wird und zugleich die Quinte der Oktave des Grundtones ist. Bei der Saitenlänge $^1/_4$ erhält man die Oktave der Oktave, oder die zweite Oktave (Doppeloktave) des Grundtones mit der relativen Schwingungszahl 4. Solcher Oktaven gibt es also eine ganze Reihe, sie entsprechen einer Reihe von Tönen mit stets verdoppelter Schwingungszahl; d. h. ihre Schwingungszahlen stehen im Verhältnis der Zahlen:

$$1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32 \ \ldots\ldots$$

Ändert man bei obigen Experimenten Länge oder Spannung der Saite, deren Ton als Grundton gewählt wird, so daß also die absolute Höhe des letzteren verschiedene Werte annimmt, so gelten dennoch für die relativen Schwingungszahlen der zugehörigen konsonierenden Töne dieselben Zahlenverhältnisse.

Aus dieser Tatsache folgt demnach der wichtige Satz:

Der musikalische Wert einer Tonstufe (eines Intervalls) ist nicht von der Differenz, sondern von dem Quotienten der Schwingungszahlen der Töne abhängig.

Wir wollen diesen Fundamentalsatz der Tonlehre noch durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Angenommen, eine Saite mache 48 Schwingungen in der Sekunde. Wählen wir diesen Ton als Grundton, so entsprechen seiner Quinte $48 \times {}^3/_2 = 72$ Schwingungen.

Die Quinte hat also diesmal um 24 Schwingungen mehr als der Grundton. Wählen wir jetzt den Grundton um eine Oktave höher, also zu 96 Schwingungen, so kommen wir keineswegs auf die Quinte dieses Tones, indem wir

wiederum 24 addieren. Der Ton $96 + 24 = 120$ ist vielmehr identisch mit der großen Terz von dem Tone 96. Um die Quinte des neuen Grundtones 96 zu erhalten, müssen wir diese Zahl mit der für die Quinte charakteristischen Verhältniszahl $^3/_2$ multiplizieren, wodurch wir 144 erhalten. Die neue Quinte hat dann nicht um 24, sondern um 48 Schwingungen mehr als der neue Grundton.

Man kann das auch so ausdrücken: Will man in musikalisch gleichwertigen Tonstufen aufsteigen, so daß also die nacheinander erreichten musikalischen Tonhöhen eine arithmetische Reihe (I. Ordnung) bilden, so müssen die Schwingungszahlen in geometrischer Reihe (I. Ordnung) fortschreiten.

Ein Beispiel bildet die oben angeführte Reihe der Oktaven.

Da die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Reihe unter sich eine arithmetische Reihe bilden, so kann man auch sagen: Die musikalischen Werte der Tonhöhen verhalten sich wie die Logarithmen der Schwingungszahlen[1]).

§ 218. **Die Tonleitern.** Unter einer Tonleiter (Skala) versteht man die vollständige Reihe der innerhalb einer Oktave gelegenen, nach der Höhe geordneten Töne, welche in einem Musikwerke gebraucht werden.

Die heute unter den Kulturvölkern gebrauchten Tonleitern sind das Produkt eines über 2000 Jahre dauernden Entwickelungsprozesses, dessen Erörterung in die Geschichte der Musik gehört. Hier mögen die folgenden Bemerkungen genügen.

Die Musik war ursprünglich bis in das 10. Jahrhundert im wesentlichen homophon, das heißt einstimmig. Wirkten mehrere Stimmen mit, so hatten sie gleichzeitig dieselbe Tonhöhe, oder unterschieden sich doch nur durch das Intervall einer Oktave. Ein gleichzeitiges Zusammenwirken verschieden hoher Töne, eine Harmonie, gab es nicht, sondern nur ein Fortschreiten nach Tönen verschiedener Höhe, eine Melodie. Dabei wurde anfangs besonderer Wert darauf gelegt, daß die unmittelbar aufeinander folgenden Töne möglichst vollkommene Konsonanz zueinander besaßen. Da dies nach der Oktave am meisten bei der Quinte, welcher das einfache Verhältnis $^3/_2$ entspricht, der Fall ist, so entstanden die ältesten Tonleitern (bei den Chinesen und Griechen) aus Folgen von Oktaven und Quinten. Gehen wir von einem Grundton 1 um ein Quintenintervall aufwärts und von seiner Oktave 2 um ein Quintenintervall abwärts, so erhalten wir die Tonreihe

$$1 \quad ^4/_3 \quad ^3/_2 \quad 2.$$

Dies sind die vier Töne, mit denen die Lyra der Griechen ursprünglich ausgerüstet war. Diese Tonleiter enthält die wichtigsten Intervalle der deklamierenden Rede. Bei einer Frage steigt die Stimme um eine Quart, bei der stärkeren Betonung eines Wortes um eine Quinte; am Schlusse der Rede fällt sie um eine Quinte. Zur musikalischen Begleitung einer Deklamation in gleicher Tonhöhe reichte also diese Tonleiter aus.

---

[1]) Es ist dieser Satz nur ein spezieller Fall des allgemeineren von Fechner aufgestellten „psychophysischen Gesetzes“, nach welchem überhaupt die Empfindungen fortschreiten wie die Logarithmen der Sinnesreize.

Wiederholt man dieses Verfahren, indem man von dem Ton $^3/_2$ noch einen Quintenschritt nach aufwärts, von dem Ton $^4/_3$ noch einen solchen abwärts macht, so erhält man die Tonreihe

$$^8/_9 \quad 1 \quad ^4/_3 \quad ^3/_2 \quad 2 \quad ^9/_4.$$

Die beiden neuen Töne liegen aber außerhalb der Oktave 1 — 2. In solchen Fällen entstand immer das Bedürfnis, diese Töne auch durch ihre Oktaven innerhalb des Intervalls 1 — 2 zu repräsentieren, um, falls die Stimme nicht weit genug in die Höhe oder Tiefe reichte, die unteren oder oberen Oktaven dem beabsichtigten Tone zu substituieren.

Hierdurch erhalten wir innerhalb des Intervalls 1 — 2 die Töne

$$1, \quad ^9/_8, \quad ^4/_3, \quad ^3/_2, \quad ^{16}/_9, \quad 2.$$

Auf dieser Stufe der Entwickelung blieben die Chinesen stehen. Merkwürdigerweise liegt dieselbe Skala auch zahlreichen gälischen (schottischen und irischen) Volksmelodien zugrunde und verleiht denselben ihren eigentümlichen Charakter.

Die Griechen dagegen erweiterten unter Terpander und Pythagoras diese Skala, indem sie noch weiter Quintenschritte hinzufügten.

Gehen wir vom Grundton um eine Quinte hinab und um fünf Quinten hinauf, so erhalten wir

$$^2/_3 \quad 1 \quad ^3/_2 \quad ^9/_4 \quad ^{27}/_8 \quad ^{81}/_{16} \quad ^{243}/_{32}.$$

Ersetzen wir auch hier alle Töne, welche unter 1 und oberhalb 2 fallen durch ihre zwischen 1 und 2 fallenden Oktaven, so bekommen wir

$$^4/_3 \quad 1 \quad ^3/_2 \quad ^9/_8 \quad ^{27}/_{16} \quad ^{81}/_{64} \quad ^{243}/_{128}$$

und wenn wir nach der Höhe ordnen und den Ton 2 hinzufügen, die Skala:

$$1 \quad ^9/_8 \quad ^{81}/_{64} \quad ^4/_3 \quad ^3/_2 \quad ^{27}/_{16} \quad ^{243}/_{128} \quad 2,$$

welche als Pythagoräische Tonleiter bekannt ist und den späteren Skalen bis ins 16. Jahrhundert zur Grundlage gedient hat [1]. Aus ihr gingen auch die Skalen des Ambrosianischen und Gregorianischen Kirchengesanges hervor, welche sich in der römischen Kirche erhalten haben.

Nach dem Aufkommen der polyphonen Musik im 10. und 11. Jahrhundert und noch mehr seit der Entwickelung der harmonischen Musik vom 16. Jahrhundert an, konnten die Pythagoräische und die von ihr abstammenden Tonleitern nicht mehr genügen, da ihre Intervalle nur zum Fortschreiten nach einer Melodie, nicht aber zur Konstruktion harmonischer Akkorde geeignet waren. Es mußte also eine wesentliche Umbildung der Skala erfolgen, welche allmählich zur Konstruktion unserer jetzt geltenden beiden Tonleitern, der diatonischen Dur-Skala und Moll-Skala, führte. Von diesen beiden hat sich zuerst die erstere, dann die letztere entwickelt. Ihre jetzige Gestalt ist kaum 200 Jahre alt und ausschließliches Eigentum der germanischen, romanischen, keltischen und slavischen Völker.

Die folgende Zusammenstellung gibt für jede dieser beiden Tonleitern die Namen, Buchstabenzeichen und relativen Schwingungszahlen der Töne, denen noch die Intervalle (Quotienten) der Nachbartöne beigefügt sind.

---

[1]) Eine griechische Tonleiter findet sich merkwürdigerweise noch bei der in Tirol (Zillertal) gebrauchten Holzharmonika (Helmholtz, l. c., S. 443).

Dur-Skala.

Name	Prim	Sekunde	Große Terz	Quart	Quint	Große Sext	Große Septime	Oktave
Zeichen	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*
Relative Schwingungszahl . . .	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	2
Intervalle		$9/8$	$10/9$	$16/15$	$9/8$	$10/9$	$9/8$	$16/15$

Moll-Skala [1]).

Name	Prim	Sekunde	Kleine Terz	Quart	Quint	Kleine Sext	Kleine Septime	Oktave
Zeichen	*c*	*d*	*es*	*f*	*g*	*as*	*b*	*c*
Relative Schwingungszahl . . .	1	$9/8$	$6/5$	$4/3$	$3/2$	$8/5$	$9/5$	2
Intervalle		$9/8$	$16/15$	$10/9$	$9/8$	$16/15$	$9/8$	$10/8$

Aus dieser Zusammenstellung ist einmal erstens zu ersehen, woher die Namen Oktave, Quinte usw. stammen; es sind einfach die lateinischen Ordnungszahlen für die Glieder dieser Skalen. Ferner erkennt man, wenn man bei der Septime beginnt und statt des *h* der Durskala das *b* der Mollskala restituiert, die ursprüngliche alphabetische Ordnung der Buchstabenbezeichnung der Töne *a*, *b*, *c* . . . [2]).

Beide Skalen haben mit der Pythagoräischen die Anzahl der Stufen, sowie die Höhe von fünf Tönen gemein; in allen drei Skalen sind die Terz, Sext und Septime abweichend.

In der Pythagoräischen Skala kommen zwischen den Nachbartönen die Intervalle $9/8$, $9/8$, $256/243$, $9/8$, $9/8$, $9/8$, $256/243$ vor, also zuerst zwei größere Intervalle, dann ein kleineres, dann wieder drei der größeren, dann noch einmal das kleinere. Ähnlich ist die Anordnung in der Durskala, jedoch sind dort zwei unter sich verschiedene größere Intervalle $9/8$ und $10/9$, das kleinere ist $16/15$. In der Mollskala finden sich dieselben Intervalle, jedoch in anderer Verteilung.

Unter den Tönen der Durskala sind alle mit Ausnahme der Sekunde und Septime mit dem Grundton konsonant, in der Mollskala ist es ebenso mit Ausnahme der Sext, welche dissonant ist.

Die Frage nach der Entstehung dieser Skalen ist verschieden beantwortet worden, sicherlich sind sie nicht auf einmal, etwa auf theoretischem

---

[1]) Die hier verzeichnete Mollskala wird insbesondere in absteigender Richtung gebraucht; beim Aufsteigen wird häufig die obere Hälfte der Töne der Durskala entnommen.

[2]) Die Namen Dur und Moll stammen nicht, wie man meinen möchte, vom Charakter dieser Tonarten, sondern von den beiden Formen des *b*, wofür in der Durskala das eckige *b* (♮, *b* durum) in der Mollskala das runde *b* (♭, *b* molle) geschrieben wurde. Aus dem ersteren wurde das jetzige *h*.

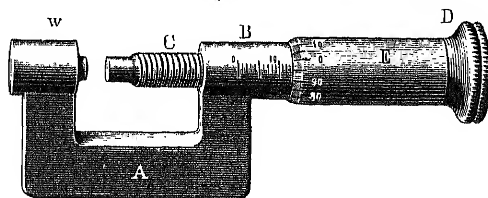
Verrierteilung 10:9 oder 20:19 angebracht ist, so daß man 0,1 mm r 0,05 mm damit ablesen kann.

Dabei ist die Teilung auf dem Maßstab gewöhnlich so angebracht, daß n Zusammenschieben des Querarmes *B* bis zur Berührung mit *A*, was in ganzen Länge derselben bis zu den Spitzen hin der Konstruktion zufolge au möglich sein soll, der Nullpunkt des Verniers auf den Nullpunkt der 'stabteilung fällt. Man wird dann z. B. den Durchmesser eines Zylinders, man zwischen die Querarme *A* und *B* gebracht hat, nach Näherung der- n bis zur Berührung mit dem Zylinder unmittelbar mit dem Vernier am ßstab ablesen können. Sollte jene Bedingung der Koinzidenz der beiden lpunkte bei unmittelbarer Berührung der Arme *A* und *B* nicht erfüllt , so macht man zuerst bei dieser Stellung eine Ablesung am Vernier und ihren Betrag dann von derjenigen ab, welche nach Zwischenbringen s Gegenstandes zwischen *A* und *B* erhalten wird.

Bisweilen werden die äußeren Seiten der Querarme *A* und *B* zugeschärft die so erhaltenen Kanten ganz schwach abgerundet, um mittels der ublehre als Kalibermaßstab auch den inneren Durchmesser von Röhren dergleichen messen zu können. Zu dem Ende ist dann nur nötig, daß bei zusammengeschobenen Querarmen mit einer zweiten Schublehre die me ihrer beiden Dicken außen messe, welche Größe zu den unmittelbaren esungen am Kalibermaßstab bei obigem Gebrauch hinzuzuaddieren ist.

Mikrometer oder Blechlehre von Palmer. Das Mikrometer besteht einem Bügel *A*, der bei *B* die Mutter der Mikrometerschraube *C* trägt ne Fig. 52); diese wird ch Drehen am ränderierten f *D* bewegt, und mit ihr t sich die Hülse *E*, welche ei über die Mutter *B*, an sie innen anliegt, fort- eitet. Ihr Rand, der in Teile geteilt ist, weist ei auf eine Längsmilli-

Fig. 52.



erteilung auf *B*, welche der Schraubenganghöhe von 1 mm entspricht. der Trommelteilung auf *E* wird man daher vermittelst eines Längs- ches auf *B*, der als Index dient, unmittelbar 0,01 mm des Fortrückens Schraubenspindel ablesen, während die Längsteilung auf *B* die ganzen drehungen oder also die ganzen Millimeter angibt. Wenn sich das e der Schraube gegen das Widerlager *W* am Bügel andrückt, so soll geteilte Rand von *E* auf den Nullpunkt der Teilung auf *B* einstehen auch der Nullpunkt der Trommelteilung auf den Längsstrich auf *B* sen. Man kann somit die Dicke eines zwischen das Widerlager *W* und das e der Schraube *C* gebrachten Körpers an der Längsteilung auf *B* und Umfangsteilung auf *E* bis auf 0,01 mm genau messen. Damit dabei Schraubenende sowohl gegen das Widerlager als auch gegen den zwischen- haltoten Körper jeweilen mit nahe gleicher Stärke bei der Messung ke, ist die Einrichtung getroffen, daß der Kopf *D* sich allein weiter dreht, e *E* und die Schraube *C* mitzunehmen, wenn dieser bestimmte Druck icht ist.

Wege konstruiert worden, sondern allmählich durch das Bedürfnis der harmonischen Musik entstanden [1]).

Nach Chladni kann man sie aus den dreistimmigen Akkorden (Dreiklängen) ableiten. Bevor wir diese Ableitung wiedergeben, müssen wir zuvor einiges über die Akkorde selbst vortragen.

§ 219. Die Akkorde, Ableitung der Dur- und Mollskala. Unter einem Akkord versteht man im allgemeinen das Zusammenklingen zweier oder mehrerer unter sich konsonanter Töne. Die wichtigsten darunter sind die dreistimmigen Akkorde oder Dreiklänge, die Akkorde im engeren Sinne. Von diesen ist hier die Rede.

Um zu einem vorhandenen Grundton zwei Töne zu finden, welche mit ihm einen Dreiklang bilden, haben wir unter den Tönen, welche zu dem Grundton in Konsonanz stehen, zwei solche auszusuchen, welche auch unter sich in Konsonanz stehen, also auch unter sich ein Verhältnis der Schwingungszahlen besitzen, das durch Brüche mit den ganzen Zahlen 1 bis 6 ausdrückbar ist.

Bilden wir also zunächst alle Kombinationen zu drei aus den Tönen 1, $^3/_2$, $^4/_3$, $^5/_4$, $^5/_3$, $^6/_5$, welche an erster Stelle 1 haben. Es sind folgende zehn:

1,	$^3/_2$,	$^4/_3$	$^9/_8$	Dissonanz
1,	$^3/_2$,	$^5/_4$	$^6/_5$	Konsonanz
1,	$^3/_2$,	$^5/_3$	$^9/_{10}$	Dissonanz
1,	$^3/_2$,	$^6/_5$	$^5/_4$	Konsonanz
1,	$^4/_3$,	$^5/_4$	$^{16}/_{15}$	Dissonanz
1,	$^4/_3$,	$^5/_3$	$^4/_5$	Konsonanz
1,	$^4/_3$,	$^6/_5$	$^{10}/_9$	Dissonanz
1,	$^5/_4$,	$^5/_3$	$^3/_4$	Konsonanz
1,	$^5/_4$,	$^6/_5$	$^{25}/_{24}$	Dissonanz
1,	$^5/_3$,	$^6/_5$	$^{25}/_{18}$	Dissonanz

Die in der vierten Kolumne angeschriebenen Verhältnisse zwischen dem zweiten und dritten Tone der betreffenden Kombination lassen erkennen, daß nur vier derselben zu einem wohlklingenden Akkord geeignet sind. Schreiben wir diese vier Akkorde heraus und ersetzen die weniger übersichtlichen Brüche durch ganze Zahlen, die in demselben Verhältnisse stehen, so erhalten wir:

I. $1 : {}^5/_4 : {}^3/_2 = 4 : 5 : 6 = 16 : 20 : 24$ Durgrundakkord (Durdreiklang).

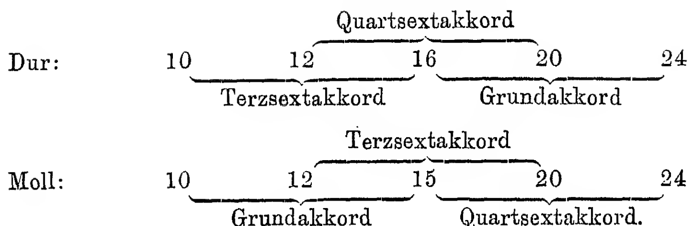
II. $1 : {}^6/_5 : {}^3/_2 = 10 : 12 : 15$ Mollgrundakkord (Molldreiklang).

III. $1 : {}^5/_4 : {}^5/_3 = 12 : 15 : 20$ Mollterzsextakkord (Mollsextakkord).

IV. $1 : {}^4/_3 : {}^5/_3 = 3 : 4 : 5 = 12 : 16 : 20$ Durquartsextakkord.

Um diese vier Akkorde und noch zwei andere, die aus ihnen durch „Umkehrung" hervorgehen, herzustellen, benötigt man aber nur zwei Reihen von Tönen, wie das folgende Schema zeigt:

[1]) Näheres hierüber in Werken über Geschichte der Musik, z. B. in jenem von A. W. Ambros.



Die beiden noch fehlenden Akkorde sind also:

V. $1 : {}^6/_5 : {}^8/_5 = 10 : 12 : 16$ Durterzsextakkord (Dursextakkord).

VI. $1 : {}^4/_3 : {}^8/_5 = 15 : 20 : 24$ Mollquartsextakkord.

Unter der Umkehrung eines Akkordes versteht man die Vertauschung des tiefsten Tones desselben mit seiner Oktave. Die etwas unkonsequente Bezeichnung ist aus Obigem zu entnehmen.

Die beiden Grundakkorde, welche als Dur- und Molldreiklang im engeren Sinne bezeichnet werden, bilden den Ausgangspunkt zur Entwickelung der beiden Tonleitern. Ihr charakteristischer Unterschied besteht in der Terz. Für Dur ist die große Terz ${}^5/_4$, für Moll die kleine Terz ${}^6/_5$ als zweiter Ton vorhanden.

Die Entwickelung der Durskala wäre nun nach Chladni so zu denken: Man setzt an den Durakkord oben und unten je zwei Töne an von solcher Höhe, daß sie mit ihrem Nachbarton nach unten und oben wiederum je einen Durakkord bilden; nämlich:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & {}^5/_4 & {}^3/_2 & & & \\ {}^2/_3 & {}^5/_6 & & & & & {}^{15}/_8 & {}^9/_4 \\ \hline {}^2/_3 & {}^5/_6 & 1 & {}^5/_4 & {}^3/_2 & {}^{15}/_8 & & {}^9/_4 \end{array}$$

(Der Ton 1 wird Tonica, ${}^3/_2$ die Oberquint oder Dominante, ${}^2/_3$ die Unterquint oder Subdominante genannt.) Aus dieser Kette dreier Durdreiklänge, von denen je zwei einen Ton gemeinsam haben, überträgt man alle Töne, welche außerhalb der Grenzen der Oktave 1 bis 2 liegen, nach entsprechender Verdoppelung bzw. Halbierung in die Oktave hinein. So erhält man die Durskala:

$$1 \quad {}^9/_8 \quad {}^5/_4 \quad {}^4/_3 \quad {}^3/_2 \quad {}^5/_3 \quad {}^{15}/_8 \quad 2.$$

Ähnlich entsteht die Mollskala nach folgendem Schma:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & {}^6/_5 & {}^3/_2 & & & \\ {}^2/_3 & {}^4/_5 & & & & {}^9/_5 & & {}^9/_4 \\ \hline {}^2/_3 & {}^4/_5 & 1 & {}^6/_5 & {}^3/_2 & {}^9/_5 & & {}^9/_4 \end{array}$$

$$1 \quad {}^9/_8 \quad {}^6/_5 \quad {}^4/_3 \quad {}^3/_2 \quad {}^8/_5 \quad {}^9/_5 \quad 2$$ [1]).

[1]) Die so theoretisch abgeleitete Mollskala wird in der praktischen Musik nur in absteigender Melodie verwendet. Als „harmonische" Mollskala ist dafür die folgende im Gebrauch:

$$1, \; {}^9/_8 \quad {}^6/_5 \quad {}^4/_3 \quad {}^3/_2 \quad {}^8/_5 \quad {}^{15}/_8 \quad 2,$$

in welcher der Ton ${}^9/_5$ durch ${}^{15}/_8$ ersetzt ist. Für aufsteigende Melodie wird auch noch ${}^8/_5$ durch ${}^5/_3$ ersetzt, so daß die Skala lautet:

$$1 \quad {}^9/_8 \quad {}^6/_5 \quad {}^4/_3 \quad {}^3/_2 \quad {}^5/_3 \quad {}^{15}/_8 \quad 2.$$

Sie besteht aus der unteren Hälfte der Mollskala und der oberen Hälfte der Durskala. Diese Abänderungen beruhen auf praktischen Gründen, deren Erörterung über den Rahmen unseres Buches hinausgehen würde.

Ist auch diese Entstehung der beiden Skalen vielleicht nicht historisch sicher gestellt, so ist sie doch sehr geeignet, begreiflich zu machen, daß dieselben den Anforderungen der harmonischen Musik sehr entsprechen, da sie aus Akkorden aufgebaut sind.

Das für die Mollskala charakteristische Intervall $^6/_5$ ist an der Grenze der Konsonanz und wurde in älterer Zeit nicht für zulässig gehalten. Gerade dieser Umstand ist für den musikalischen Charakter der Molltonarten von entscheidendem Einfluß. Nach Helmholtz [1]) ist der Charakter beider Systeme folgender: „Das Dursystem ist für alle fertigen in sich klaren Stimmungen gut geeignet, für kräftig entschlossene, wie sanfte oder süße, selbst für trauernde, wenn die Trauer in den Zustand schwärmerischer, weicher Sehnsucht übergegangen ist. Aber es paßt durchaus nicht für unklare, trübe, unfertige Stimmungen, oder für den Ausdruck des Unheimlichen, Wüsten, Rätselhaften oder Mystischen, des Rohen, der künstlerischen Schönheit Widerstrebenden, und gerade für solche brauchen wir das Mollsystem mit seinen verschleierten Wohlklängen, seiner veränderlichen Tonleiter, seinen leicht ausweichenden Modulationen und dem weniger deutlich ins Gehör fallenden Prinzip seines Baues [2])."

§ 220. Erweiterung der Tonleiter. Fassen wir nochmals die beiden auf S. 636 angeführten Tonleitern ins Auge, so sehen wir, daß die Intervalle je zweier aufeinander folgender Töne drei verschiedene Werte haben, nämlich:

$$^9/_8, \quad ^{10}/_9, \quad ^{16}/_{15}.$$

Nun ist

$$^{10}/_9 = {}^9/_8 \cdot {}^{80}/_{81}$$

und

$$^{16}/_{15} = {}^{10}/_9 \cdot {}^{24}/_{25} = {}^9/_8 \quad {}^{24}/_{25} \cdot {}^{80}/_{81}.$$

Man pflegt das Intervall $^9/_8$ einen „großen ganzen Ton" zu nennen; demnach wäre also beispielsweise der Ton *d* um einen großen ganzen Ton höher als *c*.

Das Intervall $^{10}/_9$ wird ein „kleiner ganzer Ton" genannt. Dieses Intervall unterscheidet sich von dem vorigen um $^{80}/_{81}$ oder um ein „Komma"; das Intervall $^{16}/_{15}$ wird ein „großer halber Ton", das Intervall $^{25}/_{24}$ ein „kleiner halber Ton" genannt.

Da $^{10}/_9 = {}^{16}/_{15} \cdot {}^{25}/_{24}$, so kann man sagen, das Intervall des kleinen ganzen Tones kann in zwei Intervalle zerlegt werden, wovon das eine der große halbe, das andere der kleine halbe Ton ist.

Diese Bezeichnungsweise ist zwar nicht glücklich gewählt, einmal, weil sie zu der unrichtigen Vorstellung verleiten kann, daß die sogenannten halben Töne wirklich halb so große Tonstufen vorstellen als die ganzen Töne, sowie auch, weil sie zwei verschiedene Einheiten für den „ganzen Ton" annimmt; da jedoch diese Bezeichnung oft gebraucht wird, mußten wir sie hier auch mitteilen. Es folgen also in den beiden gebräuchlichen Tonleitern die ein-

---

[1]) Lehre von den Tonempfindungen, S. 489.

[2]) Eine eigenartige Auffassung des Charakters beider Tonarten, sowie ihres Verhältnisses zueinander ist von A. v. Oettingen in seinem Buche „Harmoniesystem in dualer Entwickelung" entwickelt worden. Danach wäre das Mollsystem gewissermaßen als Spiegelbild des Dursystems aufzufassen.

zelnen Töne in wechselnden Intervallen von großen ganzen, kleinen ganzen und großen halben Tönen. Diese Ungleichheit der Tonstufen führt zu gewissen Konsequenzen, die wir jetzt erläutern wollen.

Will man, von irgend einem willkürlich gewählten Tone ausgehend, eine beliebige Melodie hervorbringen, so hat dies keine Schwierigkeit, falls man mit einem musikalischen Instrument versehen ist, welches, wie die menschliche Stimme oder die Violine, innerhalb seines Tonumfanges Töne jeder beliebigen Schwingungszahl hervorzurufen gestattet. Nicht so bei den übrigen Instrumenten, welche nur eine beschränkte Anzahl von Tönen vorausbestimmter Tonhöhe zu entwickeln gestatten, wie z. B. die Orgel, das Klavier, die Guitarre, die Zither sind. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern. Die allbekannte Melodie zu dem Anfang des Liedes „Was ist des Deutschen Vaterland?“ besteht aus folgender Tonreihe (wobei von der Bezeichnung des Rhythmus abgesehen wird):

Was	ist	des	Deut -	schen	Va -	ter -	land?	
c	*d*	*e*	*f*	*c*	*a*	*g*	*f*	
1	$^9/_8$	$^5/_4$	$^4/_3$	1	$^5/_3$	$^3/_2$	$^4/_3$	. . . . (1)

Diese Melodie kann also auf jedem Instrumente gespielt werden, welches die Durtonleiter enthält, wenn man nur mit dem für *c* bestimmten Tone beginnt. Es würden z. B. die weißen (Unter-)Tasten des Klaviers, welche die Reihe der Durskala enthalten, dazu ausreichen, falls man mit der Taste für *c* beginnt.

Wollte man nun aber die ganze Melodie um eine Quinte höher spielen, also die Schwingungszahlen sämtlicher Töne im Verhältnis von 2 auf 3 vergrößern, so wäre eine Reihe von Tönen erforderlich, die aus obiger durch Multiplikation mit $^3/_2$ hervorgeht.

Diese wäre:

$^3/_2$	$^{27}/_{16}$	$^{15}/_8$	2	$^3/_2$	$^5/_2$	$^9/_4$	2	. . . . (2)
g		*h*	*c'*	*g*	*e'*	*d'*	*c'*	

Wie man sieht, sind mit e i n e r Ausnahme alle erforderlichen Töne in der Durtonleiter vorhanden, wenn man die nächst höhere Oktave, deren Töne wir mit *c' d' e'* . . . bezeichnen, zu Hilfe nimmt. Man könnte also alle erforderlichen Töne auf den weißen Tasten des Klaviers finden, indem man mit der Taste für *g* beginnt, nur den zweiten nicht, dessen Höhe $^{27}/_{16}$ in der Durtonleiter nicht vorkommt. Nun ist aber $^{27}/_{16} = {}^5/_3 \cdot {}^{81}/_{80}$; der Ton $^{27}/_{16}$ unterscheidet sich also von dem Tone $^5/_3$, das ist von dem *a* der Durskala nur um das Intervall $^{81}/_{80}$, also um ein Komma, von dem man behauptet, daß es für das Gehör der meisten Menschen als unmerkbar klein nicht in Betracht komme. Lassen wir uns diese Vernachlässigung gefallen, so können wir obige Melodie um eine Quinte höher mittels der Töne

g (*a*) *h* *c'* *g* *e'* *d'* *c'*

wiedergeben.

Wollten wir aber z. B. statt um eine Quinte nur um eine Terz in die Höhe gehen, also die Melodie von der Taste für *e* anfangend spielen, so würden wir selbst mit der Vernachlässigung eines Komma mit den Tönen der Durskala nicht ausreichen, also auf den weißen Tasten des Klaviers die

Melodie nicht unverändert spielen können. Denn multiplizieren wir die Reihe (1) mit $^5/_4$, so erhalten wir die Tonhöhen:

$^5/_4$	$^{45}/_{32}$	$^{25}/_{16}$	$^5/_3$	$^5/_4$	$^{25}/_{12}$	$^{15}/_8$	$^5/_3$
c			*a*	*e*		*h*	*a*

Von diesen Tönen sind aber nur die mit den Buchstaben *c*, *a*, *ė*, *h*, *a* bezeichneten vorhanden. Wir brauchen also drei neue Töne, zu deren Herstellung die schwarzen (Ober-) Tasten des Klaviers bestimmt sind.

Wir wollen nun aber diese Aufgabe allgemein lösen, nämlich alle Töne berechnen, welche wir brauchen, um irgend eine beliebige, im Dursystem komponierte Melodie von jedem der sieben Töne der Skala aus spielen zu können. Wir erhalten die neuen Tonreihen, indem wir die Zahlen der ursprünglichen der Reihe nach mit $^9/_8$, $^5/_4$, $^4/_3$ . . . bis $^{15}/_8$ multiplizieren. Die nachfolgende Tabelle enthält die Resultate dieser Rechnung; die neuen, rechteckig eingerahmten Tonreihen sind so untereinander gestellt, daß die gleich hohen Töne senkrecht untereinander liegen. Die über die ursprüngliche Oktave hinaus erhöhten Töne sind nach Halbierung in die entsprechende Stelle dieser Oktave eingesetzt. Die Buchstaben der ersten Kolumne geben den Ton an, von welchem jede neue Skala ausgeht.

Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Durskala.

	c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c'*	*d'*	*e'*	*f'*	*g'*	*a'*
c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$						
d	$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$					
e	$\frac{25}{24}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{75}{32}$				
f	1	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$			
g	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$		
a	$\frac{25}{24}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{25}{8}$	
h	$\frac{135}{128}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{225}{64}$

Bevor wir die Resultate dieser Tabelle der Besprechung unterziehen, wollen wir noch berechnen, welche Töne wir benötigen, um auch nach dem Mollsystem von den sieben ursprünglichen Tönen aus die Skala reproduzieren zu können. Die Tabelle enthält die Resultate dieser Rechnung; sie ist ganz analog der obigen für das Dursystem abgeleiteten Tabelle ausgeführt.

Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Mollskala.

	c	*d*	*es*	*f*	*g*	*as*	*b*	*c'*	*d'*	*es'*	*f'*	*g'*	*as'*
c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$						
d	$\frac{81}{80}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{81}{40}$					
es	$\frac{24}{25}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{54}{25}$				
f	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{32}{15}$	$\frac{12}{5}$			
g	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{10}$		
as	$\frac{24}{25}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{32}{15}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{64}{25}$	$\frac{72}{25}$	
b	$\frac{81}{80}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{81}{50}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{81}{40}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{72}{25}$	$\frac{81}{25}$

Sämtliche auf diese Weise zur Ergänzung der Dur- und Mollskala benötigten Töne sind nun in der folgenden Tabelle der Tonhöhe nach geordnet zusammengestellt.

Diese Tabelle enthält in der ersten Kolumne angegeben, ob der betreffende Ton durch die Erweiterung der Dur- oder der Mollskala oder beider benötigt wird; dann folgt die Vertikalreihe der in den vorigen beiden Tabellen erhaltenen relativen Schwingungszahlen in Bruchform. Die nächste Vertikalreihe enthält dieselben Werte zerlegt in Faktoren, aus denen man die Verhältnisse erkennt, in welchen die neuen Töne zu den ursprünglichen stehen. Man sieht, daß unter diesen Faktoren außer den ursprünglichen Intervallen der Durtonleiter

$$1,\ ^9/_8,\ ^5/_4,\ ^4/_3,\ ^3/_2,\ ^5/_3,\ ^{15}/_8,\ 2$$

nur noch das Intervall des sogenannten kleinen halben Tones $^{25}/_{24}$ und des Komma $^{81}/_{80}$ neben deren Reziproken vorkommen. Die übrigen Bestandteile der Tabelle sollen im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Tonsystem	Relative Schwingungszahlen	und deren Zerlegung in Intervalle	Bezeichnung	Relative Schwingungszahlen in Dezimalbrüchen: bei reiner Stimmung	bei gleichschwebend temperierter Stimmung
Dur, Moll	1	= 1 ········	**c**	1,00000	1,00000
Moll	$\frac{81}{80}$	= 1 · $\frac{81}{80}$ ····			
Dur	$\frac{25}{24}$	= 1 · $\frac{25}{24}$ ····	♯ c = cis	1,04166	
Dur	$\frac{135}{128}$	= 1 · $\frac{25}{24}$ · $\frac{81}{80}$			1,05946
Moll	$\frac{16}{15}$	= $\frac{9}{8}$ · $\frac{24}{25}$ · $\frac{80}{81}$			
Moll	$\frac{27}{25}$	= $\frac{9}{8}$ · $\frac{24}{25}$ ····	♭ d = des	1,08000	
Dur	$\frac{10}{9}$	= $\frac{9}{8}$ · $\frac{80}{80}$ ····			
Dur, Moll	$\frac{9}{8}$	= $\frac{9}{8}$ ········	**d**	1,12500	1,12246
Dur	$\frac{75}{64}$	= $\frac{9}{8}$ · $\frac{25}{24}$ ····	♯ d = dis	1,17187	1,18921
Moll	$\frac{6}{5}$	= $\frac{5}{4}$ · $\frac{24}{25}$ ····	♭ e = es	1,20000	
Dur	$\frac{5}{4}$	= $\frac{5}{4}$ ········	**e**	1,25000	
Dur, Moll	$\frac{81}{64}$	= $\frac{5}{4}$ · $\frac{81}{80}$ ····			1,25992
Moll	$\frac{32}{25}$	= $\frac{4}{3}$ · $\frac{24}{25}$ ····	♭ f = fes	1,28000	
**	$\frac{125}{96}$	= $\frac{5}{4}$ · $\frac{25}{24}$ ····	♯ e = eis	1,30208	1,33484
Dur, Moll	$\frac{4}{3}$	= $\frac{4}{3}$ ········	**f**	1,33333	
Moll	$\frac{27}{20}$	= $\frac{4}{3}$ · $\frac{81}{80}$ ····			
Dur	$\frac{25}{18}$	= $\frac{4}{3}$ · $\frac{25}{24}$ ····	♯ f = fis	1,38889	
Dur	$\frac{45}{32}$	= $\frac{4}{3}$ · $\frac{25}{24}$ · $\frac{81}{80}$			1,41421
Moll	$\frac{36}{25}$	= $\frac{3}{2}$ · $\frac{24}{25}$ ····	♭ g = ges	1,44000	
Dur, Moll	$\frac{3}{2}$	= $\frac{3}{2}$ ········	**g**	1,50000	1,49831
Dur	$\frac{25}{16}$	= $\frac{3}{2}$ · $\frac{25}{24}$ ····	♯ g = gis	1,56250	1,58740
Moll	$\frac{8}{5}$	= $\frac{5}{3}$ · $\frac{24}{25}$ ····	♭ a = as	1,60000	
Moll	$\frac{81}{50}$	= $\frac{5}{3}$ · $\frac{24}{25}$ · $\frac{81}{80}$			
Dur	$\frac{5}{3}$	= $\frac{5}{3}$ ········	**a**	1,66667	1,68179
Dur, Moll	$\frac{27}{16}$	= $\frac{5}{3}$ · $\frac{81}{80}$ ····			
*	$\frac{125}{72}$	= $\frac{5}{3}$ · $\frac{25}{24}$ ····	♯ a = ais	1,73611	
Dur	$\frac{225}{128}$	= $\frac{5}{3}$ · $\frac{25}{24}$ · $\frac{81}{80}$			1,78180
Moll	$\frac{9}{5}$	= $\frac{15}{8}$ · $\frac{24}{25}$ ····	**b**	1,80000	
Dur, Moll	$\frac{16}{9}$	= $\frac{15}{8}$ · $\frac{24}{25}$ · $\frac{81}{80}$			
Dur	$\frac{15}{8}$	= $\frac{15}{8}$ ········	**h**	1,87500	1,88775
Moll	$\frac{48}{25}$	= 2 · $\frac{24}{25}$ ····	♭ c = ces	1,92000	
**	$\frac{125}{64}$	= $\frac{15}{8}$ · $\frac{25}{24}$ ····	♯ h = his	1,95313	2,00000
Dur, Moll	2	= 2 ········	**c′**	2,00000	

§ 221. Reduktion der Tonleiter, Temperatur, chromatische Skala. Die Beibehaltung der sämtlichen 30 Töne innerhalb der Oktave, auf welche wir im vorigen Paragraphen geführt wurden, scheitert an der Schwierigkeit, welche die Herstellung und Handhabung solcher musikalischer Intrumente bereiten würde, auf welchen eine solche Anzahl vorausgebildeter Töne vorhanden wäre [1]). Die menschliche Stimme und die Violine würden also keine Reduktion der Tonleiter erfordern, wohl aber z. B. die Orgel, das Klavier, die Harfe usw.

Die praktische Musik erlaubt sich daher nachfolgende Vereinfachungen. Die erste besteht darin, daß man das Komma vernachlässigt. Man setzt also z. B. für den Ton $^{81}/_{80}$ den Ton 1, für $1 \cdot {}^{25}/_{24} \cdot {}^{81}/_{80}$ den Ton $1 \cdot {}^{25}/_{24}$ usf. Die Töne, welche so an Stelle der mit Komma behafteten treten, sind mit einer Ausnahme sämtlich zuvor vorhanden; nur der Ton $^{5}/_{3} \cdot {}^{25}/_{24}$ fehlt und wird daher der Konsequenz wegen eingeschaltet. (In der Tabelle mit * bezeichnet.) Die Tabelle enthält dann noch folgende Kategorien von Tönen: Erstens die ursprünglichen Töne der Durskala, welche mit den Buchstaben *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*, *c'* bezeichnet werden, dann Töne, welche aus diesen durch Erhöhung um das Intervall $^{25}/_{24}$ entstehen und mit den Bezeichnungen ♯ *c* = *cis*, ♯ *d* = *dis*, ♯ *f* = *fis* usw. versehen werden, endlich Töne, welche aus den ursprünglichen durch Vertiefung um das Intervall $^{24}/_{25}$ entstehen; diese werden durch die Bezeichnungen ♭ *d* = *des*, ♭ *e* = *es*, ♭ *f* = *fes* usw. unterschieden. Die Töne $^{5}/_{4} \cdot {}^{25}/_{24}$ = ♯ *e* = *eis* und $^{15}/_{8} \cdot {}^{25}/_{24}$ ♯ *h* = *his* (in der Tabelle mit ** bezeichnet) werden durch obige Ableitung nicht erhalten, sind daher nachträglich eingefügt, um das System der um den Halbton erhöhten und vertieften Haupttöne konsequent zu ergänzen.

Übersichtlich zusammengestellt sind hiernach folgende Töne vorhanden:

Vertiefte Töne	Ursprüngliche Töne der Durskala	Erhöhte Töne
(♭ c = ces)	c	♯ c = cis
♭ d = des	d	♯ d = dis
♭ e = es	e	♯ e = eis
♭ f = fes	f	♯ f = fis
♭ g = ges	g	♯ g = gis
♭ a = as	a	♯ a = ais
♭ h = b	h	♯ h = his
♭ c' = ces'	c'	(♯ c' = cis')

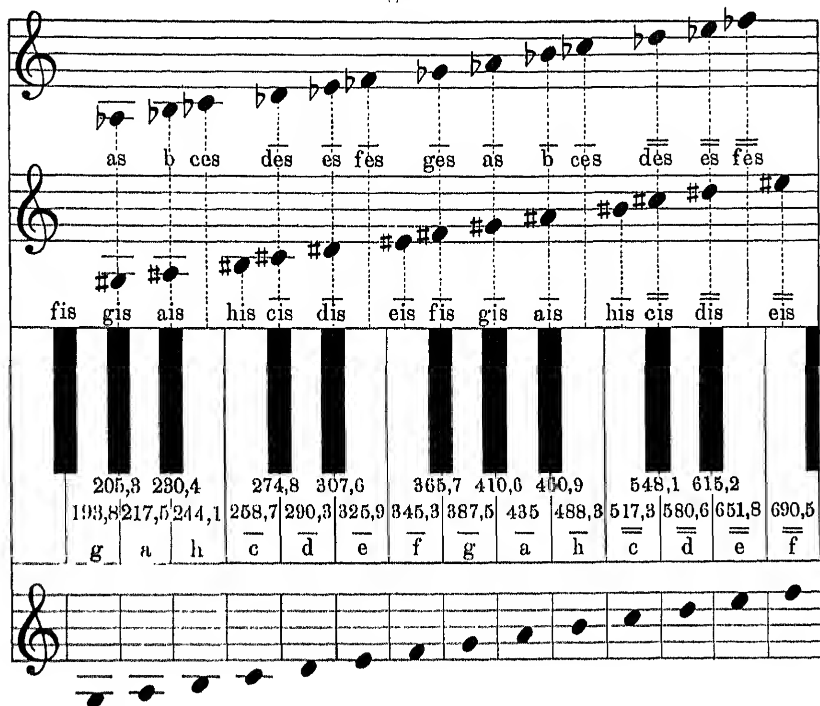
Von diesen Tönen fallen *ces* und *cis'* außerhalb der Oktave. Bezüglich der inkonsequenten Bezeichnung *b* statt *hes* gibt die Anmerkung 2) S. 634 Aufschluß. Die Töne *fes* und *eis*, sowie *ces'* und *his* greifen übereinander, d. h. das um den kleinen Halbton erhöhte *e* (bzw. *h*) ist höher als das ebenso viel vertiefte *f* (bzw. *c'*).

[1]) Vorschläge hierfür sind mehrfach (von Helmholtz, Appun u. a.) gemacht und im einzelnen auch mit Erfolg ausgeführt worden.

Inklusive der Oktave besteht demnach das so reduzierte Tonsystem aus 22 Tönen per Oktave, welche hinreichen würden, um, zwar nicht rein, aber doch mit keiner größeren Ungenauigkeit, als die Vernachlässigung eines Komma mit sich bringt, alle Melodien von jedem Tone der Dur- oder Mollskala anfangend spielen zu können.

Aber auch die Zahl von 22 Tönen erschien noch zu groß. Eine weitere ergiebige Reduktion auf nur 13 Töne (inkl. der Oktave) wurde dadurch erzielt, daß man die mehrfachen zwischen den ursprünglichen ganzen Tönen eingeschalteten Zwischentöne durch je einen ersetzte. Demgemäß wird an den betreffenden musikalischen Instrumenten für *cis* und *des*, *dis* und *es*, *e*

Fig. 665.



und *fes*, *eis* und *f*, *fis* und *ges*, *gis* und *as*, *ais* und *b*, *h* und *ces*, *his* und *c'* nur je ein Ton mittlerer Höhe substituiert. Die dadurch entstehenden Unreinheiten der Stimmung werden entweder zugunsten der Quinten auf die anderen Intervalle geschoben (ungleichschwebende Temperatur) oder es werden sämtliche 12 Intervalle der Oktave einander völlig gleich gemacht. (Gleichschwebende Temperatur.) Die Größe eines solchen Intervalles ergibt sich aus der Gleichung

$$i = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946.$$

Die hieraus berechneten relativen Schwingungszahlen bei letzterer Stimmung sind in der letzten Vertikalreihe der Tabelle auf S. 641 aufgeführt und gestatten durch ihre Vergleichung mit den daneben stehenden Zahlen der reinen Stimmung ein Urteil über die Größe ihrer Abweichungen.

Die aus 12 gleichen Intervallen von je einem halben Tone zusammengesetzte Skala wird die chromatische Tonleiter genannt.

Indem wir hier unsere allerdings sehr lückenhaften Mitteilungen über die Tonleitern schließen, fügen wir noch zur Bequemlichkeit derjenigen Leser, welche nicht Musiker von Fach sind, die Bezeichnung der Töne durch die Notenschrift und die Schwingungszahlen und eine schematische Zeichnung der Klaviatur bei, welche das Auffinden der Töne bei Versuchen an Klavier oder Orgel erleichtern soll [1]).

§ 222. Absolute Schwingungszahlen der Töne. Nach Gleichung (1), § 203 ist

$$n = \frac{C}{\lambda},$$

d. h. wir finden die Schwingungszahl eines Tones, indem wir seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch seine Wellenlänge (in demselben Medium) dividieren.

Für Luft ist, wie wir im § 202 erfahren haben (nach Régnault), $C = 330{,}7$, folglich

$$n = \frac{330{,}7}{\lambda},$$

die Wellenlänge eines Tones in der Luft ist aber nach § 212 gleich der vierfachen Länge einer gedeckten Pfeife, welche ihn (als ihren Grundton) gibt.

Der tiefste Ton, welcher in der Musik zur Anwendung kommt, ist der Grundton einer gedeckten 5,17 m (ungefähr 16 Fuß) langen Orgelpfeife. Für diesen Ton ist also $\lambda = 20{,}68$ m, also seine Schwingungszahl

$$n = \frac{330{,}7}{20{,}68} = 16.$$

Dieser tiefste Ton einer früher als sechzehnfüßig bezeichneten gedeckten Pfeife wird mit $\underline{\underline{C}}$ oder zweckmäßiger (nach Sondhaus) mit c^{-3} bezeichnet. Demgemäß entsprechen den höheren Oktaven die folgenden Bezeichnungen und Schwingungszahlen

Das Subkontra $C = c^{-3}$	. . . .	hat	16	Schwingungen	per	Sekunde
„ Kontra $C = c^{-2}$	. . . .	„	32	„	„	„
„ große $C = c^{-1}$	. . . .	„	64	„	„	„
„ kleine $C = c^{0}$	. . . .	„	128	„	„	„
„ eingestrichene $C = c^{1}$	. . . . .	„	256	„	„	„
„ zweigestrichene $C = c^{2}$	. . . .	„	512	„	„	„ usf.

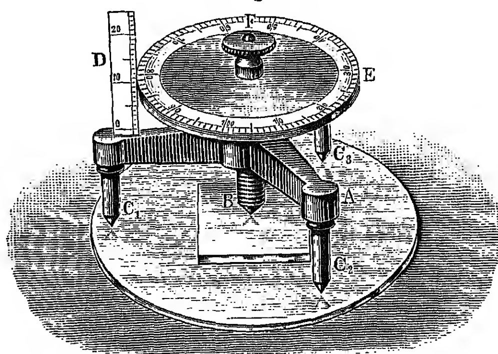
Die hier angegebenen, nach den Potenzen von zwei fortschreitenden Tonhöhen sind von Sauveur vorgeschlagen und von Chladni adoptiert worden. Nach der hier angenommenen Sondhausschen Bezeichnung erhält man die absolute Schwingungszahl irgend eines Tones, indem man sich zu

---

[1]) Ausführlicheres in dem oben zitierten Werke von Helmholtz und anderen musiktheoretischen Werken.

§ 19. Sphärometer, Fühlhebelkomparator. Das Sphärometer ha seinen Namen deshalb erhalten, weil es hauptsächlich zur Ermittelung de Krümmungsradien sphärischer Flächen bestimmt ist, auch wenn nur ein be schränkter Teil der Kugeloberfläche, wie z. B. bei sphärischen Linsen, gegebe ist. Es kann aber auch ebenso zur genauen Dickenmessung von Platte benutzt werden. Fig. 53 stellt ein solches Sphärometer dar. Dasselbe be steht aus einem messingenen Dreifußgestell A mit drei in Stahlspitzen au laufenden Füßen C_1, C_2, C_3. Durch die Mitte von A geht eine vertika Stahlschraube B, die unte auch in einer Spitze endi und am oberen Ende eine a Rande in 100 Teile geteil Kreisscheibe E trägt. Gege den Rand der letzteren stö die scharfe Kante des vo einem Dreifußarm getragene Lineals D, an dem man d Kreisteilung ablesen kan während die Teilung auf der Schraubenganghöhe, s sei = 1 mm, entspricht un somit durch das Fortrücke

Fig. 53.



der Kreisscheibe an ihr die ganzen Umdrehungen der Schraube angib Stellt man das Sphärometer auf eine plane Glasplatte, wie dies die Figu andeutet, so soll, wenn die Schraubenspitze die Platte ebenfalls leicht be rührt, die Ablesung der Kreisscheibe am Lineal D Null sein und ihr Ran zugleich auf den Nullpunkt der Linealteilung weisen. Legt man nun nac Zurückschrauben von B mittels des Kopfes F den Körper, also etwa ei Platte, wie die Figur anzeigt, auf die Fußglasplatte unter die Spitze und sen diese durch Drehung wieder bis zur leisen Berührung mit dem Körper, kann man unmittelbar die Dicke an D in ganzen Millimetern und an d Kreisscheibe die Bruchteile derselben bis zu 0,01 mm genau ablesen, ja, wen die Kreisscheibe groß genug ist, um noch 0,1 ihrer Hundertteilung beque schätzen zu können, so kann die Messung bis zu 1 μ erfolgen.

In Wirklichkeit kann aber die Genauigkeit der Messung mit dem Sphär meter in seiner vorstehenden einfachen Gestalt nicht so weit getrieben werde weil die Kraft, mit welcher die Schraubenspitze auf die Fußplatte und nac her auf den Gegenstand aufdrückt, unbestimmbar und daher variabel i was man leicht daraus erkennt, daß wiederholte Messungen derselben Dic weit über obige Grenzen hinausgehende Verschiedenheiten der Resultate au weisen. Perreaux suchte diesem Übelstande dadurch zu begegnen, daß die Schraube ihrer ganzen Länge nach durchbohrte und die untere Spit eines in die Bohrung eingesetzten Stahlstiftes zur Messung benutzte. Dies Stift dreht sich wegen einer in eine Rinne der Bohrung eingreifenden Na mit der Schraube, kann aber in ihr auf und ab gleiten; am oberen Ende d Schraube drückt er ebenfalls mit einer Spitze auf den kurzen Arm ein Fühlhebels, dessen Achse am Kopf F der Schraube befestigt ist, und dess langer Arm auf einen Gradbogen weist, während eine auf ihn wirkende Fed mit dem kurzen Arm den Stift bis zu einem Anschlag in der Schraube

dem Exponenten die Basis 2 denkt und für den Namen des Tones seine Schwingungszahl aus der kleinen Oktave setzt.

So z. B. ist

$$c^3 = c \,.\, 2^3 = 128 \,.\, 8 = 1024,$$

ebenso findet man

$$a^1 = a \,.\, 2^1 = {}^5/_3 \,.\, c \,.\, 2 = {}^5/_3 \,.\, 128 \,.\, 2 = 426{}^2/_3.$$

Man nennt diese Stimmung auch wohl die physikalische. Sie bietet für die Berechnung manche Bequemlichkeit. Nach dieser Stimmung berechnet sich für das sogenannte Stimmgabel-a der eingestrichenen Oktave, also a^1, wie eben gezeigt wurde, die Schwingungszahl

$$256 \cdot \frac{5}{3} = 426{}^2/_3.$$

Die von Scheibler vorgeschlagene und auf der deutschen Naturforscherversammlung zu Stuttgart 1834 angenommene deutsche Stimmung normierte für a^1 die Schwingungszahl 440, der ein $c^1 = 264$ entsprechen würde. Die französische Stimmung, durch ein Dekret vom 16. Februar 1859 gesetzlich eingeführt, normiert für das temperierte a^1 die Schwingungszahl 435 [1]). Da für dieses die relative Schwingungszahl (S. 641) = 1,68179 beträgt, so ergibt sich hieraus

$$\text{für } c^1 \text{ der Wert } \frac{435}{1{,}68179} = 258{,}652,$$

$$\text{für } c^{-2} \text{ der Wert } 32{,}331.$$

Diese französische Stimmung ist am 18. November 1885 von der in Wien tagenden internationalen Stimmtonkonferenz einhellig angenommen worden.

Wir fügen hier noch zwei Tabellen bei, welche oft bequem zu gebrauchen sind (s. S. 646 und 647).

Die erste gibt die absoluten Schwingungszahlen sämtlicher Töne der Durskala nach der physikalischen Stimmung, also für $c^1 = 256$, sowie der Wellenlängen dieser Töne in Luft von 15° C, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit = 340 m angenommen wurde. Dabei sind die Schwingungszahlen, wie in Deutschland üblich, als Doppelschwingungen, die Wellenlängen ebenfalls als vollständig (Verdichtung und Verdünnung umfassend) angenommen.

Die zweite Tabelle enthält die absoluten Schwingungszahlen der temperierten chromatischen Tonleiter nach der internationalen Stimmung $a^1 = 435$ Doppelschwingungen. Dieses sind also die in der praktischen Musik geltenden Schwingungszahlen [2]).

---

[1]) Die gesetzlich normierte Zahl lautet 870, weil in Frankreich nach einfachen Schwingungen, wie beim Pendel, gerechnet wird.

[2]) Beim Singen und beim Violinspielen, wo alle Tonhöhen zur Verfügung stehen, bedient man sich der reinen Stimmung, da die temperierte nur jenen Instrumenten angepaßt ist, welche vorgebildete Töne haben, wie Klavier, Orgel usw.

Tabelle

der absoluten Schwingungszahlen der reinen Durskala nach der physikalischen Stimmung (Sauveur-Chladni) gegründet auf $c^1 = 256 = 2^8$ Doppelschwingungen; sowie der Wellenlängen in Luft von 15° C unter Annahme einer Schallgeschwindigkeit = 340 m.

Bezeichnung der französischen und italienischen Musiker	Bezeichnung der deutschen und englischen Musiker	nach Sondhaus	C Ut (Do)	D Ré	E Mi	F Fa	G Sol	A La	H Si
ut_{-2} — si_{-2}	$\underline{\underline{C}}$ — $\underline{\underline{H}}$	c^{-3} — h^{-3}	16	18	20	$21^1/_3$	24	$26^2/_3$	30
			21,250	18,889	17,000	15,938	14,167	12,750	11,333
ut_{-1} — si_{-1}	$\underline{C}$ — $\underline{H}$	c^{-2} — h^{-2}	32	36	40	$42^2/_3$	48	$53^1/_3$	60
			10,625	9,444	8,500	7,969	7,083	6,375	5,667
ut_1 — si_1	C — H	c^{-1} — h^{-1}	64	72	80	$85^1/_3$	96	$106^2/_3$	120
			5,312	4,722	4,250	3,984	3,541	3,187	2,833
ut_2 — si_2	c — h	c^0 — h^0	128	144	160	$170^2/_3$	192	$213^1/_3$	240
			2,656	2,361	2,125	1,992	1,770	1,593	1,416
ut_3 — si_3	$\overline{c}$ — $\overline{h}$	c^1 — h^1	256	288	320	$341^1/_3$	384	$426^2/_3$	480
			1,328	1,180	1,062	0,996	0,885	0,796	0,708
ut_4 — si_4	$\overline{\overline{c}}$ — $\overline{\overline{h}}$	c^2 — h^2	512	576	640	$682^2/_3$	768	$853^1/_3$	960
			0,664	0,590	0,531	0,498	0,442	0,398	0,354
ut_5 — si_5	$\overline{\overline{\overline{c}}}$ — $\overline{\overline{\overline{h}}}$	c^3 — h^3	1024	1152	1280	$1365^1/_3$	1536	$1706^2/_3$	1920
			0,332	0,295	0,265	0,249	0,221	0,199	0,177
ut_6 — si_6	$\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}$ — $\overline{\overline{\overline{\overline{h}}}}$	c^4 — h^4	2048	2304	2560	$2730^2/_3$	3072	$3413^1/_3$	3840
			0,166	0,147	0,132	0,124	0,110	0,100	0,088

Tabelle

der

absoluten Schwingungszahlen nach der internationalen temperierten Stimmung, gegründet auf $a^1 = 435$ Doppelschwingungen (870 einfache Schwingungen).

Bezeichnung der Musiker: französischen und italienischen	deutschen u. englischen	nach Sondhaus	C [1]) Ut (Do)	Cis	D Ré	Dis	E Mi	F Fa	Fis	G Sol	Gis	A La	Ais	H Si
$ut_{-2} - si_{-2}$	$\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{H}}$	$c^{-3} - h^{-3}$	16,165	17,127	18,145	19,225	20,368	21,579	22,862	24,221	25,662	27,188	28,804	30,517
$ut_{-1} - si_{-1}$	$\underline{C} - \underline{H}$	$c^{-2} - h^{-2}$	32,331	34,254	36,290	38,449	40,735	43,157	45,723	48,442	51,323	54,375	57,600	61,033
$ut_1 - si_1$	$C - H$	$c^{-1} - h^{-1}$	64,663	68,508	72,581	76,898	81,470	86,314	91,447	96,885	102,646	108,750	115,216	122,067
$ut_2 - si_2$	$c - h$	$c^0 - h^0$	129,326	137,016	145,163	153,796	162,940	172,629	182,895	193,770	205,292	217,500	230,433	244,135
$ut_3 - si_3$	$\overline{c} - \overline{h}$	$c^1 - h^1$	258,652	274,033	290,327	307,592	325,881	345,259	365,730	387,541	410,585	435	460,866	488,271
$ut_4 - si_4$	$\overline{\overline{c}} - \overline{\overline{h}}$	$c^2 - h^2$	517,305	548,066	580,655	615,183	651,763	690,519	731,580	775,082	821,171	870	921,733	976,542
$ut_5 - si_5$	$\overline{\overline{\overline{c}}} - \overline{\overline{\overline{h}}}$	$c^3 - h^3$	1034,610	1096,132	1161,310	1230.366	1303,526	1381,038	1463,160	1550,164	1642,342	1740	1843,466	1953,084
$ut_6 - si_6$	$\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}} - \overline{\overline{\overline{\overline{h}}}}$	$c^4 - h^4$	2069,220	2192,264	2322,620	2460,732	2607,052	2762,076	2926,320	3100,328	3284,684	3480	3686,932	3906,168

[1]) Französische und italienische Bezeichnung; beim Singen wird statt Ut, Do gesetzt.

§ 223. Die Stimmgabel. Um einen Ton von bestimmter Höhe zu jeder Zeit reproduzieren zu können, denselben also gewissermaßen aufzubewahren, um danach musikalische Instrumente zu stimmen oder die Tonhöhe für die menschliche Stimme anzugeben, bedient man sich der Stimmgabel, und zwar insbesondere der auf a^1 gestimmten Normalstimmgabel von 435 Schwingungen (870 einfachen Schwingungen). Außerdem dient die Stimmgabel zu zahlreichen akustischen Experimenten und ist daher ein wichtiges Hilfsmittel der Experimentalphysik geworden, weshalb wir die Eigenschaften und die Behandlung derselben näher kennen lernen müssen.

Die Stimmgabel wird durch einen gabelförmig gebogenen Metallstab (meist ist sie aus Stahl verfertigt) gebildet, an welchen an der Biegungsstelle ein zum Halten dienendes Metallstäbchen angesetzt ist. Fig. 666 erläutert

Fig. 666.

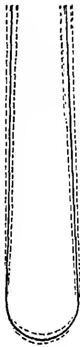
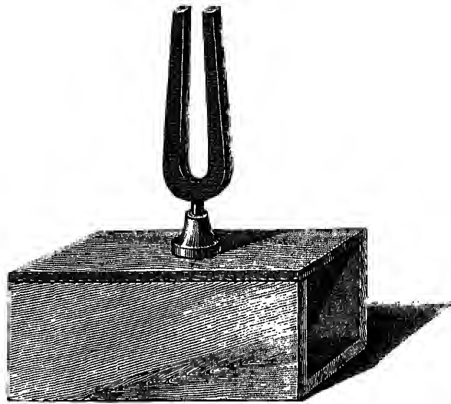


Fig. 667.



die Art und Weise, wie die Stimmgabel schwingt, wenn sie ihren Grundton gibt.

Während die beiden Zinken gleichzeitig nach außen schwingen, geht der tiefste Punkt ein wenig nach oben; während sich die Zinken nähern, geht der tiefste Punkt nach unten. Der Stiel der Stimmgabel wird demnach in Längsschwingungen versetzt, was man direkt fühlt, wenn man ihn in der Hand hält. Noch deutlicher wird dies wahrgenommen, wenn man den Stiel der schwingenden Gabel ganz lose auf eine Tischplatte aufstützt, wobei durch den rhythmischen Anstoß ein Ton entsteht. Stemmt man den Gabelstiel fest auf die Tischplatte, so wird der Gabelton sehr viel stärker gehört, da er durch die große Fläche der Tischplatte in die Luft übergeführt wird. An zwei Stellen bleibt die Gabel, wie aus Fig. 666 ersichtlich, in Ruhe, dort hat sie also Knotenpunkte.

Um die Stimmgabel ins Tönen zu bringen, faßt man gewöhnlich den Stiel zwischen zwei Finger und schlägt dann eine der Zinken gegen einen festen Körper an. Der Ton, welcher auf diese Weise hervorgebracht wird, ist ungemein schwach; um ihn zu verstärken, setzt man die Stimmgabel mit ihrem Fuße auf einen Resonanzboden auf oder man hält sie über eine Röhre von entsprechender Länge, wie dies bereits im § 212 erwähnt wurde.

Um den Ton der Stimmgabel rein und kräftig zu erhalten, hat Marloye dieselbe auf ein Kästchen von Holz gesetzt, wie man Fig. 667 sieht. Die

Länge dieses nur an einer Seite offenen Kästchens beträgt nahe $^1/_4$ von er Wellenlänge des Tones, welchen die Stimmgabel gibt, so daß also die Vibrationen der in dem Kästchen eingeschlossenen Luftsäule denselben Ton rzeugen wie die Stimmgabel selbst. Die Vibrationen der Stimmgabel teilen sich deshalb leicht der Luftsäule im Kästchen mit, wodurch dann ein ungemein kräftiger und reiner Ton entsteht.

Um die Stimmgabel dieses Apparates ins Tönen zu bringen, schlägt man ie entweder mit einem belederten hölzernen Hämmerchen an, oder man zieht zwischen den freien Enden der Gabel einen hölzernen Stab durch, dessen Dicke etwas größer ist als der Abstand der Zinken, oder endlich, man streicht die Stimmgabel mit dem Fiedelbogen an.

Soll das Kästchen möglichst gute Resonanz geben, so muß nicht allein die darin enthaltene Luftsäule, sondern auch das Holz auf den Gabelton abestimmt sein. Um dies zu prüfen, füllt man das Kästchen mit Baumwolle us, wodurch die Luft zu tönen verhindert wird, und ruft durch Anklopfen den Holzton hervor. Derselbe kann durch Änderungen der Holzdicke modifiziert werden. Es ist ferner für die Resonanz günstig, wenn der Fuß der Gabel möglichst leicht ist.

Je vollkommener der Einklang zwischen dem Resonanzkasten und der Gabel ist, desto lauter tönt der Apparat, desto früher hört er aber auch zu tönen auf. Soll deshalb die Gabel lange fort tönen, so verstimmt man den Eigenton des Kästchens oder der Gabel.

Der Eigenton des Kästchens wird dadurch vertieft, daß man die Mündung verengt, was am einfachsten durch Anbringung von zwei Leisten aus Kork geschieht, die man an die vertikalen Innenränder des Kästchens anlegt.

Die Tonhöhe der Gabel hängt von ihren Dimensionen, insbesondere von der Dicke der Zinken und der Knotenstellen ab.

Der Ton wird höher, wenn man die Zinken verkürzt oder durch seitliches Abfeilen entlastet; er wird tiefer, wenn man die Zinken durch Ankleben von Wachs, Münzstücken oder durch Anschrauben von Metallschuhen (Laufgewichten) belastet oder wenn man die Gabel in der Nähe der Knotenstellen dünner feilt. Nähert man die Laufgewichte mehr den Zinkenenden, so vertieft dies den Ton, er wird umgekehrt höher, wenn man sie den Knotenstellen nähert. Die Belastungen der beiden Zinken sollen stets gleich groß sein; auch ist es vorteilhaft, die Zinken parallel und genau prismatisch zu fertigen, um die Laufgewichte überall befestigen zu können.

Endlich ist auch die Temperatur der Stimmgabel von Einfluß auf ihre Tonhöhe. Nach den hierüber angestellten, sehr genauen Versuchen von Dr. Rud. König in Paris wird die Schwingungszahl 435, welche einer Normal-a^1-Gabel bei 15° C zukommt, für jeden Grad Temperaturzunahme m 0,0486 vertieft. Damit also eine solche Gabel ihre Schwingungszahl um eine Einheit vermindere oder erhöhe, müßte ihre Temperatur um 20,58° C erhöht oder erniedrigt werden. Wie man daraus ersieht, muß bei genauen Tonhöhenmessungen die Temperatur der Gabel wohl berücksichtigt werden. Tut man dies und bewahrt man eine Stimmgabel vor Rost und mechanischer Beschädigung, so behält sie ihre Tonhöhe jahrelang unverändert.

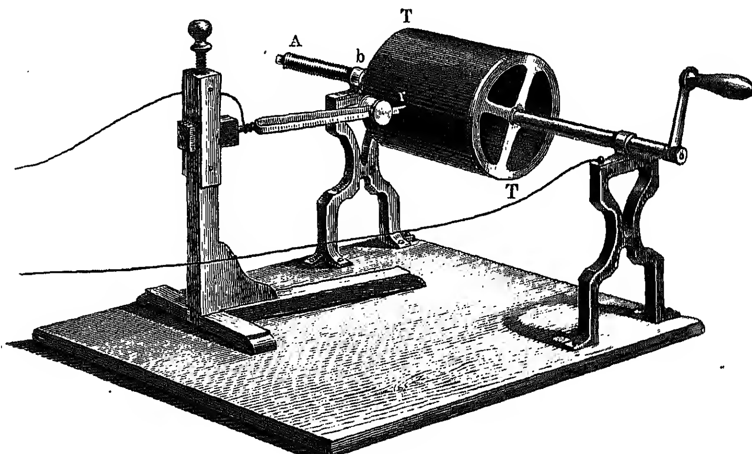
Die am 18. November 1885 in Wien versammelte internationale Stimmtonkonferenz hat festgesetzt, daß eine aus ungehärtetem Gußstahl mit parallelen prismatischen Zinken und glänzend polierter Oberfläche hergestellte

Gabel, welche bei 15° C 435 ganze (870 einfache) Schwingungen ausführt, als Normal-a^1-Gabel gelten soll.

§ 224. Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne, graphische Methode, Vibrographie. Die Methoden zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne zerfallen in drei Gruppen: in graphische, akustische und optische.

Die von Wilh. Weber 1830 erfundene, von Duhamel, König u. a. ausgebildete graphische Methode beruht darauf, daß man an den tonerregenden Körper eine Schreibspitze ansetzt, mit welcher derselbe seine Schwingungen auf einer verschiebbaren Schreibfläche aufzeichnet. Die in gemessener

Fig. 668.



Zeit aufgezeichneten Hin- und Hergänge (Wellen) werden dann direkt gezählt und können auch sonst in bezug auf ihre Form zu wichtigen Untersuchungen dienen. Ein hierzu geeigneter Apparat heißt Tonschreiber, Phonautograph, Vibrograph, die erhaltene Zeichnung Tonschrift, Phonautogramm, Vibrogramm.

Als ein Beispiel eines solchen Apparates mag hier jener nach König dienen, welcher in Fig. 668 in ungefähr $^1/_{10}$ der natürl. Gr. dargestellt ist.

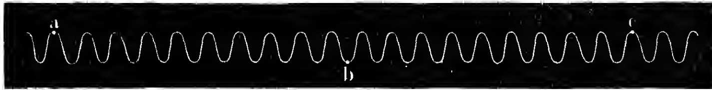
Ein eiserner Stab, welcher an seinem einen Ende bei *A* mit einem durch die Schraubenmutter *b* geführten Schraubengewinde versehen ist, auf der anderen Seite aber mittels einer Kurbel umgedreht werden kann, trägt in seiner Mitte eine messingene Trommel *T*. Auf dieser Trommel wird in einer Weise, daß man ihn leicht wieder wegnehmen kann, ein Papiermantel befestigt und über einer stark rußenden Lampe geschwärzt. (Man erhält eine solche Flamme, indem man ein Gemisch von Olivenöl mit Terpentinöl mittels eines Dochtes brennen läßt.) An diese berußte Fläche wird nun zunächst die in einem passenden, durch ein Gewicht zu beschwerenden Stativ befestigte Stimmgabel herangerückt, an deren einem Ende die Schreibspitze *r* befestigt ist.

Wird nun die Stimmgabel durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen in Vibrationen versetzt und dann der Zylinder sogleich mit entsprechender Ge-

Spitze auf der berußten Fläche eine Sinuskurve in der Art, wie Fig. 669 zeigt.

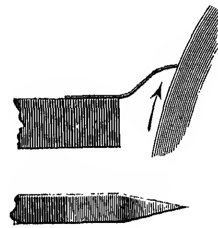
Um zählen zu können, wie viele der Schwingungen in der Sekunde gezeichnet werden, müssen auf derselben Schreibfläche in Zeitabständen von je einer Sekunde Zeichen aufgetragen werden. Man bedient sich hierzu eines Elektromagnets mit beweglichem Anker, welcher alle Sekunden einmal durch

Fig. 669.



einen Stromschluß angezogen wird und dadurch eine zweite Schreibspitze neben der ersteren in Bewegung setzt. Die durch die letztere Schreibspitze eingetragenen Querstriche (Sekundenmarken) begrenzen solche Strecken der daneben gezeichneten Wellenlinie, welche innerhalb einer Sekunde angefertigt wurden. Man hat daher nur die Anzahl der Wellen zwischen zwei aufeinander folgenden Sekunden zu zählen. Noch einfacher ist folgende Methode: Das Schreibspitzchen der Stimmgabel wird gebildet, indem man ein Stückchen von ganz dünnem Messingblech spitzig zuschneidet und dieses schwach gebogen an dem einen Stimmgabelende befestigt, wie Fig. 670 im Grund- und Aufriß zeigt. Nachdem die Stimmgabel an ihre Stelle gerückt ist, wird sie durch einen Kupferdraht mit dem einen, der metallische Träger der Trommel T aber mit dem anderen Pole eines Funkeninduktors, dessen Beschreibung erst im dritten Bande folgen kann, in leitende Verbindung gebracht. In die Leitung ist ein Sekundenpendel in der Weise eingeschaltet, daß dasselbe bei jeder Schwingung auf einen Moment den elektrischen Strom schließt, so daß ein Funke, von der Spitze r durch das Papier schlagend, daselbst eine feine Marke hinterläßt. Hat man, während die Stimmgabel vibrierte und der Induktionsapparat im Gange war, die Trommel gedreht, so erhält man auf der Sinuskurve eine Reihe von Marken a, b, c usw. und kann dann leicht zählen, wieviel Schwingungen die Stimmgabel während einer Oszillation des Pendels macht.

Fig. 670.



Der Apparat, Fig. 668, leidet an dem Übelstande, daß die durch Streichen der schreibenden Gabel erzeugten Vibrationen sehr rasch an Größe abnehmen, so daß man meistens schon nach wenigen Umdrehungen der Trommel still halten und die Gabel von neuem anstreichen muß. Hier nun, wie auch in manchen anderen Fällen, ist es aber erwünscht, die Vibrationen einer Stimmgabel längere Zeit hindurch in unveränderlicher Größe gleichförmig zu erhalten. Helmholtz hat diesem Bedürfnis durch Kombination der Stimmgabeln mit Elektromagneten abgeholfen. Die Figuren 671 und 672 stellen die Helmholtzsche Vorrichtung dar, wie sie König zur Anstellung des in Fig. 668 angedeuteten Versuches ausgeführt hat. A, Fig. 671, ist die schreibende Gabel und r die Schreibspitze. Vor der einen und hinter der anderen Gabelzinke ist der Pol eines Elektromagnets E angebracht, in dessen Umwindungen der Strom durch die Klemmschraube bei c eingeführt und

durch die Klemmschraube bei d ausgeführt wird. Wenn der Strom geschlossen ist, werden die beiden Gabelzinken durch die Magnetpole auseinander gezogen, sie fahren aber gegeneinander, sobald der Strom unterbrochen wird. — Erfolgen nun Öffnungen und Schließungen des Stromes in gleichem

Fig. 671.

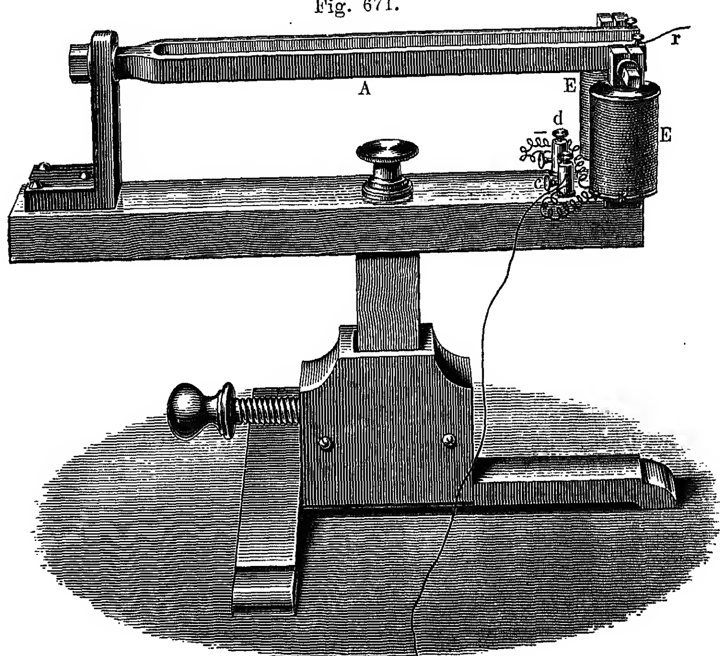
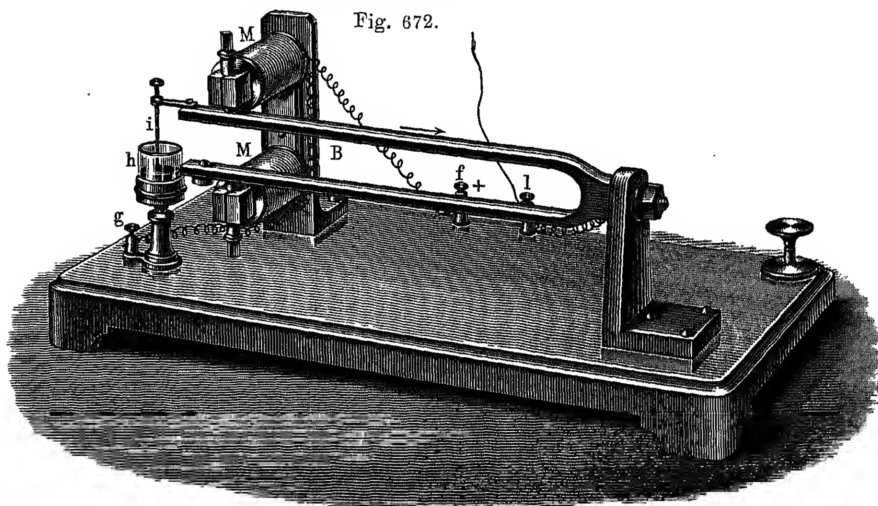


Fig. 672.



Tempo wie die nur vermöge ihrer Elastizität vibrierende Gabel, so wird dieselbe längere Zeit hindurch mit unveränderlicher Intensität vibrieren.

Die abwechselnde Schließung und Unterbrechung des Stromes im Elektromagnet E wird durch eine zweite Gabel B (die Unterbrechungsgabel),

Fig. 672, bewirkt, welche, in vertikaler Ebene schwingend, gleichfalls mit einem Elektromagnet *M* versehen ist. Die Gabel *B* ist entweder unisono mit *A*, oder ihre Schwingungsdauer ist ein einfaches Multiplum der Schwingungsdauer der anderen. Die obere Zinke der Gabel *B* trägt ein vertikal herabreichendes Messingstäbchen *i*, welches unten in eine Platinspitze endigt. Diese Platinspitze taucht in ein Quecksilbernäpfchen *h*. Der eine, etwa der positive Pol einer Säule von 1 bis 2 Bunsenschen Bechern oder Akkumulatoren wird in die Klemmschraube *f*, Fig. 672, eingeschraubt. Von *f* aus durchläuft der Strom die Umwindungen des Elektromagneten *M*, gelangt aus diesen zur Klemmschraube *g* und von hier in das Quecksilber des Näpfchens *h*. Von *h* geht der Strom durch *i* und die obere Zinke der Gabel *B* bis an ihren Befestigungspunkt auf der rechten Seite, dann durch eine Drahtspirale nach der Klemmschraube *l*, welche durch einen Kupferdraht mit der Klemmschraube *c*, Fig. 671, verbunden ist. Bei *d* endlich ist der negative Pol der Säule eingeschraubt.

Sobald der Strom in der angegebenen Richtung zirkuliert, werden die beiden Elektromagnete *E* und *M* erregt, die Zinken des Elektromagnets *E* sowohl wie die von *M* werden auseinandergezogen und dadurch die Spitze von *i* aus dem Quecksilber gehoben. Infolgedessen verliert sich der Magnetismus der Eisenkerne von *E* und *M*, die Zinken der beiden Gabeln schnellen gegeneinander, und die Spitze von *i* wird wieder in das Quecksilber eingetaucht, so daß dasselbe Spiel von neuem beginnt und längere Zeit ununterbrochen fortdauert. Dieselbe Vorrichtung, welche den Namen Unterbrechungsgabel führt, dient auch noch zu anderen, später zu beschreibenden Experimenten. Neuestens pflegt man statt des Hufeisenmagnets einen einfachen Elektromagnet anzuwenden, den man so zwischen den Zinken der Stimmgabel befestigt, daß er diesen die Pole zukehrt[1]).

Diese Methode läßt also direkt die Schwingungszahl des Tones der verwendeten Stimmgabel bestimmen, aus welcher man dann indirekt auf später zu beschreibende Weise die anderer tönender Körper ableiten kann.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß derselbe Apparat zur genauen Messung kleiner Zeiträume zu verwenden ist. Man braucht nur durch die nämliche Metallspitze, welche die Sekundenmarken liefert, die Momente des Beginns und des Endes des zu messenden Zeitraumes durch Marken registrieren zu lassen und dann die dazwischen liegenden Schwingungen der Stimmgabelkurve zu zählen. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob der bewußte Zylinder schneller oder langsamer gedreht wird.

In dieser Anwendung heißt der Apparat ein Stimmgabelchronograph.

§ 225. Bestimmung der Schwingungszahl durch die Sirene. Eine akustisch-mechanische Methode zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne beruht auf der Anwendung der Sirene von Cagniard la Tour. Fig. 673 stellt eine solche dar, wie sie Stöhrer in Dresden in sehr über-

---

[1]) Nach Guillet (Compt. rend. **130**, 1002, 1900) können die Schwingungen der Stimmgabel durch den Strom eines Mikrophons, das in kleinem Abstand vor der Mündung des Resonanzkastens gestellt wird, unterhalten werden, wodurch die Quecksilberkontakte ganz vermieden werden, und die zweite Stimmgabel entbehrlich wird. Der Verfasser kann dies bestätigen.

sichtlicher Form konstruiert. *A A* ist eine zylindrische Büchse von Messing, welche mittels des Rohres *B B* luftdicht auf eine Windlade aufgesetzt werden kann.

In der oberen Deckplatte dieser Büchse befindet sich eine Reihe von Löchern, etwa zwölf, welche im Kreise um den Mittelpunkt herumstehen; dicht über dieser Deckplatte aber ist eine Messingscheibe *s s* angebracht, welche, um eine vertikale Achse in Spitzen laufend, möglichst leicht beweglich sein muß, und welche ebenfalls mit zwölf gleich weit voneinander abstehenden Löchern versehen ist, wie Fig. 674 zeigt, welche diese Platte von

Fig. 673.

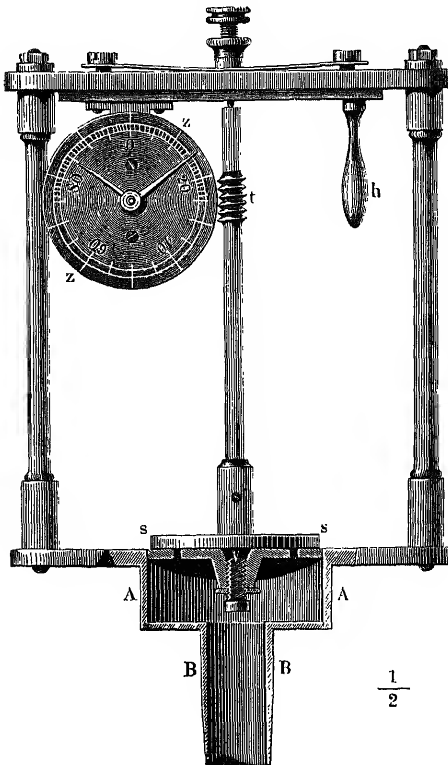


Fig. 674.

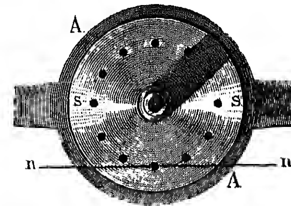
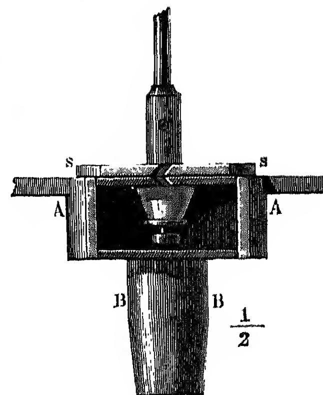


Fig. 675.



oben gesehen darstellt. Je nach der Stellung der beweglichen Platte sind alle zwölf Öffnungen der unteren gleichzeitig geöffnet oder gleichzeitig geschlossen.

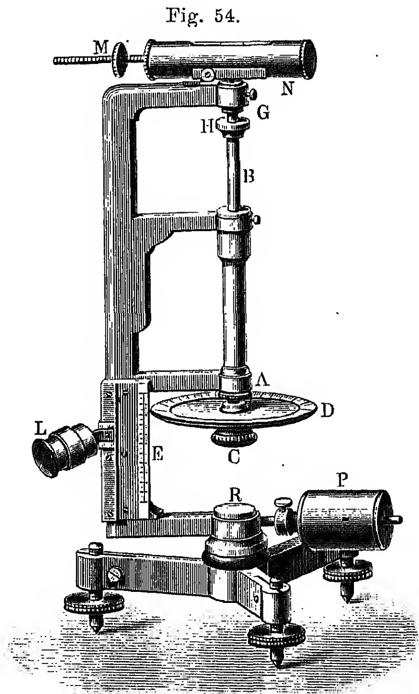
Sowohl die Löcher der drehbaren Scheibe *s s* als auch die Löcher der darunter befindlichen Platte sind schräg gestellt, und zwar die der rotierenden Platte *s s* in entgegengesetzter Richtung, wie die der Deckplatte der Büchse, wie man Fig. 675 sieht, welche einen Durchschnitt der Büchse *A A* nach der Linie *n n* der Fig. 674 darstellt. Es ist also klar, daß der Wind, welcher den Löchern der Deckplatte entströmt, gegen die Wände der Löcher der drehbaren Scheibe *s s* anstößt und diese dadurch in eine Rotation versetzt, deren Schnelligkeit von der Stärke des Windes abhängt.

Wird nun aus der Windlade Luft durch das Ansatzrohr *B B* eingeblasen, so beginnt die Scheibe *s s* sich zu drehen, und alsbald läßt sich ein anfangs tiefer

bohrung herunterdrückt. Stößt also beim Herabschrauben der Mikrometerschraube die Spitze des Stahlstiftes auf die Grundlage oder auf den zu messenden Gegenstand, so wird er durch den Druck gehoben, wobei er die Feder des Fühlhebels spannt; geht man dabei stets nur so weit, bis der lange Arm des Fühlhebels auf einen ganz bestimmten Punkt seines Gradbogens weist, so wird auch die Spannung der Feder und damit der Druck auf den Stahlstift stets der gleiche sein. Dieser zusammen mit dem Gewicht des Stiftes wird dann den bei den Messungen immer in gleicher Größe herzustellenden Druck des Stiftes auf seine Unterlage repräsentieren.

Fühlniveau-Sphärometer von Wild. In etwas anderer Weise hat H. Wild bei dem Sphärometer, das seinerzeit Hermann und Studer in Bern nach seinen Angaben konstruiert haben[1]), diesen Fehler zu vermeiden gesucht. Dasselbe ist in Fig. 54 dargestellt. Die Mikrometerschraube ist hier in der Hülse *A* eingeschlossen, welche oben und unten durch zwei Querarme am Hauptstativ befestigt ist. Dieses ist wieder mittels eines Armes am unteren Ende um die Mitte *R* des mit Stellschrauben versehenen Dreifußes drehbar, wobei das etwas verstellbare Gewicht *P* in bezug auf die Achse *R* als Gegengewicht dient. Die Mikrometerschraube hat ihre Mutter am unteren Ende der Hülse *A*; auf ihrem oberen Ende ruht ein in der Hülse leicht verschiebbarer Stahlstift *B* auf, der durch eine Längsnut und eine in dieselbe eingreifende Schraubenspitze am Drehen verhindert wird. Am oberen Ende des Stiftes wird entweder ein kleiner Stahlteller *H* mit planer Oberfläche, wie in der Figur, oder ein in eine Schneide auslaufendes Stahlstück aufgeschraubt. Über der Mitte dieses Tellers befindet sich im oberen Querarm des Stativs bei *G* eine vertikale Bohrung, in welcher ein beiderseits in Spitzen auslaufender Stahlstift sanft auf und ab gleiten kann. Er ruht unten auf dem Stahlteller auf, wird aber, wenn dieser nach unten bewegt wird, durch eine seitliche Nase am Durchfallen verhindert. Auf dem oberen Ende des Stiftes hat die Grundplatte der Libelle *N*[2]), die um eine horizontale Achse am Stativarm drehbar ist, eine Stütze. Um den Druck, den die Libelle hierbei auf den Stift ausübt, beliebig variieren zu können, ist an einer Schraube ihres anderen Endes ein

Fig. 54.



[1]) Beschrieben in: H. Wild, Über ein neues Polaristrobometer. Bern, bei Haller, 1865, S. 55 und 56.

[2]) Dieselbe wird im § 27 besprochen werden.

Ton hören, welcher allmählich höher und stärker wird, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *ss* zunimmt, und welcher auf einer bestimmten Tonhöhe stehen bleibt, wenn Gleichgewichtszustand eingetreten ist zwischen der beschleunigenden Kraft des ausströmenden Windes und den zu überwindenden Widerständen.

Der Ton entsteht dadurch, daß jedesmal ein Luftstrom durch die Löcher der Scheibe *ss* hervordringt, wenn die Löcher der rotierenden Scheibe gerade über den Löchern der festen sich befinden; bei einer jeden Umdrehung der Scheibe *ss* werden also zwölf solcher Stöße, also auch zwölf Verdichtungswellen erzeugt werden; man kann daher leicht die Schwingungszahl des durch die Sirene hervorgebrachten Tones berechnen, wenn man weiß, wieviel Umdrehungen die Scheibe *ss* in einer Sekunde macht.

Um die Zahl der in einer gegebenen Zeit gemachten Umdrehungen der Scheibe *ss* zu bestimmen, dient nun ein besonderes Zählerwerk. Hinter dem in 100 gleiche Teile geteilten Zifferblatt *zz*, Fig. 673, befinden sich nämlich zwei Räder, von denen das eine 100, das andere 99 Zähne hat; das erstere führt den großen, das letztere den kleinen Zeiger. Wenn nun der Ton der Sirene eine konstante Höhe erreicht hat, so wird das eben besprochene Zählerwerk mit Hilfe des Griffes *h* etwas nach der rechten Seite gezogen, so daß die Zähne der beiden Räder in die Schraube *t* eingreifen, und nun wird natürlich bei jeder Umdrehung der Scheibe *ss* jedes der gezahnten Räder um einen Zahn fortgeschoben; für je 100 Umdrehungen aber wird der kleine Zeiger um einen Teilstrich mehr hinter dem großen zurückbleiben, so daß man aus der Vermehrung des Abstandes beider Zeiger erfährt, wieviel hundert, und aus der Stellung des großen, wieviel einzelne Umdrehungen noch über diese hinaus in einer gegebenen Zeit gemacht wurden.

Es versteht sich von selbst, daß das Zählerwerk so leicht gehen muß, daß das Einsetzen desselben keinen merklichen Einfluß auf den Gang der Sirene ausübt.

Eine wesentliche Verbesserung hat Stöhrer an seiner Sirene dadurch erzielt, daß er in der rotierenden Scheibe und der darunter befindlichen Platte statt der runden Löcher radial gestellte Schlitze in Anwendung brachte.

Dove hat eine Sirene mit mehreren Löcherreihen konstruiert, welche, sowie die Doppelsirene von H. Helmholtz, erst an späterer Stelle besprochen werden kann.

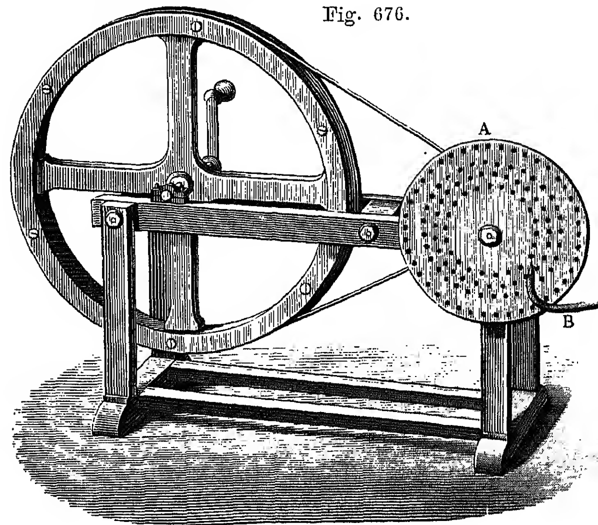
Die Sirene von Cagniard la Tour kann statt durch Luft auch durch einen Strom von Wasser betrieben werden, während der ganze Apparat unter Wasser getaucht ist. Daher stammt auch der Name des Apparates, obwohl seine Töne durchaus nichts Verlockendes haben.

Eine einfachere Form der Sirene, welche wohl nicht zu genauen Messungen der Schwingungszahl, aber zu vielen anderen wichtigen Versuchen dienen kann, ist die Sirene von Seebeck, Fig. 676. Eine Scheibe aus glattem Pappendeckel oder aus Blech, welche 3 bis 4 dcm Durchmesser haben mag, ist an einer Schwungmaschine mit horizontaler Achse zu befestigen und in rasche Rotation zu versetzen. Auf der Scheibe sind konzentrische Reihen gleich weit abstehender Löcher von ungefähr 4 mm Durchmesser eingeschlagen.

Durch ein Kautschukrohr *B*, in welchem ein Röhrchen eingesetzt ist, dessen Mündung etwas enger sein muß als der Durchmesser eines Loches,

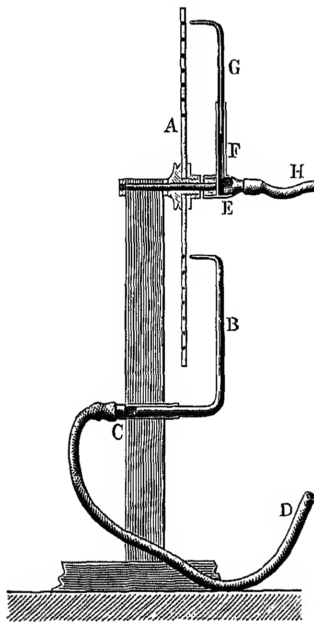
und welche ziemlich dicht an die Ebene der Scheibe hinzuhalten ist, wird nun ein Luftstrom gegen die in Rotation befindliche Löcherreihe geblasen

Fig. 676.



und dadurch ein Ton erzeugt, dessen Schwingungszahl gleich ist der Anzahl der Löcher, welche während einer Sekunde vor der Mündung der Röhre *B* passieren, eine Zahl, welche sich ergibt, wenn man ermittelt hat, wieviel Umdrehungen der Scheibe *A* auf eine Umdrehung der Kurbel gehen. Es ist sehr bequem, wenn man das Röhrchen nicht mit der Hand frei zu halten braucht. Um es derartig zu befestigen, daß es rasch nacheinander auf die verschiedenen Löcherreihen eingestellt werden kann, empfiehlt sich die vom Verfasser angegebene in Fig. 677 skizzierte Konstruktion.

Fig. 677.



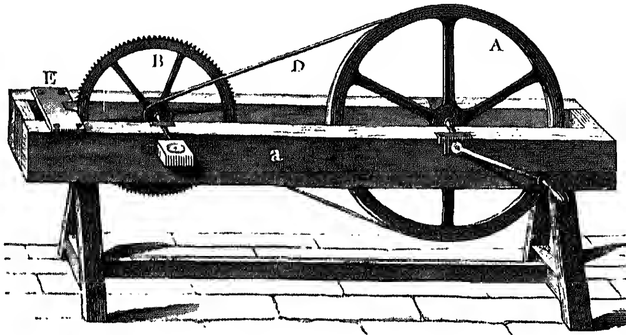
Das Blaserohr *B* ist zweimal rechtwinkelig umgebogen und steckt luftdicht drehbar in dem Rohrstück *C*, welches mit dem Schlauche *D* in Verbindung ist. Für einige später zu beschreibende Experimente ist noch eine zweite Blaseröhre *G* so anzubringen, daß ihre Öffnung auf dem Löcherkreise selbst konzentrisch verschiebbar ist. Die Röhre *G* ist in einer etwas weiteren Röhre *F* verschiebbar, die Luft wird durch den Schlauch *H* der Kammer *E* zugeführt, welche mittels des sie von rückwärts verschließenden Korkes auf eine konische Verlängerung der Achse aufgesetzt werden kann.

Versieht man die Scheibe mit acht Reihen von Löchern, deren Anzahl der Reihe nach 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48 beträgt, so erhält man beim

Anblasen die C-Dur-Skala. Dreht man dann mit größerer, aber konstanter Geschwindigkeit, so erhält man wiederum die C-Dur-Skala, aber in höherer Tonlage. Daraus folgt neuerdings, daß die Größe des Tonhöhenunterschiedes nicht von der Differenz, sondern vom Verhältnis der Schwingungszahlen abhängt. Dieses Verhältnis, welches gleich dem Verhältnis der Löcherzahl ist, bleibt bei allen Rotationsgeschwindigkeiten der Scheibe dasselbe, daher auch das musikalische Intervall. Gibt man den Löcherreihen die Löcherzahlen 24, 27, 30, 32, 24, 40, 36, 32 und bläst diese in passendem Rhythmus der Reihe nach an, so erhält man die S. 638 angeführte Melodie. Dieselbe bleibt im Charakter ganz unverändert, nur daß ihre absolute Höhe wechselt, sobald man die Geschwindigkeit der Scheibe wechselt. Bläst man gegen eine Löcherreihe, in welcher die Löcher in unregelmäßigen Abständen verteilt sind, so entsteht kein reiner Ton, sondern ein Geräusch.

Statt der mit Löchern versehenen Scheibe kann man sich auch eines gezahnten Rades bedienen, gegen dessen Zähne ein elastischer Körper ge-

Fig. 678.



halten wird. Diese Methode rührt von Savart[1]) her, dessen Apparat in Fig. 678 dargestellt ist. *a* ist ein sehr festes Gestell von Eichenholz, welches noch dadurch stabiler gemacht wird, daß man es auf dem Boden befestigt; *A* ist ein Rad von 1,8 m Durchmesser, welches sich um eine sehr starke Achse dreht und durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt wird; durch eine Schnur ohne Ende wird die rotierende Bewegung auf ein zweites Rad *B* in der Weise übertragen, daß die Umdrehung der Achse von *B* weit schneller ist als die Umdrehung der Achse des Rades *A*, daß z. B. zehn Umdrehungen des Rades *B* auf eine Umdrehung von *A* kommen. *B* ist ein gezahntes Metallrad, das ungefähr 600 Zähne hat; wenn man die Kante einer Karte dem Stoße der Zähne aussetzt, so kann man leicht 24000 Stöße in der Sekunde erhalten, wenn *A* vier Umdrehungen in einer Sekunde macht. Man erhält mehr oder weniger Stöße, je nachdem man rascher oder weniger rasch dreht. Der Ton, welchen man auf diese Weise erhält, ist rein und andauernd, seine Höhe hängt von der Schnelligkeit der Umdrehung ab; man kann es also leicht dahin bringen, daß er mit der Stimmgabel im Einklange ist. Der Stoß der Zähne gegen das Plättchen gibt einen Ton, weil es dadurch in Schwingungen versetzt wird; während der Zahn vorübergeht, wird das Plättchen gehoben, geht aber infolge seiner Elastizität zurück, ehe der folgende

[1]) Annal. de Phys. et de Chim. T. 44 et 47.

Zahn kommt. So erzeugt jeder vorübergehende Zahn einen Hin- und Hergang des Plättchens, also eine Vibration; man hat also nur zu ermitteln, wieviel Zähne in einer gegebenen Zeit vorübergehen, um auch die Schwingungszahl des erzeugten Tones zu kennen; zu diesem Zwecke ist an der Achse des Rades *B* eine Schraube ohne Ende angebracht, welche ganz in ähnlicher Weise wie bei der Sirene ein Zählerwerk in Bewegung setzt. Savart hat auf diese Weise bestätigt, daß a^1 440 Schwingungen in der Sekunde macht, wie man mit der Sirene gefunden hatte.

Die Methode von Scheibler, sowie die optischen Methoden zur Messung von Schwingungszahlen können erst später beschrieben werden.

§ 226. Grenzen der Hörbarkeit. Die in der Musik gebrauchten Töne haben Schwingungszahlen, deren Grenzen ungefähr bei 40 und 4000 gelegen sind, also gegen sieben Oktaven umfassen.

Jenseits dieser Grenzen nach unten und oben gibt es aber noch Töne, welche zwar nicht musikalisch verwertbar, aber noch hörbar sind.

Mehrere Physiker und Physiologen haben die untere und obere Grenze der Schwingungszahlen, welche noch hörbaren Tönen entsprechen, aufzufinden versucht, sind dabei aber zu sehr abweichenden Resultaten gekommen, was seinen Grund teils in Fehlern der Methode, teils in der ungleich weit gehenden Fähigkeit der Gehörorgane verschiedener Individuen hat.

Untere Grenze. Die Schwingungszahl des tiefsten noch hörbaren Tones ist nach Sauveurs Versuchen an Orgelpfeifen von 40 Fuß Länge $= 12^1/_2$, nach Chladni und nach Biot (Versuche an Saiten) $= 16$, nach Savarts Versuchen an einem eigens hierzu konstruierten Apparat, bei welchem ein rotierender Stab durch enge Spalten schlägt, $= 7$ bis 8.

Bei allen diesen Bestimmungen ist nach Helmholtz[1]) der Einwurf zu erheben, daß nebst dem Grundton, den man zu hören glaubte, noch Obertöne (Töne mit Schwingungszahlen, welche einfache Multipla der Zahl des Grundtons sind) mit auftreten, welche man hört und für den Grundton hält, da eine Schätzung der Tonhöhe in dieser Tiefe sehr schwierig oder unmöglich ist.

Es sind daher nur solche Versuche beweisend, welche mit rein pendelartig schwingenden Körpern, welche reine Grundtöne ohne Obertöne geben, angestellt werden.

Helmholtz fand die untere Grenze der Hörbarkeit an Saiten, welche in der Mitte belastet waren und deshalb keine merklichen Obertöne lieferten, bei 37 bis 34 Schwingungen in der Sekunde, an großen Stimmgabeln bei 28.

W. Preyer[2]) fand auf dieselbe Weise noch hörbare Töne bis zu 24 Schwingungen herab. Noch tiefere Töne hörte er an sehr tief gestimmten Zungenpfeifen, wenn er das Ohr an den Kasten anlegte, nachdem der Wind unterbrochen worden und die sehr lauten Obertöne ausgeklungen hatten. Er bestimmte so die untere Grenze zu 15 Schwingungen und gab an, daß sie für normalhörige Personen zwischen 14 und 24 liege.

Helmholtz erhob aber gegen diese Versuche den Einwand, daß möglicherweise von den Zungen aus Longitudinaltöne mit doppelt so großer

[1]) Tonempfindungen; IX. Abschnitt.

[2]) Physiologische Abhandlungen. I. Reihe, I. Heft 1876.

Schwingungszahl auf den Kasten übergehen, und erklärte seine Zweifel für nicht beruhigt, solange nicht durch Schwebungszählungen die Angaben kontrolliert seien.

Somit wäre die anerkannte untere Grenze bei 24 Schwingungen gelegen.

Obere Grenze. Über dieselbe gehen die Angaben, insbesondere die älteren, noch weiter auseinander. Sauveur nahm 6400, Chladni 8192, Wollaston 25000 an. Der letztere machte bereits auf die großen individuellen Verschiedenheiten aufmerksam. Savart erhielt an einem Zahnrade, gegen das eine Karte gehalten wurde, hörbare Töne von 24000 Schwingungen, Despretz erreichte mit kleinen Stimmgabeln 36864 Schwingungen. W. Preyer hörte an einer kolossalen Seebeckschen Sirene des Mechanikers Appun in Hanau bei 24000 Luftstößen noch einen leisen Ton, während andere Personen ihn nicht mehr hörten.

Rudolph König in Paris hat die obere Grenze der Hörbarkeit durch eine Reihe von zehn zylindrischen Stahlstäben nachgewiesen, welche sämtlich gleichen Durchmesser von 20 mm haben. Die Länge der einzelnen Stäbchen ist in der zweiten Kolumne, die nach einem späteren Paragraphen sich ergebende Schwingungszahl derselben ist in der dritten Kolumne der folgenden Tabelle gegeben.

Nummer der Stäbe	Länge der Stäbe in Millimetern	Schwingungszahl	Musikalische Bezeichnung
1	149 149,0	4096	c^5
2	$149\sqrt{4/5} =$ 132,3	5120	e^5
3	$149\sqrt{2/3} =$ 121,7	6144	g^5
4	$149\sqrt{1/2} =$ 105,3	8192	c^6
5	$149\sqrt{4/10} =$ 94,2	10240	e^6
6	$149\sqrt{2/6} =$ 86,0	12288	g^6
7	$149\sqrt{1/4} =$ 74,5	16384	c^7
8	$149\sqrt{4/20} =$ 66,6	20480	e^7
9	$149\sqrt{2/12} =$ 60,9	24576	g^7
10	$149\sqrt{1/8} =$ 52,6	32768	c^8

Durch Anschlagen mit einem harten Klöppel werden die Stäbe in der Weise in Transversalschwingungen versetzt, daß sich zwei Schwingungsknoten bilden, von denen jeder um $1/5$ der ganzen Stablänge von dem einen Ende des Stabes absteht. An der Stelle dieser Schwingungsknoten sind die Stäbchen mit einer kleinen eingedrehten Rinne versehen, wie Fig. 679 zeigt.

Diese Stäbe werden entweder mit ihren Schwingungsknoten auf Kautschukröhren aufgelegt, welche in konvergierender Richtung auf ein Brett aufgeleimt sind, wie Fig. 679 zeigt, oder sie werden an Schnüren aufgehängt, wie man Fig. 680 sieht, welch letzteres namentlich bei den drei kürzesten Stäbchen geschieht.

Der längste dieser Stäbe gibt, mit dem Klöppel angeschlagen, den Ton c^5 (das fünfgestrichene c, ein Ton, welcher durch 4096 ganze Schwingungen in der Sekunde erzeugt wird, wenn man das eingestrichene a zu 426,66... Schwingungen annimmt). Danach ergibt sich denn die Schwingungszahl

Fig. 679.

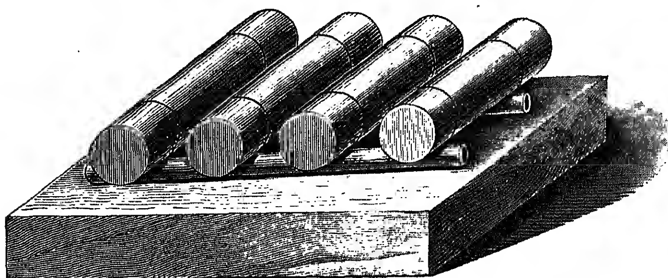
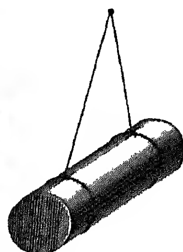


Fig. 680.



der übrigen Stäbe, wie dieselbe in der dritten Vertikalreihe obiger Tabelle steht, während die letzte Vertikalreihe die musikalische Bezeichnung der entsprechenden Töne enthält.

Der Transversalton des Stabes Nr. 1, also das fünfgestrichene c, erklingt so voll und kräftig, daß man das Klappen beim Anschlagen des Hammers kaum wahrnimmt. Bei den folgenden Stäben wird nun das Klappen des Anschlages immer merklicher, während der Transversalton immer schwächer und feiner wird, bis er endlich vollständig verschwindet und nur noch das Klappen hörbar bleibt. Weniger feine Ohren hören kaum noch das g^6. Für ältere Personen bildet c^7 die Grenze der Hörbarkeit, während selbst die besten Ohren den Ton g^7 (24576 Schwingungen der Sekunde) nicht mehr hören.

Appun glaubte durch kleine Stimmgabeln eine noch höhere Grenze zu erreichen. Er fertigte 31 Stimmgabeln, deren Höhe er von $c^4 = 2048$ an ausgehend bis angeblich $e^8 = 40960$ Schwingungen erreichte. Die letzte Gabel ist nur 13 mm lang, 14 mm breit und hat 3 mm breite Zinken. Diese Gabeln sind von mehreren Gewährsmännern alle gehört worden, während ältere Personen meist schon c^7 nicht mehr hörten. Es ist jedoch von Melde, Stumpf und Meyer u. a. gezeigt worden, daß die von Appun angegebenen Schwingungszahlen von etwa 10000 an unverläßlich und viel zu hoch sind. So lieferte z. B. die Methode mittels der Kundtschen Staubfiguren in naher Übereinstimmung mit der Differenztonmethode für die Gabel Nr. 25 12520 Schwingungen, während Appun 21845 Schwingungen angibt.

Ein anderes Mittel zur Herstellung sehr hoher Töne von bekannter Schwingungszahl ist die Galtonpfeife, welche in Fig. 681 in der von M. Th. Edelmann[1]) gegebenen Ausführung in natürlicher Größe abgebildet ist. Fig. 682 gibt eine vergrößerte Darstellung der Teile D und E. Diese Pfeife, welche der Lokomotivpfeife im kleinen nachgebildet ist, hat folgende Einrichtung. Die Pfeife ist als zylindrischer Hohlraum e in dem Körper E enthalten. Ihre Länge kann durch Zurückziehen des Stempels p, was mittels der Schraubenmutter G in meßbarer Weise geschieht, verändert werden.

[1]) H. Th. Edelmann, Studien über die Erzeugung sehr hoher Töne vermittelst der Galtonpfeife; Ann. d. Phys., IV. Folge, 2, 469, 1900.

Dem messerscharfen Rande dieses zylindrischen Hohlraumes steht in regulierbarem Abstande (Maulweite) die Röhre D gegenüber. In diese ist ein abgestumpfter Konus k eingesetzt, der eine kreisförmige Ritze $r\,r'$ frei läßt, welcher die Luft aus dem bei A angesetzten Gummiballon durch die spiraligen Rinnen $s\,s$ unter Druck zugeführt wird. Die Regulierung der Maulweite erfolgt durch die Schraubenmutter B; die Ablesung derselben am Index C. Für jede Pfeifenlänge ist eine bestimmte Maulweite anzuwenden, worüber eine dem Apparat beigegebene Tabelle Anleitung gibt.

Fig. 682.

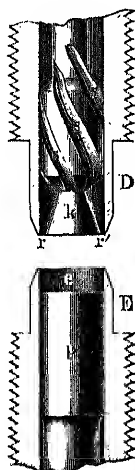
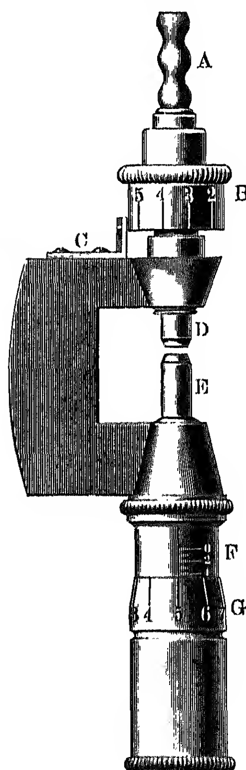


Fig. 681.



Mittels dieser Pfeife lassen sich nach Edelmann Tonhöhen bis über 50 000 Schwingungen in der Sekunde hervorrufen, und es zeigte sich, daß solche Töne noch von einzelnen Personen gehört wurden. Die Messung der Tonhöhe so hoher Töne erfolgt nach F. A. Schulze[1]) und Schwendt[2]) am besten mittels der Kundtschen Staubfiguren in engen Glasröhrchen.

Nach F. A. Schulze[3]) lassen sich jedoch die stehenden Wellen auch in freier Luft durch Reflexion an einer Tischplatte erzeugen und die Lage der Knoten und Bäuche mittels eines kreisrunden, 1 cm im Durchmesser großen, 0,1 mm dicken, in Korkring gefaßten Glimmerblättchens ausmitteln, auf welches man feinen Sand aufgestreut hat, der an dem Orte der Bäuche aufgewirbelt wird. Das Blättchen wird nicht direkt mit der Hand, sondern mittels eines in den Korkring gesteckten Stieles gehalten. Bei schwacher Tonquelle stellt man auf das Maximum, bei starker auf das Minimum der Erregung ein und erhält so bis auf 1 Proz. genaue Messungen von Tonhöhen, die sogar über die menschliche Hörgrenze hinausgehen.

Das Hören solch hoher Töne ist durchaus kein Vergnügen, sondern vielmehr schmerzhaft. Preyer beschreibt das Gefühl beim Anhören der Töne von c^7 an, „wie wenn von beiden Ohren bis in die Mitte des Kopfes nach aufwärts ein dünner Draht gezogen würde". Auch Tiere, insbesondere Hunde und Katzen, empfinden hohe Töne schmerzhaft.

Eine mit der Frage nach der kleinsten absoluten Tonhöhe verwandte, aber doch wesentlich verschiedene ist jene nach der kleinsten absoluten Anzahl von Schallimpulsen, welche überhaupt aufeinander folgen müssen,

---

[1]) Wiedem. Ann. 68, 99, 1899.

[2]) Archiv f. d. ges. Physiol. 75, 348, 1899.

[3]) Sitzungs-Ber. der Ges. zur Beförd. d. ges. Naturwissensch. zu Marburg, Juni 1902.

damit ein Ton wahrgenommen wird. Da es jedenfalls noch Töne mi 40 Schwingungen in der Sekunde gibt, andererseits in der Musik oft Tö von geringerer Dauer als $1/_{40}$ Sekunde angewendet werden, so würde ei solcher Ton in dieser kurzen Zeit nur einer einzigen Schwingung oder ga nur einem Bruchteile einer solchen entsprechen. Von einer Schwingungszah in der Sekunde kann aber doch nur die Rede sein, wenn mindestens zwe Schwingungen aufeinander folgen. Es ist aber von vornherein nicht z sagen, ob nicht eine größere Anzahl erforderlich ist.

Nachdem schon Savart 1830 und Seebeck 1841 diese Frage berühr wurde dieselbe neuerdings (1877) vom Verfasser[1]), sowie von S. Exner- Felix Auerbach[3]) und Jos. Kries, endlich von W. Kohlrausch[4]) i Untersuchung gezogen.

Das Resultat derselben fiel abweichend aus, je nachdem die Frage auf gefaßt wurde. Fragt man nach dem Minimum der Anzahl von Schwingunge damit überhaupt ein Ton gehört werde, so lautet die Antwort: zwei; fra man dagegen nach dem Minimum dieser Anzahl, wobei der Ton seine vol Charakteristik bezüglich der Tonhöhe angenommen, so lautet die Antw nach Exner: 17, nach Auerbach: 20. Nach W. Kohlrausch beginnt (i Übereinstimmung mit dem Verfasser) die Wahrnehmung der Tonhöhe sch bei zwei Impulsen. Die Genauigkeit der Tonhöheschätzung steigt aber m der Anzahl der Impulse bis zur Anzahl 16 derselben; von wo an für ein O mittlerer Feinheit das Auffassungsvermögen der Tonhöhe durch eine Ve mehrung der Impulse nicht mehr weiter gesteigert wird.

Um zu zeigen, daß schon zwei Impulse genügen, um einen Ton wahrz nehmen und annähernd dessen Höhe zu schätzen, hat der Verfasser folgend Experiment angestellt.

Eine gewöhnliche Seebecksche Sirene hat am Umfange nur eine gering Zahl, z. B. sechs gleich weit abstehende Löcher.

Dagegen sind statt einer Blaseöffnung deren zwei vorhanden, der eine feststeht, während die andere im Kreise herumgedreht und an beliebig Stelle befestigt werden kann (Fig. 677, S. 656). Angenommen, die Schei mache zehn Umdrehungen in der Sekunde, die Bogendistanz der beid Blaseöffnungen betrage $1/_{72}$ des ganzen Umfanges, also $1/_{12}$ des Abstand zweier Löcher. An jeder Blaseöffnung gehen dann 60 Löcher in der Sekun vorüber, wodurch der sehr tiefe Ton mit der Schwingungszahl 60 entste Außerdem geht aber jedes Loch zehnmal in der Sekunde an beiden Blas öffnungen nacheinander so rasch vorüber, daß auf jeden durch die erste die Öffnungen erzeugten Luftstoß binnen $1/_{720}$ Sekunde ein durch die zwei Öffnung erzeugter Stoß folgt. Es wird also zehnmal in der Sekunde dur je zwei Impulse ein Ton von der Schwingungszahl 720 hervorgerufen. U diesen Ton neben dem anderen und neben dem Sausen der Scheibe wahrz nehmen, kann man ihn entweder zeitweilig ganz unterbrechen und wieder herstellen, indem man den Luftstrom einer Blaseöffnung unterdrückt un wieder zuführt oder, besser, man ändert während der Rotation rasch de Bogenabstand der beiden Blaseöffnungen. Hierdurch muß offenbar die To

[1]) Wiener Akad. Ber. 1877.
[2]) Pflügers Archiv, Bd. 13.
[3]) Wiedemanns Ann. 6.
[4]) Ebend. 10.

höhe jenes durch je zwei Impulse hervorgerufenen Tones verändert werden, während der andere Ton auf der Höhe von 60 Schwingungen stehen bleibt. Gerade durch die Veränderung der Tonhöhe wird man auf den gesuchten Ton und seine Höhe aufmerksam.

Eine im wesentlichen nahe übereinstimmende Beobachtung kann man nach Baumgarten unter folgenden Umständen anstellen. Man wähle eine Stelle nahe an einer den Schall reflektierenden Mauer, von wo aus man das einförmige Geräusch eines entfernteren rauschenden Baches, Wasserfalles oder eines Eisenbahnzuges hören kann. Alle die unzähligen Einzelimpulse, welche von der Schallquelle ausgehen, gelangen dann zweimal in das Ohr: das erste Mal direkt, das zweite Mal nach Reflexion an der Mauer. Die Zeitdauer zwischen diesen beiden Impulsen ist gegeben durch $\frac{2s}{C}$, wo s den Abstand des Ohres von der Mauer, C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles $= 340$ in Metern beträgt. Falls diese Aufeinanderfolge für sich eine Tonwahrnehmung hervorzurufen vermag, so muß die Schwingungszahl derselben $= \frac{C}{2s}$ sein. Bei 1 m Distanz muß man also den Ton 170 hören; um den Ton a^1 der Normalstimmgabel von 435 Schwingungen zu hören, muß man sich auf $\frac{170}{435} = 0{,}39$ m der Mauer nähern. Diese Töne werden nun unter günstigen Umständen wirklich gehört. Nur die erste Auffindung macht manchmal Schwierigkeiten; sie gelingt am leichtesten, wenn man das Ohr ziemlich rasch der Mauer nähert und es wieder entfernt, weil dann der gesuchte Ton ansteigt und absinkt. Hat man die Beobachtung nur einmal gemacht, so kann man sie auch unter weniger günstigen Bedingungen wiederholen. Beim Vorübergehen an den Bäumen einer Allee, welche einem rauschenden Flusse parallel verläuft, hört man bei jedem Stamme den auf- und absteigenden leisen Ton. Es scheint gar nicht unmöglich, daß derselbe seinerzeit der gläubigen Phantasie als Säufzen der Oreade erschienen ist.

Daß selbst ein einziger Impuls durch die Dauer und die Art des Verlaufes den Eindruck verschiedener Tonhöhe hervorbringen kann, hat bereits Helmholtz erwiesen.

Der Knall einer Gewehrkapsel, eines Gewehres, einer Kanone unterscheidet sich durch die Höhe. Schlägt man mit den hohlen Handflächen zusammen, entsteht ein Geräusch von tiefer (dumpfer) Tonlage, es erhöht sich dieselbe, wenn man dabei die Handflächen eben ausstreckt. Der Knall einer mit Wasserstoff und Luft gefüllten Seifenblase klingt desto tiefer, je größer sie ist. Offenbar wird die Wellenlänge, also auch die Schwingungsdauer desto größer ausfallen, je längere Zeit die Explosion in Anspruch nimmt[1]).

§ 227. Einfluß der Bewegung auf die Höhe des wahrgenommenen Tones. Doppler hat zuerst in seiner 1842 zu Prag erschienenen Schrift: „Das farbige Licht der Doppelsterne usw." darauf hingewiesen, daß die Höhe des wahrgenommenen Tones eine andere sein müsse, wenn Beobachter und

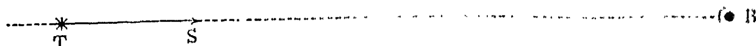
---

[1]) Man vergleiche die Abhandlung von E. Brücke: „Über die Wahrnehmung der Geräusche". Wiener Akad. Ber. 90, B., 3. Abt., S. 199 (1885).

Tonquelle sich rasch einander nähern oder voneinander entfernen, als wenn sie in unveränderter Entfernung voneinander bleiben.

In Fig. 683 stelle B den ruhigen Beobachter, T aber die Tonquelle dar, welche sich mit solcher Geschwindigkeit gegen den Beobachter hin bewegt,

Fig. 683.



daß sie in einer Sekunde den Weg $TS = a$ zurücklegt. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles mit c, so ist die Zeit, welche der Schall braucht, um den Weg TS zurückzulegen, gleich $\frac{a}{c}$. Von dem Moment an, in welchem die durch den tönenden Körper bei T erzeugte Verdichtungswelle in B anlangt, bis zu dem Moment, in welchem B von der Schallwelle erreicht wird, welche der tönende Körper in dem Augenblicke erzeugt, in welchem er den Punkt S passiert, vergeht eine Zeit von $\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ Sekunden. Während nun der tönende Körper von T bis S fortschreitet, also während einer Sekunde, macht derselbe z Vibrationen, und die dadurch erzeugten Schallwellen schlagen innerhalb $\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ Sekunden an das Ohr des Beobachters in B, während einer Sekunde wird also derselbe von $z' = \frac{z}{1 - \frac{a}{c}}$ Vibrationen getroffen werden. Während also der tönende Körper einen objektiven Ton von der Schwingungszahl z erzeugt, vernimmt der Beobachter in B einen subjektiven Ton, welcher der Schwingungszahl

$$z' = \frac{z}{1 - \frac{a}{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

entspricht. Unter den bezeichneten Umständen ist also der subjektive Ton höher als der objektive. Für den Fall, daß sich der tönende Körper mit der Geschwindigkeit des Schalles nähert, daß also $a = c$, ergibt sich aus Gl. (1) der Wert $z' = \infty$, der Beobachter würde also gewissermaßen einen Ton von unendlicher Schwingungszahl wahrnehmen müssen, alle Schallwellen, welche der tönende Körper auf dem Wege von T nach S erzeugt, würden gleichzeitig an das Ohr des Beobachters in B anschlagen.

Für den Fall, daß der tönende Körper sich von dem ruhenden Beobachter entfernt, geht Gleichung (1) über in

$$z'' = \frac{z}{1 + \frac{a}{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

z'' ist also kleiner als z, der subjektive Ton, welchen der Beobachter wahrnimmt, ist also tiefer als der objektive. Wenn in diesem Falle $a = c$ wäre, so würde $z'' = 2z$, der ruhende Beobachter würde die nächst tiefere Oktave des Tones hören, welchen der tönende Körper erzeugt.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der tönende Körper im fortpflanzenden Medium ruhig bleibt, während der Beobachter

Gegengewicht M als Mutter verstellbar. Für die Messung der Dicke von Drähten und dergleichen kann dieser Stift durch einen anderen, oben ebenfalls in eine Spitze auslaufenden, unten aber mit einer Schneide versehenen ersetzt werden, welche Schneide dann der statt des Tellers am Schraubenden gegenüber zu stehen kommt.

Um die Bruchteile der Umdrehungen der Mikrometerschraube zu bestimmen, ist an ihrem unteren Ende eine geteilte Kreisscheibe D befestigt, welche mit dem scharfen, an sie herantretenden Rand der am Stativ sitzenden Lamelle E abgelesen wird. Diese ist mit einer der Schraubenganghöhe entsprechenden linearen Teilung versehen, an der man die ganzen Umdrehungen der Schraube zählt. Die Lupe L, die längs E verschiebbar ist, gestattet die Stellung der Kreisscheibe an dieser Skala besser zu beobachten.

Zur Messung der Dicke eines Gegenstandes schraubt man die Mikrometerschraube, dieselbe am Knopfe C anfassend, so weit herauf, bis die Platte H den Stift oberhalb berührt und ihn dann so weit hebt, daß die Libelle einspielt, worauf in der üblichen Weise durch Justieren am Dreifuß und an der Libelle unter Drehung des Stativs um die Achse E diese vertikal gemacht wird. Man liest dann, während die Libellenblase auf die Mitte einspielt, die Stellung der Mikrometerschraube an der linearen Teilung E und an der Kreisteilung auf D ab. Darauf schraubt man sie so weit zurück, daß der zu messende Gegenstand unter der Spitze des Stahlstiftes auf den Teller gelegt werden kann, und dreht sie dann wieder aufwärts, bis die Spitze den Gegenstand berührt und durch weiteres Heben der Stift die Libelle wieder zum Einspielen bringt. Die neue Ablesung an der linearen Skala und an der Kreisscheibe gibt als Differenz mit der früheren die Dicke des Gegenstandes. Das Übergewicht der Libelle auf der Seite des Stiftes stellt den konstanten Druck dar, unter dem die Berührung mit dem Stahlstift und mit dem Gegenstand darauf jeweilen erfolgt.

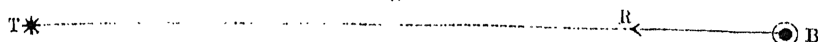
Beim ersten ausgeführten Apparat betrug die Ganghöhe der Mikrometerschraube 0,2 mm, und die Kreisscheibe war dann in 200 Teile geteilt; später erschien es besser, der Schraube eine Ganghöhe von 0,5 mm zu geben und den Kreis in 500 Teile zu teilen. In beiden Fällen konnte man also 0,001 mm oder 1 μ ablesen, und die Genauigkeit der Messung erstreckte sich auch bis zu dieser Grenze.

Fühlhebelkomparator. Der in Fig. 19 dargestellte, hier auch nur als Beispiel eines Fühlhebels beschriebene Apparat gibt bereits vollständig die Idee eines sogenannten Fühlhebelkomparators wieder, wie ihn Lenoir 1792 zur Vergleichung der *mètres à bouts* und anderer Endmaße angefertigt hat. Nachdem man das eine Meter M zwischen das feste Widerlager A und den Kontaktstift s gebracht und den Fühlhebelstand abgelesen hat, wird darauf das zweite Meter an seine Stelle gebracht, und es gibt dann die neue Ablesung des Fühlhebelstandes gegenüber der früheren den Unterschied der Länge beider an. Wir gehen indessen hier auf diesen und andere später von Perreaux, Fortin, Silbermann usw. konstruierte einfache Fühlhebelkomparatoren nicht näher ein, da sie in neuerer Zeit ganz außer Gebrauch gekommen sind.

§ 20. Instrumente mit optischer Pointierung. Horizontallängenkomparator. Bei den in diese Kategorie gehörenden Instrumenten visiert

sich in demselben bewegt. Während sich der Beobachter in einer Sekunde um die Länge BR, Fig. 684, welche auch hier mit a bezeichnet werden mag, dem tönenden Körper in T nähert, wird dieser n Verdichtungswellen erzeugen, das Ohr des Beobachters wird aber von mehr als n Verdichtungs-

Fig. 684.



wellen getroffen, und zwar wird dieser Überschuß gerade so groß sein, als die Zahl der Vibrationen beträgt, welche der tönende Körper macht, während der Schall den Weg $RB = a$ zurücklegt. Um diesen Weg zurückzulegen, braucht der Schall $\frac{a}{c}$ Sekunden, und während dieser Zeit macht der tönende Körper $n\frac{a}{c}$ Vibrationen; die Zahl der Vibrationen, welche an das Ohr des Beobachters anschlagen, während sich derselbe von B bis R bewegt, ist also

$$n' = n\left(1 + \frac{a}{c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Auch hier ist der subjektive Ton höher als der objektive, er ist die Oktave desselben, wenn $a = c$, wenn sich also der Beobachter mit der Geschwindigkeit des Schalles dem tönenden Körper nähert. Wenn sich B von T entfernt, so geht die Gleichung (2) über in

$$n'' = n\left(1 - \frac{a}{c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

der subjektive Ton wird tiefer als der objektive. Für $a = c$ wird $n'' = 0$, die von T ausgehenden Schallwellen würden in diesem Falle den Beobachter gar nicht mehr erreichen.

Es ist zu beachten, daß sich die beiden Vorgänge, welchen die Gleichungen (1) und die Gleichungen (2) entsprechen, nicht bloß in der Ursache, sondern auch in der Wirkung wesentlich unterscheiden. Im Falle (2), wo sich das Ohr gegen die ruhende Tonquelle bewegt, hat diese Bewegung keine Änderung der Wellenlänge, sondern nur eine scheinbare (subjektive) Änderung der Schwingungszahl zur Folge. Im Falle (1) dagegen, wo die Tonquelle innerhalb des Mediums gegen das Ohr sich bewegt, wird die Wellenlänge wirklich kürzer, während auch hier die Änderung der Schwingungszahl nur eine subjektive ist. Es kommt also nicht bloß auf die relative Bewegung von Ohr und Tonquelle, sondern auch auf die Bewegung beider in bezug auf das Medium an.

Diese theoretischen Ergebnisse sind vielfach durch Beobachtungen auf Eisenbahnen bestätigt worden[1]). Dabei stand entweder der Beobachter ruhig an der Bahn, während eine Lokomotive mit einer Tonquelle vorüber fuhr, oder es befand sich umgekehrt der Beobachter auf dem Zuge, während die Tonquelle ruhte. Dabei beobachtete man in der Tat eine Tonerhöhung, wenn eine Annäherung, eine Tonerniedrigung, wenn eine Entfernung zwischen Tonquelle und Beobachter stattfand. Für eine Geschwindigkeit der Lokomotive von ungefähr 16 m in der Sekunde betrug die beobachtete

[1]) Buys Ballot, Pogg. Ann. 66, 1845. Vogel, Pogg. Ann. 158, 287. Mach, Wiener Akad. Ber. 77.

Tonerhöhung oder Erniedrigung den obigen Formeln entsprechend ungefähr einen kleinen halben Ton. Eine genaue Bestimmung der Differenz zwischen dem objektiven und dem subjektiven Tone wird übrigens durch das Geräusch der schnell fahrenden Lokomotive sehr erschwert[1]).

Fährt die Lokomotive gegen die Fassade eines Tunnels, so hört der Mitfahrende den von der Wand reflektierten Ton der Signalpfeife höher als den direkten. Fahren zwei Züge sich begegnend rasch aneinander vorüber, so hört der Mitfahrende die Signalpfeife des anderen Zuges zuerst in höherer Tonlage, welche im Momente der Begegnung rasch in tiefere übergeht.

E. Mach[2]) hat ein Versuchsverfahren angegeben, welches hierher gehörige Beobachtungen einfacher und sicherer anzustellen gestattet.

Eine hohle Holzleiste von nahe 4 m Länge ist um eine durch ihre Mitte gehende vertikale Achse drehbar und trägt an einem Ende ein Zungenpfeifchen (Stimmton a^1). Die hohle Achse steckt in einer weiteren Röhre mit Seitenrohr und angesetztem Kautschukschlauch, so daß man durch letzteres dem Pfeifchen Luft zuführen kann, während das letztere in horizontalem Kreise herumgedreht wird. Bei einer Rotationsdauer von 0,6 bis 0,7 Sekunden ist dann sehr deutlich zu bemerken, wie der Ton des Pfeifchens bei der Entfernung vom Beobachter sinkt, bei der Annäherung steigt, und zwar genau so viel, als die Rechnung verlangt.

Damit jedoch das Experiment gut gelinge, muß es im Freien ausgeführt werden, da in geschlossenen Räumen durch Einmischung der von den Wänden reflektierten Töne Störungen eintreten. Außerdem soll die Bewegung nahe dem Boden und parallel zu demselben erfolgen. Statt des Pfeifchens kann auch eine Stimmgabel mit Resonanzkästchen benutzt werden.

Ein ebenfalls hierher gehöriges Experiment mit zwei gleichgestimmten Stimmgabeln hat König angegeben; wir können dasselbe aber erst später nach Erklärung der „Schwebungen“ mitteilen.

Einen Apparat zur Erläuterung des Dopplerschen Prinzips hat W. Elsässer[3]) angegeben. Auf einem sich fortbewegenden Papierstreifen schreibt eine Stimmgabel Schwingungen und zugleich in einiger Entfernung ein Pendel Zeitmarken. Nähert man die Stimmgabel dem Pendel oder umgekehrt, so vermehrt sich die Anzahl der aufgezeichneten Schwingungen zwischen zwei Zeitmarken.

---

[1]) Pogg. Ann. 66.
[2]) Wiener Akad. Ber. 41 (1860), dann insbesondere 77 (1878).
[3]) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht 14, 16 (1901).

Drittes Kapitel.

Von den tönenden Körpern.

§ 228. Methoden zur Untersuchung schwingender Körper; Stroboskopie. Da Wellenbewegungen und Töne durch stehend schwingende Körper hervorgerufen werden, so konnten wir in den beiden vorigen Kapiteln nicht die beiden ersten behandeln, ohne zugleich von den schwingenden Körpern selbst zu sprechen. Wir kommen aber jetzt ausführlicher auf diese letzteren zurück. Bei der Untersuchung der Schwingung tönender Körper können verschiedene Fragen zu beantworten sein. Die Zahl der Schwingungen (Tonhöhe), der zeitliche Verlauf derselben, die Form der Schwingungsbahnen der einzelnen Punkte, die Formen des schwingenden Körpers in verschiedenen Phasen, die Abteilung des ganzen Körpers in einzelne für sich schwingende Teile, die Lage der Knotenpunkte und Knotenlinien usw.

Da der Verlauf der Schwingungen in der Regel zu rasch ist, um direkt messend beobachtet zu werden, so empfiehlt sich hier die auch sonst (z. B. beim freien Fall) angewendete Methode, die zu untersuchenden Bewegungen mit anderen bereits bekannten von vergleichbarer Geschwindigkeit so zu kombinieren, daß eine der Beobachtung zugängliche resultierende Bewegung entsteht. Aus dieser Resultierenden und der einen bekannten Komponente schließt man dann auf die andere noch unbekannte Komponente.

Auf diesem Prinzip beruht die bereits beschriebene graphische Methode (§ 224), bei welcher die Schwingungen der Stimmgabel, mit der fortschreitenden Bewegung der Schreibfläche kombiniert, die Sinuskurve liefern. Ebenso beruht hierauf die Benutzung des rotierenden Spiegels zur Analyse der singenden Flammen und der Königschen Flammenzeiger. In diesen beiden, wie in vielen anderen Fällen, ist die mit der zu untersuchenden Bewegung kombinierte Komponente eine senkrecht auf jene gerichtete geradlinige und gleichförmige Bewegung. Wir werden bald eine von Lissajous stammende Methode kennen lernen, bei welcher die mit der ursprünglichen Bewegung kombinierte eine pendelartige Bewegung ist. Eine verwandte, aber doch eigentümliche Methode endlich ist die stroboskopische, von welcher wir das Theoretische und ein Beispiel der Anwendung bereits im § 213 bei den singenden Flammen erörtert haben. Wir wollen hier noch einige andere Anwendungen beschreiben und uns dabei an die Darstellung von E. Mach[1]) halten, dem wir die Mehrzahl dieser Methoden verdanken.

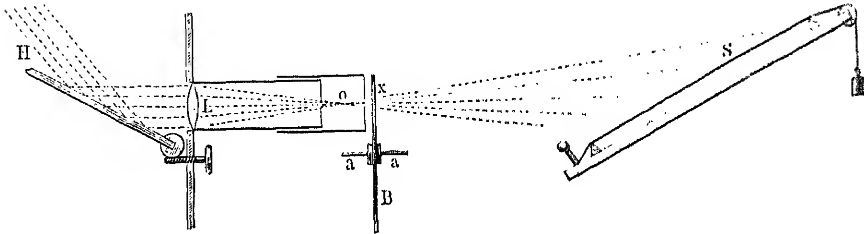
---

[1]) E. Mach, Optisch-akustische Versuche, Prag 1873, S. 63. Daselbst findet sich auch eine eingehende Darstellung der historischen Entwickelung dieser Methode.

Bei der ursprünglichen von Plateau herrührenden Form der stroboskopischen Methode wird der Anblick des schwingenden Körpers dadurch dem Auge periodisch entzogen, daß die zwischen den Spalten der rotierenden Scheibe befindlichen Teile als Diaphragmen vor das Auge treten. Eine sehr schätzenswerte Vervollkommnung erzielte Töpler[1]) dadurch, daß er nach einem schon 1845 von Doppler[2]) gemachten Vorschlage, mittels der rotierenden Scheibe den schwingenden Körper (eine schwingende Saite) intermittierend beleuchtete. Einen weiteren Fortschritt erzielte Mach, indem er die nur schwierig und unvollkommen regulierbare rotierende Scheibe durch einen mittels elektromagnetischer Stimmgabel hergestellten Lichtunterbrecher ersetzte.

In Fig. 685 ist das von Töpler angewendete Verfahren dargestellt. H ist der Spiegel eines gewöhnlichen Heliostaten, welcher den Sonnenstrahlen

Fig. 685.



eine horizontale Richtung gibt. Die Linse L erzeugt in o ein kleines Sonnenbild, von welchem aus die Strahlen in das verfinsterte Beobachtungslokal divergieren.

Die rotierende Scheibe B wird so aufgestellt, daß der Konus von Sonnenstrahlen gerade durch eine oben bei x vorübergehende Öffnung fallen kann. Alles Nebenlicht wird durch passende Schirme abgehalten. Setzt man die Scheibe in Rotation, so erscheint von einer gewissen Geschwindigkeit an der austretende Strahlenkegel konstant. Betrachtet man bei dieser Beleuchtung einen tönenden Körper, z. B. die Saite S, welche mit der Lochscheibe nahezu gleich gestimmt ist, so kann man die Schwingungen mit der größten Deutlichkeit und Bequemlichkeit beobachten, wobei man noch den Vorteil hat, daß mehrere Personen zugleich an dem Experiment teilnehmen können.

Die eben beschriebene Versuchsweise leidet an dem Übelstande, daß es schwer hält, die Umdrehungsgeschwindigkeit der stroboskopischen Scheibe in entsprechender Weise zu regulieren[3]), es war also wünschenswert, die intermittierende Beleuchtung durch ein Stroboskop mit fixer Tonhöhe herzustellen und nach diesem den zu untersuchenden Körper zu stimmen. Dies gelang zuerst Professor Mach (Optisch-akustische Versuche) durch Anwendung einer Helmholtzschen Unterbrechungsstimmgabel von großer Exkursionsweite an Stelle der rotierenden Scheibe. Auch Töpler und Boltzmann

[1]) Pogg. Ann. 78.

[2]) Abh. d. königl. böhm. Ges. d. Wissensch., V. Folge, 3. Bd., S. 779 (Doppler hat daselbst auch schon die Verbindung der stroboskopischen Scheibe mit Fernrohr, Mikroskop und Sirene vorgeschlagen).

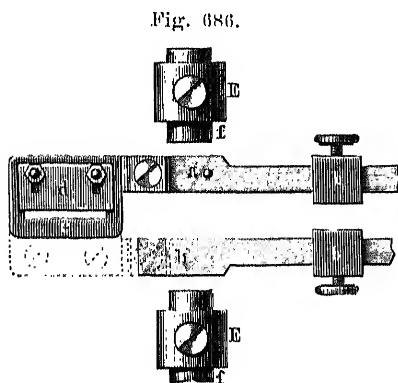
[3]) Durch die neuerer Zeit konstruierten kleinen Elektromotoren mit regulierbarem Widerstande gelingt dies ziemlich gut.

haben sich unabhängig derselben Methode bedient [1]). Eine eingehendere Besprechung der Helmholtzschen Unterbrechungsstimmgabel folgt an späterer Stelle.

Der Apparat unterscheidet sich dann von dem in Fig. 685 abgebildeten nur dadurch, daß an Stelle der rotierenden Scheibe eine elektromagnetisch vibrierende Stimmgabel gesetzt wird, deren beide Zinken mit leichten Blechschirmen aus Aluminium versehen sind, in welchen sich je ein schmaler horizontaler Schlitz befindet. Die Ebene der Blechschirme, welche sich überdecken, fällt mit der vertikalen Schwingungsebene der horizontal gestellten Gabel zusammen.

Fig. 686 zeigt die Zinken einer solchen Stimmgabel in ihrer Ausrüstung mit den Blechschirmen nach Töpler und Boltzmann. Auf das Zinkenende a ist ein Schuh fest aufgeschraubt, welcher ein sehr leichtes Blechrähmchen c mit rechteckiger Öffnung trägt. Auf dieses kann die dünne Blechplatte d in verschiedener Höhe angeschraubt werden, je nach der Breite, die man der Spalte geben will. Am anderen Stimmgabelende ist eine ganz analoge Vorrichtung in umgekehrter Lage angebracht. EE sind die mit verstellbaren Fortsätzen ff versehenen Pole des Elektromagneten, bb die Laufgewichte zum Verstimmen der Gabel. Die obere Gabelzinke trägt bei a den (in der Zeichnung fortgelassenen) Draht zur Stromunterbrechung, welcher in einen Quecksilbernapf taucht.

Fig. 686.



Die beiden Spalten müssen sich in der Ruhelage gerade überdecken, weil dann die Zeitintervalle zwischen zwei Lichtdurchtritten genau gleich lang werden. Offenbar ist die Anzahl der Lichtintermittenzen gleich der Anzahl einfacher Schwingungen der Gabel, also doppelt so groß wie die nach Doppelschwingungen gerechnete Schwingungszahl der Gabel. Der zu untersuchende schwingende Körper muß also nahe auf die obere Oktave der Unterbrechungsgabel abgestimmt sein. Ist er auf die Tonhöhe der letzteren gestimmt, so erscheint er doppelt.

Weniger zweckmäßig, aber doch ausführbar ist es, die Gabel so einzurichten, daß der Lichtdurchtritt mit der äußersten Exkursion der Gabel zusammenfällt, wo dann der zu untersuchende Körper nahe auf denselben Ton wie die Gabel gestimmt sein muß. Der Nachteil dieser Einrichtung besteht in der relativ langen Dauer des Lichtdurchtritts. Bei den Versuchen von Töpler und Boltzmann war die Spaltbreite = 1 mm, die Amplitude der Schwingungen = 3 mm, die Zeitdauer des Lichtdurchtrittes = $^1/_9$ der halben Schwingungsdauer der Gabel, also = $^1/_8$ der Dauer der Dunkelheit.

Um nach dieser Methode die Schwingungen der Luft in einer Pfeife sichtbar zu machen, verfuhr E. Mach in folgender Weise. Das Sonnenlicht wird nach dem Durchgange durch das Stimmgabeldiaphragma durch eine

[1]) Pogg. Ann. 141.

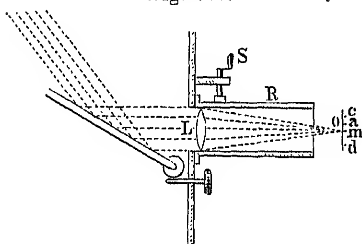
Linse nahe parallelstrahlig gemacht und der Länge nach durch eine horizontal liegende, nahe auf die Gabel gestimmte Orgelpfeife geführt.

Die Pfeife ist in der Mitte an Stelle der Knotenfläche durch eine schlaff gespannte Membran abgeteilt, was den Ton nicht merklich beeinflußt, aber den Luftzug verhindert. Die vertikalen Wände der Pfeife von der Membran bis zum offenen Ende sind aus Glas, der übrige Teil aus Holz. An der inneren oberen Wand der Pfeife zwischen Öffnung und Membran ist ein dünner Platindraht ausgespannt mit den nötigen Zuleitungen, um denselben mittels eines galvanischen Stromes erhitzen zu können. Benetzt man diesen Draht mit konzentrierter Schwefelsäure, so zieht sich diese in eine Anzahl gleich verteilter Tröpfchen zusammen. Beim Erwärmen sinken die Dämpfe dieser Säuretröpfchen in Gestalt feiner Dampflinien vertikal, also quer durch die Pfeife herab und bilden so die Marken, welche stroboskopisch schwingen, sobald der Versuch in Gang gesetzt wird. Die Exkursionen betrugen am offenen Ende einer 125 ccm langen Pfeife 4 mm.

Eine Vereinfachung dieser Methode erzielte E. Mach durch Anwendung des Königschen Brenners als intermittierende Lichtquelle. Macht man nämlich die Flammen dieser Brenner recht klein, so leuchten sie fast momentan periodisch auf, wenn sie durch eine Pfeife erregt werden. Man kann dann durch sie die Bewegung von Stimmgabeln, Saiten, Membranen, welche nahe auf die Pfeife gestimmt sind, recht gut stroboskopisch sichtbar machen [1]. Um die Schwingungen der Luft in einer Pfeife zu zeigen, legt man dieselbe, mit den oben beschriebenen Einrichtungen versehen, horizontal etwas höher vor die mit sechs bis acht Königschen Brennern versehene, nahe gleichgestimmte Beleuchtungspfeife, deren Flammen man durch das Glas der ersten Pfeife anblickt. Im finsteren Zimmer sieht man dann recht schön die Schwingungen der durch die Schwefelsäure gebildeten Dampflinien.

Eine weitere von E. Mach als stroboskopische Selbstregulierung bekannt gemachte Verbesserung der Methode beruht auf folgendem Prinzip.

Fig. 687.



Die Linse L des Apparates Fig. 685 samt der sie tragenden Röhre R wird an dem Fensterladen in der aus Fig. 687 ersichtlichen Weise mittels einer Schraube S von großer Ganghöhe mit Kurbel auf und ab verschiebbar eingerichtet. Die Öffnung von R und das Sonnenbildchen o steigt dann ebenfalls auf und nieder. Vor der Öffnung von R wird die früher beschriebene Unterbrechungsgabel, welche aber diesmal nur mit einem Spaltschirm versehen sein darf, aufgestellt. cd stelle die Bahn der Spalte dieses Schirmes dar, m sei die Lage derselben in dem Moment, wo die Gabel ihre Ruhelage passiert. Läßt man die Schraube S unberührt und wirft das ins Zimmer durch die Spalte eintretende Licht mittels eines Planspiegels auf die Unterbrechungsgabel zurück, so scheint letztere trotz ihrer Schwingungen vollständig ruhig zu stehen, da sie stets nur in dem Moment beleuchtet, also sichtbar wird, wo sie die Ruhelage passiert. Hebt man nun mittels der

[1]) Durch Anwendung von Acetylengas erhält man lichtstärkere Flammen.

Schraube das Sonnenbildchen o in die Lage a, so wird die Gabel immer in jenen Momenten beleuchtet, wo ihre Spalte die Lage a angenommen hat. Indem man also die Schraube auf und ab bewegt, bewegt sich auch die Gabel mit beliebiger Langsamkeit auf und ab, sie bleibt stehen, sobald man die Schraube stehen läßt. Letztere ist mit einer Teilung am Kopfe versehen, welche gestattet, die Schwingungen der Gabel in beliebige Bruchteile zu teilen.

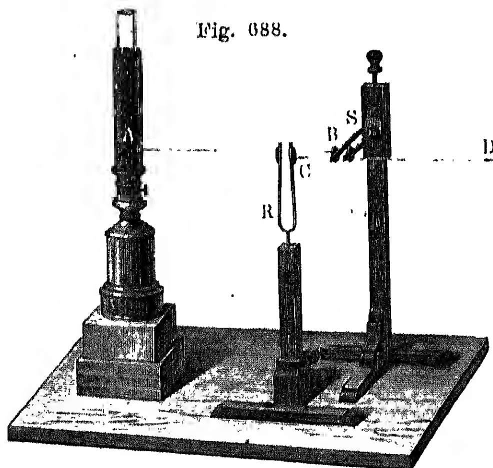
Ebenso wie die Bewegung der Unterbrechungsgabel selbst können auf diese Weise die Bewegungen solcher Körper untersucht werden, welche durch die Unterbrechungsgabel erregt werden. Bringt man z. B. die Mündung einer gläsernen Resonanzröhre mit Rauchflocken vor die Gabel, so bewegen sich die Flocken, sobald man die Schraube bewegt. Besonders schön ist der Versuch mit einem nach Melde schwingenden Faden (§ 211), den man durch die Unterbrechungsgabel selbst erregt. Findet zwischen der intermittierend beleuchteten Gabel und dem durch sie erregten Körper ein Phasenunterschied statt, so sind im allgemeinen zwei Lagen des Körpers zugleich sichtbar. Ist nämlich die Linse so gestellt, daß die Lichtspalte in dem Moment das Licht durchläßt, in welchem die Stimmgabel die Ruhelage passiert, so hat der schwingende Körper diese Ruhelage bald schon überschritten, bald noch nicht erreicht. Er muß daher in diesen beiden Lagen erscheinen. Ähnlich verhält es sich bei den anderen Stellungen der Linse; nur den Stellungen größter Exkursion der Gabel entsprechen einfache Bilder des Körpers.

Bezüglich weiterer Methoden der stroboskopischen Selbstregulierung verweisen wir auf die oben zitierte Originalschrift.

§ 229. Optische Methode mittels der Figuren von Lissajous.

Diese Methode zur Untersuchung der Schwingungen eines Körpers beruht auf der Kombination der Schwingungen mit solchen, welche senkrecht darauf gerichtet nach dem Pendelgesetz erfolgen. Als letztere werden in der Regel die Schwingungen einer Stimmgabel benutzt. Wir wollen zuerst zeigen, wie das Experiment ausgeführt wird, um die Schwingungen zweier Stimmgabeln miteinander zu kombinieren. In Fig. 688 sei R eine auf einem festen Stativ befestigte Stimmgabel, deren Schenkel, in einer Vertikalebene liegend, kleine Spiegel tragen. In der Nähe dieser ersten ist eine zweite Stimmgabel S, welche in gleicher Weise mit kleinen Spiegeln versehen ist, so aufgestellt, daß die Ebene ihrer Schenkel eine horizontale ist.

Fig. 688.



Die gegenseitige Stellung der beiden Stimmgabeln ist so angeordnet, daß ein vom Lichtpunkte A ausgehender Lichtstrahl, welcher den kleinen

Spiegel *B* trifft, nach dem Spiegel *C* der anderen Stimmgabel und vo
endlich in der Richtung nach *D* reflektiert wird.

Ein in der Richtung des zum zweiten Male reflektierten Strah
bei *D* befindliches Auge sieht das Bild des Lichtpunktes *A*, welch
steht, solange die beiden Stimmgabeln nicht vibrieren.

Wird aber die Stimmgabel *R* angeschlagen oder mit dem Fie
gestrichen, während *S* in Ruhe bleibt, so verlängert sich das Bild de
punktes zu einem vertikalen Lichtstreifen. Vibriert dage
Stimmgabel *S* allein, während *R* in Ruhe bleibt, so erscheint das
Lichtpunktes zu einer horizontalen Linie verlängert.

Wenn aber beide Stimmgabeln gleichzeitig vibrieren, s
nieren sich die horizontale und die vertikale Bewegung des Lichtpu
der Weise, daß derselbe eine Kurve beschreibt, deren Gestalt von den
schen Intervall der beiden Stimmgabeln und von dem Phasenunte
ihrer Vibrationen abhängt.

Diese Kurven führen den Namen Lissajous', der durch ihre
rung [1]) nicht allein die Physik mit einem reizend schönen Experime
dern überdies mit einem Hilfsmittel bereichert hat, dessen vorzügli
vielseitige Verwendbarkeit wir alsbald kennen lernen werden.

Gehen wir vorerst daran, diese Kurven zu konstruieren. Wir
dabei zunächst an, daß die Amplituden der beiden senkrecht auf
stehenden Schwingungen gleich groß seien.

Wir ziehen (Fig. 689) einen Kreis, dessen beide Durchmesser *A*
CD die Bahnen der komponierenden Schwingungen nach Richtung u
vorstellen. Wir teilen sodann den Umfang des Kreises in eine Anza
24, gleicher Teile und ziehen durch die Teilpunkte mit den Durch
parallele Hilfslinien, die sich in 12 · 12 ⋯ 144 Punkten schneiden
dem im § 54 abgeleiteten Gesetze stellen dann die mit 0, 1, 2, 3 . .
bezeichneten Punkte des horizontalen Durchmessers die Orte vor, w
zwischen *A* und *B* schwingender Körper in den aufeinander folgend
langen Zeitabschnitten der Schwingungsdauer erreicht. Wenn wir
wegung z. B. von der Mitte aus nach rechts ins Auge fassen, so k
schwingende Körper nach dem ersten $^1/_{24}$ der Schwingungsdauer bis
$^2/_{24}$ bis 2 usw. Für die vertikale Komponente gilt dasselbe. Fin
beide Schwingungen zugleich statt, so brauchen wir nur nach den
des Bewegungsparallelogramms diejenigen Durchschnittspunkte aufz
welche sich als die Bahnpunkte des in der Richtung der Resultiere
wegten Körpers nach je $^1/_{24}$ der Schwingungsdauer ergeben [2]).

Als ersten Fall betrachten wir den, bei welchem die Schwingu
beider Komponenten dieselbe ist, was bei gleicher Tonhöhe der Stim
(Unisono) der Fall sein muß.

---

[1]) Ann. de chim. et de phys., III. Ser., T. 41.

[2]) Um nicht bei jeder einzelnen zu zeichnenden Kurve diese Konstru
ausführen zu müssen, bedient sich der Verfasser beim Unterricht einer
tafel, auf welche die Durchschnittspunkte ohne die störenden Hilfslinien
gemalt sind (Fig. 690 ohne die Diagonalen). Auch der Leser wird zw
dieses durch eigene Konstruktion in größerem Maßstabe erhaltene Pu
mittels Durchstechens mit einer Nadel vervielfältigen, um die den vers

Beginnt dabei jede der beiden Bewegungen mit derselben Phase, oder ist, wie man sich auszudrücken pflegt, die Phasendifferenz = 0, so ist die Konstruktion der resultierenden Kurve eine besonders einfache, da letztere eine gerade Linie wird. Lassen wir z. B. die horizontale Schwingung von der Mitte beginnend nach rechts gehen, die vertikale, ebenfalls daselbst beginnend, nach aufwärts, so erhalten wir als Punkte der resultierenden Bahn nach $^1/_{24}$, $^2/_{24}$, $^3/_{24}$ usw. der Schwingungsdauer, die in Fig. 690 mit 1, 2, 3 usw. bezeichneten Punkte, deren Verbindungslinie mit der Diagonale des ganzen Quadrates zusammenfällt. Die Schwingung erfolgt also diesmal in einer in sich zurückkehrenden schief gelegenen geraden Linie.

Fig. 689.

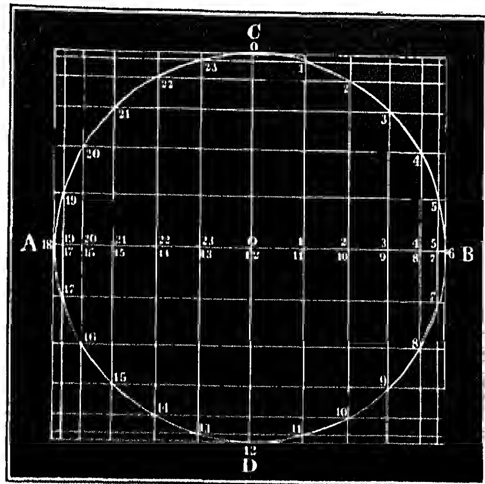
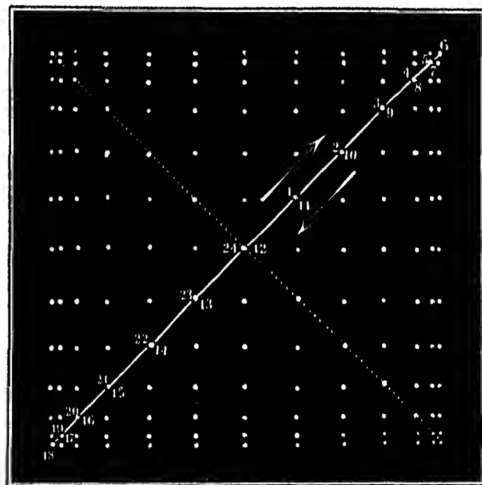


Fig. 690.



Ist die Phasendifferenz = $^1/_2$, d. h. beginnt die eine Schwingung erst, nachdem die andere bereits halb vollendet ist, so erhält man ebenfalls eine gerade Linie, welche aber die in Fig. 690 punktiert gezeichnete Lage hat. Die Bewegung nach aufwärts ist in diesem Falle bis zur Mitte zurückgekehrt und gibt mit der in diesem Moment beginnenden Rechtsbewegung die rechts abwärts gerichtete Diagonale als Resultierende.

Nehmen wir jetzt die Phasendifferenz = $^1/_4$. Die Bewegung nach aufwärts sei bis zum Punkte *C*, Fig. 689, vorgerückt und nun erst beginne die Bewegung nach rechts. Indem sich dieselbe mit der gleichzeitig beginnenden Bewegung nach abwärts kombiniert, erreicht sie nach $^1/_{24}$ Schwingungsdauer den Punkt 1 des Kreisbogens, nach weiteren gleichen Bruchteilen der Schwingungsdauer die Punkte 2, 3, 4, 5, endlich den Punkt 6, wo nun die Rechtsbewegung in eine Linksbewegung übergeht, während die Abwärtsbewegung fortdauert. So erhalten wir die Punkte 7, 8, 9, 10, 11 und 12. Nun geht die Abwärtsbewegung in Aufwärtsbewegung über, während die Linksbewegung fortdauert. Es entsteht also auf diese

Weise ein Kreis, und zwar derselbe, der in Fig. 689 zur Konstruktion des Punktsystems gedient hat.

Ist die Phasendifferenz $= {}^{3}/_{4}$, so entsteht derselbe Kreis, jedoch wird er in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

Nehmen wir jetzt die Phasendifferenz $= {}^{1}/_{8} = {}^{3}/_{24}$. Lassen wir also (Fig. 691) die vertikale Bewegung von der Mitte um drei Intervalle nach aufwärts vorgerückt sein und bezeichnen den dortigen Punkt, wo die horizontale Bewegung nach rechts beginnt, mit 0, so finden wir, indem wir stets den Diagonalen folgen, die Punkte 1, 2, 3, 4 . . ., bis wir wieder zum Punkte 0 gelangen. Wir erhalten so eine Ellipse. Dieselbe Ellipse, jedoch in umgekehrter Richtung durchlaufend, finden wir für die Phasendifferenz $= {}^{7}/_{8}$ oder ${}^{21}/_{24}$. Den Phasendifferenzen ${}^{3}/_{8}$ und ${}^{5}/_{8}$ endlich entspricht die punktiert gezeichnete Ellipse, welche das Spiegelbild der vorigen ist.

Fig. 691.

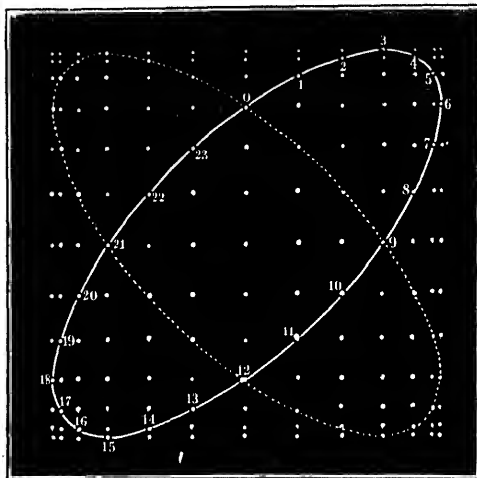
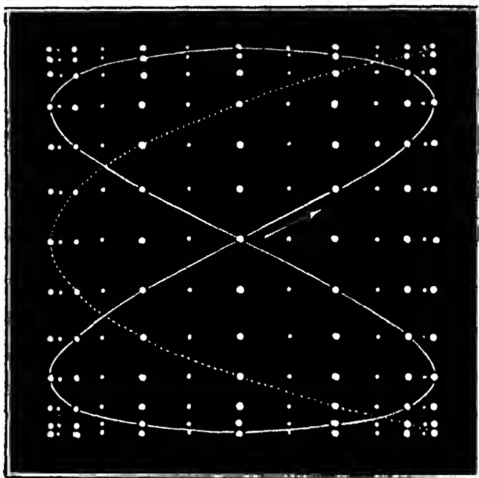


Fig. 692.



Allen übrigen Phasendifferenzen entsprechen ebenfalls mehr oder weniger exzentrische Ellipsen, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man z. B. mit den Phasendifferenzen ${}^{1}/_{24}$, ${}^{1}/_{12}$, ${}^{1}/_{6}$ usw. die obige Konstruktion durchführt. Man kann daher sagen, die Lissajoussche Figur für das Unisono ist im allgemeinen eine Ellipse, welche für die Phasendifferenz 0 und ${}^{1}/_{2}$ in gerade Linien, für ${}^{1}/_{4}$ und ${}^{3}/_{4}$ in einen Kreis übergeht.

Wären die beiden Amplituden nicht gleich groß, so würden die Figuren in die Länge gezogen, also auch der Kreis als Ellipse erscheinen. Geht man von der Phasendifferenz $= 0$ allmählich zu größeren Phasendifferenzen über, so geht die gerade Linie zuerst in eine sehr exzentrische Ellipse über, die sich immer mehr dem Kreise nähert, dann Kreis wird, hierauf in eine Ellipse entgegengesetzter Lage und endlich in eine Gerade sich verwandelt; aus dieser geht eine stark exzentrische Ellipse mit entgegengesetzter Rotationsrichtung hervor, die ihrerseits sich zum Kreise erweitert

man die Enden der zu messenden Länge mit Mikroskopen oder Fernröhren an und bestimmt die so gefaßte Länge an einem Normalmaßstab, auf welchen man sie überträgt.

Horizontallängenkomparator. Die Figuren 55a und 55b stellen schematisch einen Längenkomparator mit Mikrometermikroskopen, die erstere von der Seite, die zweite von oben betrachtet dar, wie er zur Vergleichung eines Maßstabes mit einem Normalmaßstab benutzt wird. Die beiden zu vergleichenden Maßstäbe *mm* und *m'm'* werden parallel nebeneinander und so, daß ihre Teilungsflächen auf gleiche Höhe zu liegen kommen, auf den Tisch *C* des Komparators gelegt, welcher mittels Rollen auf den Schienen *D* des Unterlagbrettes *B* der Quere nach zu verschieben ist, so daß bald der eine, bald der andere Stab vertikal unter die Mikroskope *E* und *E'* einzustellen ist. Die Mikroskope werden von den massiven Trägern *F* und *F'* gehalten, die selbst auf dem dreiseitigen Prisma *A* der Länge nach verschiebbar und mittels der Druckschrauben *s* daran festzuklemmen sind. Das Prisma *A* ist auf dem Grundbrett *B* mit den Haltern *H* und *H'* befestigt, welche in Fig. 55a der Deutlichkeit halber weggelassen sind.

Fig. 55a.

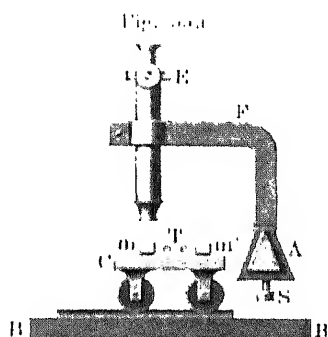
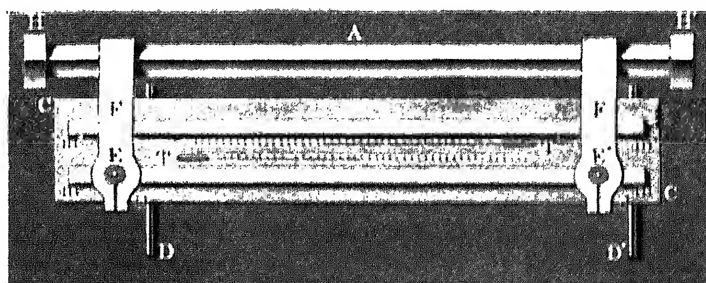


Fig. 55b.



Zwischen beide Stäbe sind die beiden Thermometer *T* mit zylindrischen Gefäßen placiert, um die Temperatur der Stäbe bestimmen zu können. Da es auf die sichere Kenntnis der letzteren bei genauen Messungen viel ankommt, so umgibt man auch wohl für solche Zwecke die Stäbe auf dem Tisch *C* mit einem Blechkasten, den man oben bis auf die Stellen, wo man mit den Mikroskopen die Ablesungen an den Stäben zu machen hat, ebenfalls mit Blechplatten bedeckt; ja für ganz genaue Messungen, wie z. B. bei den Vergleichungen der Prototype im internationalen Bureau, wird der Kasten mit Wasser oder Glyzerin gefüllt. Diese Vorkehrungen, wie auch eine Reihe anderer zur Justierung der Stäbe seitlich und der Höhe nach, zur bequemen Verstellung des Wagens und Begrenzung seiner Verschiebung, zum Schutz des Prismas *A* gegen Temperaturänderungen durch die Nähe des Beobachters usw. sind in den beiden Figuren der Übersichtlichkeit halber fortgelassen.

und dann wieder zur ursprünglichen Geraden zusammenfällt. Die in Fig. 695 gegebene übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Lissajousschen Kurven zeigt in der ersten Horizontalreihe die Aufeinanderfolge dieser Verwandlungen. Hierbei ist zu bemerken, daß zuerst die Reihe der Figuren von links nach rechts, sodann dieselbe Reihe von rechts nach links, jedoch umgekehrt rotierend auftritt.

Fig. 693.

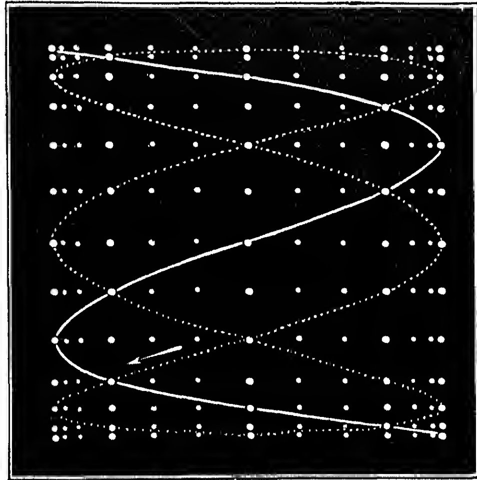
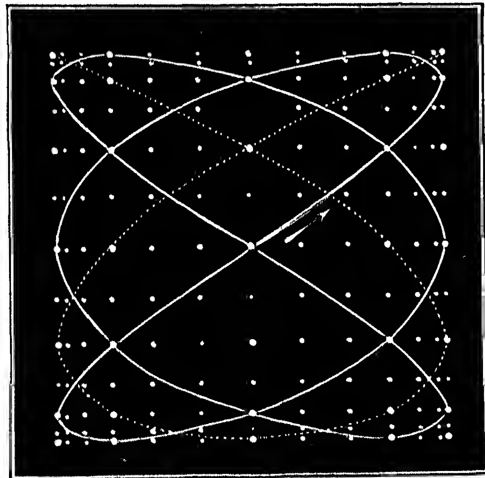


Fig. 694.



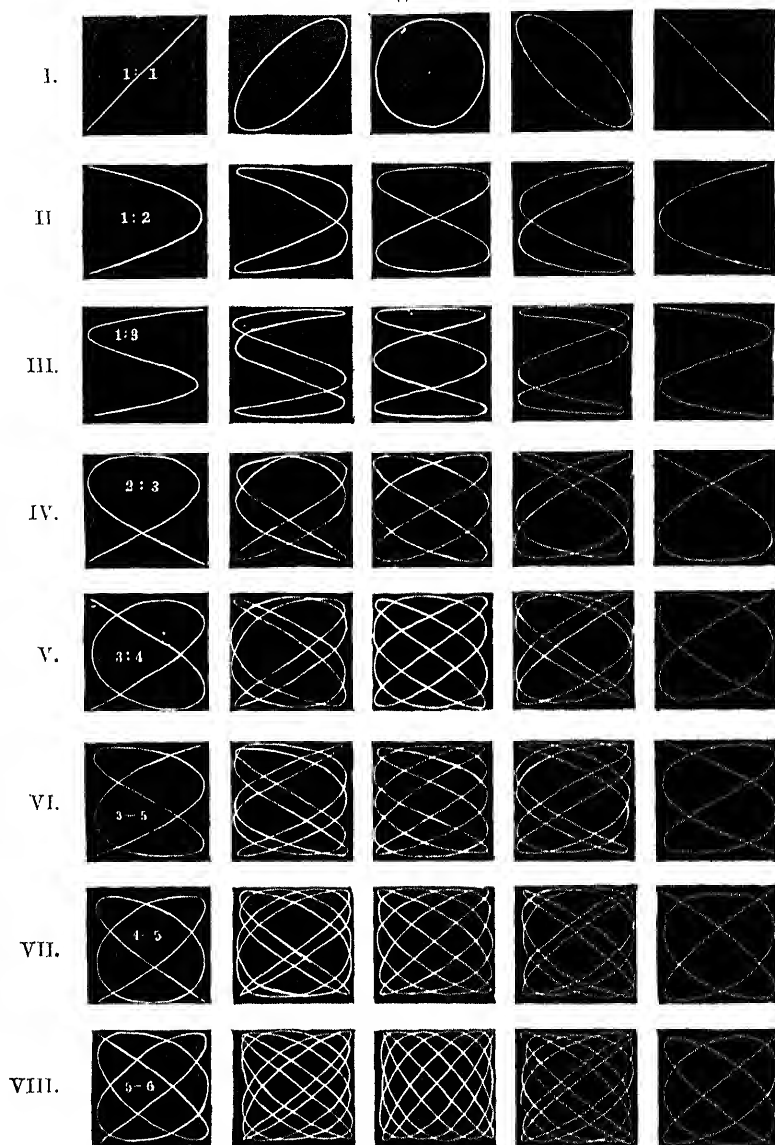
Konstruieren wir nun die Kurven, welche entstehen, wenn die eine — z. B. die horizontal schwingende — Stimmgabel auf die Oktave der anderen gestimmt ist. Ihre Schwingungen sind dann doppelt so schnell. Machen wir wiederum die vereinfachende Annahme gleicher Amplituden, so können wir das vorhin gebrauchte Punktsystem auch hier benutzen, indem wir in horizontaler Richtung stets um zwei Punkte weiter springen, während wir in vertikaler nur um einen Punkt auf- oder absteigen. Wir brauchen also nur von den Punkten einer Horizontalreihe alle geradzahligen unberücksichtigt zu lassen (in Fig. 692 sind diese Punkte kleiner gezeichnet) und können dann wieder einfach den Diagonalen nachgehen, indem wir jedesmal die Richtung wechseln, so oft wir an den Rand kommen.

In der Fig. 692 sieht man zwei solcher Kurven gezeichnet. Die ausgezogene, nach Art einer 8 gestaltete Kurve entsteht in der durch den Pfeil angegebenen Richtung bei den Phasendifferenzen 0 und $^1/_2$ (der größeren, vertikalen Schwingungsdauer), in entgegengesetzter Richtung bei den Phasendifferenzen $^1/_4$ und $^3/_4$. Die in sich selbst zurückkehrende gestrichelte Kurve entsteht bei den Phasendifferenzen $^1/_8$ und $^5/_8$. Für die dazwischen liegenden Phasendifferenzen erhält man Figuren, welche eine mehr oder weniger verschobene 8 vorstellen. Außerdem entstehen bei den Phasendifferenzen $^3/_8$, $^7/_8$, die den Spiegelbildern der gestrichelten Kurve entsprechenden Figuren. Die Reihenfolge der Figuren, welche bei allmählich veränderter

Phasendifferenz entstehen, ist in der zweiten Reihe der Fig. 695 zusammengestellt.

Schwingt die horizontale Gabel dreimal so schnell als die vertikale, so gibt sie die sogenannte Duodecime oder Quinte der Oktave

Fig. 695.



von dem Tone der anderen Stimmgabel. Die zugehörige **Lissajoussche** Figur ist in Fig. 693 konstruiert. Von den **horizontalen** Punkten **ist** nur jeder dritte berücksichtigt. Es ergibt sich dann die **Konstruktion** von selbst, indem man die aufeinander folgenden **Diagonalen zeichnet**. Zu einer **genauen** Zeichnung liegen dann freilich **die Punkte zu weit voneinander**

und wäre ein Punktsystem mit mehreren Punkten erforderlich, wie man es erhält, indem man den ursprünglichen Kreis, Fig. 689, statt in 24 in 48 oder noch mehr Bogenstücke einteilt. Die ausgezogene Linie entspricht den Phasendifferenzen 0, $^1/_3$ und $^2/_3$. Ihr Spiegelbild entsteht bei den Phasendifferenzen $^1/_6$, $^3/_6$ und $^5/_6$ (auch hier sind darunter Bruchteile der Schwingungsdauer für die vertikale Komponente verstanden). Die symmetrische, gestrichelt gezeichnete Figur entsteht in der Richtung des Pfeiles bei den Phasenunterschieden: $^1/_{12}$, $^5/_{12}$ und $^9/_{12}$, in entgegengesetzter Richtung bei den Phasenunterschieden: $^3/_{12}$, $^7/_{12}$ und $^{11}/_{12}$. Die ganze Reihenfolge der Figuren für zunehmende Unterschiede der Phasen ist wiederum aus Fig. 695 dritte Reihe ersichtlich.

In Fig. 694 ist die dem Intervall 2 : 3, der Quinte, zugehörige Kurve abgeleitet. Von den vertikalen Punktreihen sind je ein Punkt, von den horizontalen je zwei Punkte übersprungen, so daß die Anzahl der gleichzeitig zurückgelegten Wegstücke im Verhältnis 2 : 3 stehen. Auch hier und noch mehr bei den komplizierteren Figuren der Intervalle $^3/_4$, $^4/_5$ usw. stellt sich das Bedürfnis einer größeren Anzahl von Punkten ein, da sonst die Verbindungslinien derselben nicht gut gezeichnet werden können. Die ausgezogene Figur entsteht bei den Phasendifferenzen 0, $^2/_6$, $^4/_6$ in der Richtung des Pfeiles, bei den Phasendifferenzen $^1/_6$, $^3/_6$, $^5/_6$ in entgegengesetzter Richtung. Die gestrichelte Figur entsteht bei den Phasendifferenzen $^1/_{12}$, $^5/_{12}$, $^9/_{12}$; ihr Spiegelbild bei den Phasendifferenzen $^3/_{12}$, $^7/_{12}$ und $^{11}/_{12}$. Die ganze Reihenfolge der Figuren für zunehmende Phasendifferenzen findet sich Fig. 695 vierte Reihe abgebildet. Die übrigen Reihen stellen die den Intervallen 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5, 5 : 6 entsprechenden Figuren dar, deren Ableitung nach den oben durchgeführten Beispielen keine Schwierigkeiten bereiten wird.

§ 230. Experimentelle Darstellung der Figuren von Lissajous, drehende Bewegung derselben; Vibrationsmikroskop, Kaleidophon.

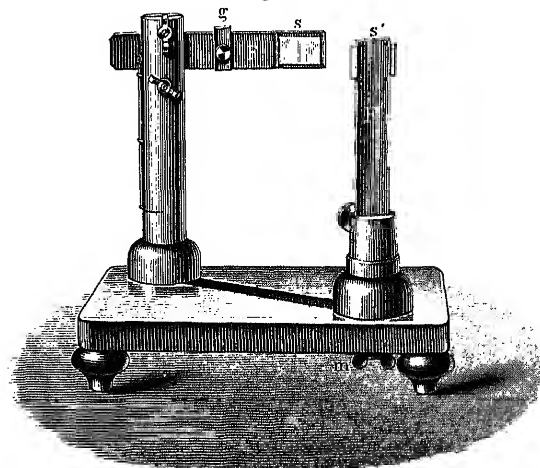
Um die Lissajousschen Figuren nach der in Fig. 688 dargestellten Methode hervorzubringen, bedient man sich gewöhnlich eines von König in Paris gelieferten vorzüglichen Apparates, dessen Stimmgabeln solche Dimensionen haben, daß sie große und lange anhaltende Vibrationen machen. Die Schenkel derselben besitzen bis zu 22 cm Länge, 5 mm Dicke und 10 mm Breite. Man beobachtet die Figuren entweder mittels eines Fernrohres, oder projiziert sie mittels einer Konvexlinse an eine weiße Wand, so daß sie einem ganzen Auditorium zugleich sichtbar werden. Sollen die Figuren hierbei ganz rein und scharf erscheinen, so müssen Stahlspiegel verwendet werden, welche aber den Apparat sehr verteuern.

Statt des Königschen Apparates kann man sich zu Demonstrationsversuchen auch einer sehr einfachen vom Verfasser konstruierten Vorrichtung bedienen, bei welcher die Stimmgabeln durch federnde Stahlstreifen ersetzt sind. Als Spiegel können rückwärts geschwärzte Spiegelglasscheibchen dienen.

Dieselbe ist in Fig. 696 abgebildet. F und F' sind die schwingenden Federn, s und s' die beiden Spiegel. Die Säulen, welche die Federn tragen, sind drehbar und können längs des schiefen Schlitzes im Fußbrett einander genähert und mittels der Flügelschrauben m befestigt werden. Die Schwingungsdauer der Federn wird entweder durch Anbringung oder Verschiebung von Laufgewichten g oder (bei der horizontalen Feder) durch Ver-

stellen derselben im Einschnitt der Tragsäule reguliert. Man beobachtet auch hier entweder direkt oder mittels Projektion an eine Wand, welche bei heller Lichtquelle keinerlei Schwierigkeit bietet. Klopft man mit einem harten Gegenstand auf die Mitte der Federn, so entstehen schön gekräuselte Figuren, welche von den Obertönen herrühren, die durch die Unterabteilung der Stahlstreifen in mehrere schwingende Partien momentan hervorgerufen werden.

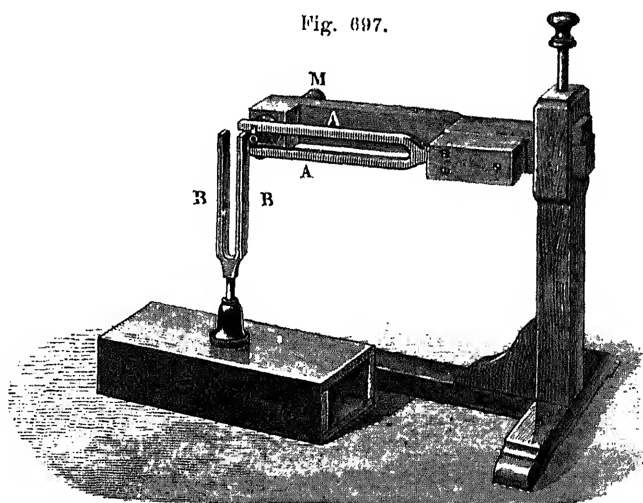
Fig. 696.



Eine andere Methode der optischen Zusammensetzung zweier senkrecht aufeinander stattfindender Schwingungen ist bei dem Komparator von Lissajous, welcher in der von H. Helmholtz vervollkommneten Konstruktion auch Vibrationsmikroskop genannt wird, in Anwendung gebracht. Dieser Apparat dient zunächst dazu, die Schwingungsdauer einer Stimmgabel mit der einer Normalstimmgabel von bekannter Tonhöhe aufs genaueste zu vergleichen.

Die Normalstimmgabel A, Fig. 697, ist in einem passenden Stativ so angebracht, daß ihre beiden Schenkel in einer Vertikalebene liegen und

Fig. 697.



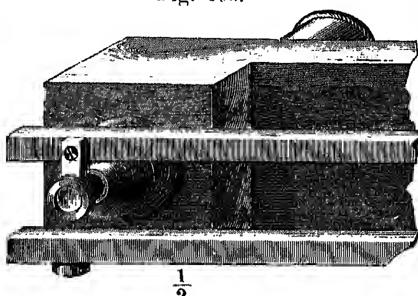
ihre Schwingungen in dieser Vertikalebene in der Richtung von oben nach unten vor sich gehen. — Der obere Schenkel der Normalstimmgabel trägt das Objektiv eines schwach vergrößernden Mikroskops, während an dem

anderen Schenkel ein entsprechendes Gegengewicht angebracht ist. Die Stimmgabel ist so adjustiert, daß sie mit dem Objektiv und dem Gegengewicht belastet einen bestimmten Ton gibt, also eine bestimmte Anzahl von Schwingungen in der Sekunde macht.

In Fig. 698 ist der vordere Teil der Stimmgabel A samt dem daran angeschraubten Objektiv in größerem Maßstabe dargestellt.

Vor der Normalgabel A wird nun die zu prüfende Stimmgabel B, etwa auf einem Resonanzkästchen befestigt, aufgestellt, und zwar so, daß die Vibrationsrichtung ihrer Schenkel horizontal, also rechtwinklig ist zu der Vibrationsrichtung der Stimmgabel A. Auf dem oberen Ende des einen Schenkels, welcher gerade vor dem Objektiv o stehen muß, ist auf irgend eine Weise[1]) ein Punkt markiert, den wir p nennen wollen.

Fig. 698.



$\frac{1}{2}$

Das Rohr des Mikroskops, dessen Objektiv an die Stimmgabel A angeschraubt ist, steckt hinter diesem Objektiv in dem Stativ, wie man in Fig. 697 und noch deutlicher in Fig. 698 sieht. Dieses Mikroskop unterscheidet sich von einem gewöhnlichen nur dadurch, daß das Objektiv nicht an der Mikroskopröhre, sondern dicht vor derselben an der Stimmgabel befestigt ist.

Durch das Okular bei M in das Mikroskop hineinschauend, sieht man nun das Bild des markierten Punktes p, welcher ruhig steht, wenn keine der Stimmgabeln vibriert. Oszilliert die Stimmgabel A allein, so beschreibt der Punkt p eine vertikale Linie; vibriert die Stimmgabel B allein, so beschreibt er eine horizontale Linie, wenn aber endlich beide Stimmgabeln vibrieren, so beschreibt p eine Kurve, deren Gestalt von dem Intervall der Stimmgabeln abhängt.

Nehmen wir z. B. an, die Stimmgabeln seien auf Unisono gestimmt, so muß der Punkt p eine der auf Fig. 695, erste Reihe, verzeichneten Kurven zu beschreiben scheinen.

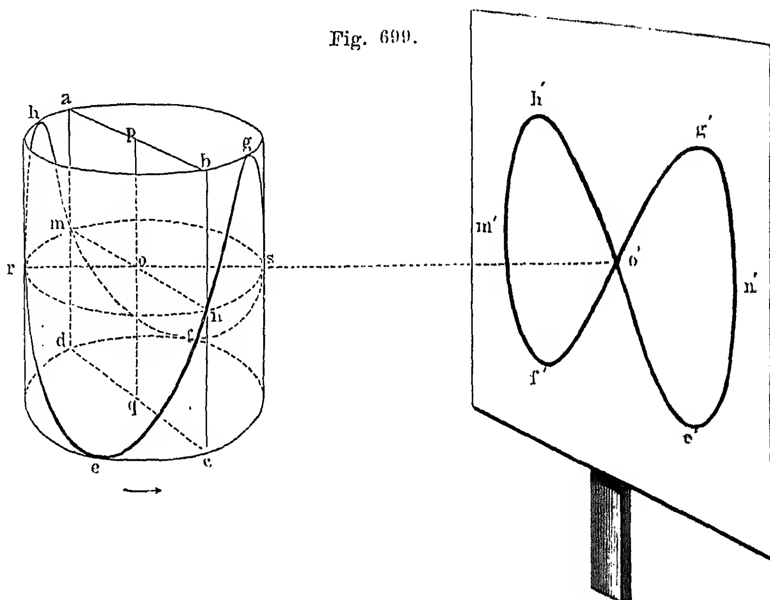
Welche von diesen Figuren, z. B. ob Ellipse oder ob gerade Linie, beschrieben wird, das hängt von dem vorhandenen Phasenunterschiede ab. Da man schwer imstande ist, die Bewegung beider Gabeln absolut gleichzeitig beginnen zu lassen, so wird im allgemeinen bei jedesmaligem neuen Ingangsetzen eine andere Ellipse entstehen, welche aber dann, eine absolut gleiche Tonhöhe vorausgesetzt, so lange andauert, als die Gabeln ungestört fortschwingen. Ist aber die Stimmung keine absolut richtige, so eilt allmählich die eine Gabel der anderen voraus, es entsteht ein immer größerer Phasenunterschied und es entstehen deshalb der Reihe nach die diesen verschiedenen Phasenunterschieden entsprechenden Figuren, welche allmählich ineinander übergehen. Dabei beobachtet man überdies als auffallende Erscheinung, daß die Figuren sich um eine in der Bildebene liegende Achse zu

[1]) Man bestaubt die geschwärzte Fläche mit Stärkemehl, deren Körnchen weiße Punkte darstellen.

drehen scheinen. Dasselbe zeigt sich auch bei den anderen Entstehungsweisen dieser Figuren. Wie diese Täuschung entsteht, kann auf folgende Weise erklärt werden.

Man denke sich, Fig. 699, einen weißen Schirm, in sehr große Entfernung davon ein Licht und dazwischen die mit dem Schirme parallele Ebene *abcd* gestellt. In dieser Ebene werde ein Punkt *o* zu horizontalen und vertikalen Schwingungen nach den Amplituden *mn* und *pq* veranlaßt. Die vertikalen Schwingungen erfolgen beispielsweise doppelt so schnell als die hori-

Fig. 699.



zontalen. Der Schatten, der dann bei der Phasendifferenz = 0 auf dem Schirme entworfen wird, hat die gezeichnete Gestalt, nämlich dieselbe, wie die vom schwingenden Punkte beschriebene Figur. Jetzt denken wir uns denselben Punkt mit derselben vertikalen Bewegung von *o* nach *r* übertragen und statt der horizontalen längs *mon* erfolgenden Schwingungsbewegung eine gleichförmige Bewegung auf dem Kreise *rnsmr* ausführen; es muß dann eine kombinierte Bewegung auf der Zylinderfläche, nämlich *rengsfmhr*, entstehen. Da nun aber die gleichförmige Bewegung längs der Peripherie des Kreises, auf den Durchmesser projiziert, die schwingende Bewegung gibt (§ 54), so muß sie auch, auf den Schirm projiziert, dieselbe geben. Das heißt, ein längs *mrns* gleichförmig bewegter Punkt gibt einen zwischen *m'* und *n'* hin und her schwingenden Schatten. Hat er außerdem eine vertikal schwingende Bewegung, so erzeugt der Schatten die Lissajoussche Figur. Wickeln wir jetzt die Zylinderfläche ab, so enthält dieselbe eine Kurve eingezeichnet, welche entsteht, wenn ein Punkt längs der Abszissenachse gleichförmig, längs der Ordinatenachse schwingend sich bewegt. Es ist dies die § 54 abgeleitete und S. 167 gezeichnete Schwingungskurve, und zwar werden zwei Wellenlängen derselben längs der abgewickelten Peripherie aufgetragen sein. Die auf dem Schirme entstehende Figur ist

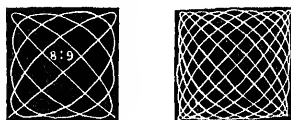
also als Schatten einer auf der Zylinderfläche aufgewickelten Schwingungskurve zu betrachten.

In der Zeichnung ist angenommen, daß die vertikale und die horizontale Bewegung gleichzeitig von o bzw. r ausgehen. Es liegt deshalb der Durschnittspunkt der Schwingungskurve und des Halbkreises mrn (der aufgewickelten Abszissenachse) in der Verlängerung von $o'o$. Um eine Phasendifferenz hervorzurufen, müßten wir die Zeichnung der Schwingungskurve auf dem Zylinder etwas aus ihrer Lage drehen, oder wenn wir uns die Zeichnung fest denken, müßten wir den Zylinder samt Zeichnung etwas um seine Achse drehen. Geschieht dies in der Richtung des Pfeiles, so rückt der Teil hre der Kurve mehr nach vorn, ihre Schatten $h'o'e'$ mehr nach rechts; dagegen der Teil gsf mehr nach hinten, ihr Schatten $g'o'f'$ mehr nach links. Die Projektion dieser so verschobenen Schwingungskurve auf die Ebene $abcd$, also auch ihr Schatten auf dem Schirme, muß daher die entsprechende Lissajoussche Figur für eine vorhandene Phasendifferenz geben. Dreht sich der Zylinder langsam, so entsteht auch langsam die Reihe der Figuren, welche der langsam zunehmenden Phasendifferenz entsprechen, wie sie Figur 695, zweite Reihe (nur sind die Figuren dort in der Papierebene um 90° verdreht gezeichnet) aufgeführt sind. Denken wir uns jetzt ein Auge an Stelle des schattenwerfenden Lichtes, so verstehen wir leicht, daß die sich drehende Schwingskurve des durchsichtig gedachten Zylinders demselben ebenso erscheint wie der entsprechende Schatten. Umgekehrt wird daher auch die Reihe der Lissajousschen Figuren für die zunehmende Phasendifferenz dem Auge ebenso erscheinen wie die sich drehende Schwingungskurve. Es läßt sich dies einfach zeigen, indem man auf einen Glaszylinder eine aus schwarzem Papier ausgeschnittene Schwingungskurve aufklebt, welche, wie die Kurve $rengsfmhr$ in Fig. 699, sich um den Zylinder herumlegt. Blickt man aus einiger Distanz gegen den Zylinder, während man ihn um die Achse dreht, so erhält man einen Anblick, welcher der sich scheinbar drehenden Lissajousschen Figur gleicht. Auch mit Drahtfiguren kann diese Drehung gezeigt werden.

Dasselbe gilt nun auch beim Anblick der Kurven des Vibrationsmikroskops, sowie überall, wo wir Lissajoussche Figuren entstehen sehen. Zeigen dieselben eine drehende Bewegung, so deutet dies auf eine sich allmählich ändernde Phasendifferenz und mittelbar auf ein nicht genau hergestelltes Verhältnis der Schwingungsdauer. Sollten z. B. zwei Stimmgabeln unisono gestimmt sein, hat aber in Wirklichkeit die eine die Schwingungszahl 440, die andere 440,1, so eilt die letztere der ersteren pro Sekunde um $^1/_{10}$ Schwingung voraus, in 10 Sekunden vollführt sich also die ganze Reihe der Phasendifferenzen; die entsprechende Lissajoussche Figur wird daher binnen 10 Sekunden sich einmal drehen. Angenommen, man beobachte an diesen Gabeln ein anderes Mal, daß die Lissajoussche Figur in der Minute eine Drehung vollende, so weiß man, daß auf $440 \times 60 = 26\,400$ Schwingungen der einen Gabel 26401 Schwingungen der anderen Gabel kommen, daß also ihr Intervall $= \frac{26\,401}{26\,400} = 1{,}000038$ sei. Hieraus ersieht man, wie außerordentlich empfindlich dieses Verfahren zur Vergleichung der Tonhöhe sein müsse. Man begreift auch, daß es viel schwieriger ist, ruhig stehende Figuren zu erhalten, als drehende. Es genügt die geringste Belastung mit einem Stückchen Wachs, um erstere zum Drehen zu bringen.

welche Wirkung durch eine beträchtliche Verstimmung eines reinen Intervalls hervorgebracht wird. Die Fig. 700 zeigt die zwei verschiedenen Phasendifferenzen entsprechenden Lissajousschen Kurven für das Intervall 8 : 9. Sowie wir dieses Verhältnis einerseits als das reine Intervall $\frac{8}{9}$, andererseits als das beträchtlich verstimmte Intervall $\frac{1}{1}$, also als stark verstimmtes Unisono auffassen können, so läßt die Fig. 700 zwei Auffassungen zu. Einmal betrachten wir die ganze Figur als eine einzige, geschlossene Kurve, welche vollkommen ruhig steht. Anderenfalls betrachten wir sie als eine Reihe von sich rasch ändernden Ellipsen, welche in der für ein verstimmtes Unisono abgeleiteten Weise rasch bald durch die Formen des Kreises, bald durch die der schrägen Geraden hindurch ineinander übergehen. Man braucht nur den Linien der Fig. 700 langsam nachzugehen, um dies aufzufinden. Natürlich ist keine der einzelnen Ellipsen in sich geschlossen, weil jede während ihres Entstehens sich bereits verändert. Auch sind es selbstverständlich keine genauen Ellipsen. Ob dem Auge eine solche durch einen schwingenden Körper wirklich hervorgebrachte (nicht bloß abgebildete) Kurve in der einen oder der anderen Weise erscheint, hängt von der Zeitdauer ab, innerhalb welcher die 8 bzw. 9 Schwingungen zustande kommen. Ist diese nicht länger als die Nachwirkung auf die Netzhaut des Auges, so wird dasselbe die ganze Kurve auf einmal und ruhig stehend erblicken, also die Figur des reinen Intervalls $\frac{8}{9}$ sehen. Dauert die Nachwirkung auf der Netzhaut aber nur während eines Bruchteils der Zeit, innerhalb welcher die ganze Figur zustande kommt, so sieht das Auge nur die sehr rasche Aufeinanderfolge der einzelnen Ellipsen, es nimmt also die mit rasch vergrößerter Phasendifferenz zustande kommenden Figuren des gestörten Intervalls $\frac{1}{1}$ wahr, wodurch ein unruhiges, schwer erkennbares Bild entsteht.

Fig. 700.



Das **Vibrationsmikroskop** unterscheidet sich vom **Lissajousschen** Komparator durch einen elektromagnetischen Apparat, der die Schwingungen der das Objektiv tragenden Gabel beliebig lange fortzusetzen gestattet.

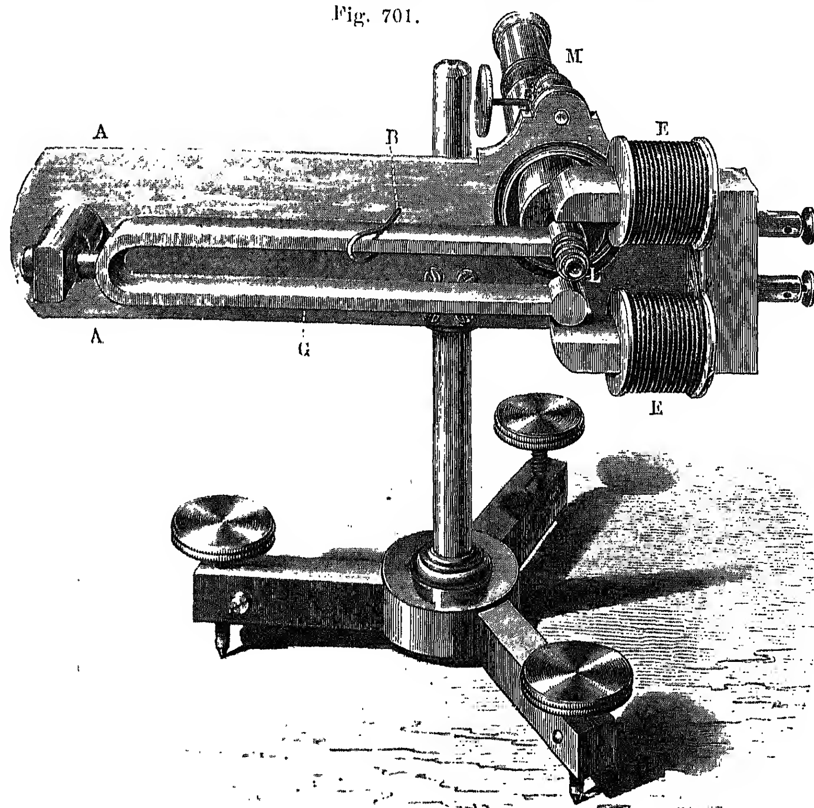
Fig. 701 zeigt eine Abbildung des **Helmholtzschen** Apparates, welcher nach dem früheren keiner weiteren Erklärung bedarf.

Eine verwandte Art, die Figuren von **Lissajous** zu reproduzieren, beruht auf der Anwendung sich senkrecht kreuzender schwingender Spalten. Fig. 702 zeigt einen Apparat, den der Verfasser zu diesem Zwecke angegeben. S ist ein schweres eisernes Prisma, an dessen abgeschrägten Enden schwingende Stahlstreifen befestigt sind, deren Enden zwei leichte Metallschirme mit feinen Spalten tragen.

Bringt man die Stahlstreifen zum Schwingen, so beschreibt der Durchkreuzungspunkt der Spalten eine **Lissajoussche** Figur, welche um 45° geneigt erscheint. Mittels eines Laufgewichtes L können die Figuren geändert werden. Sie lassen sich leicht auf einen Schirm projizieren.

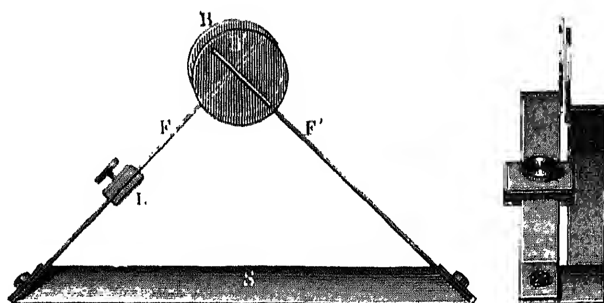
Fig. 703 stellt ferner einen Apparat vor, den der Verfasser konstruiert hat, um auf analoge Weise zwei beliebige Schwingungsarten senkrecht zu

Fig. 701.



kombinieren. In den Überzug der beiden geschwärzten Glasscheiben *S* und *S'* sind durchsichtige Kurven eingerissen, welche sich in der Zeichnung wie

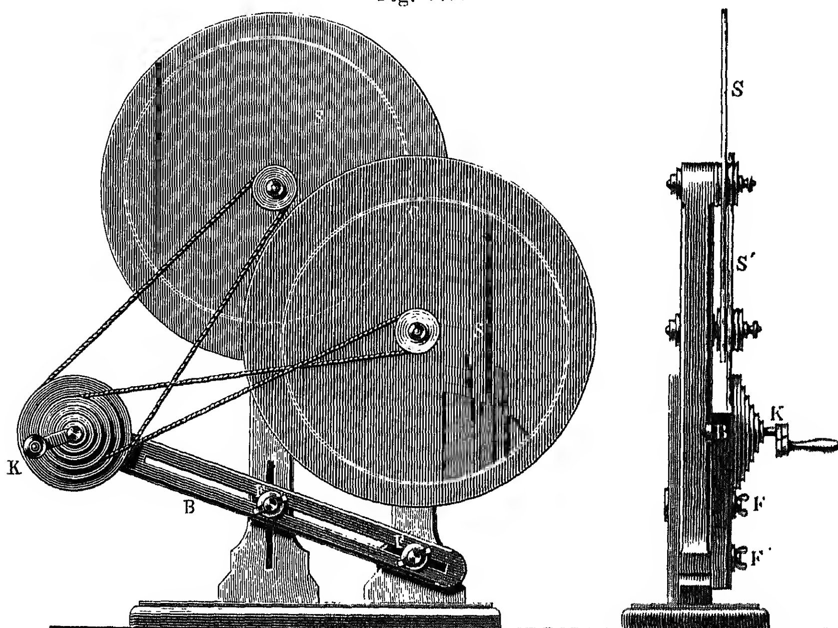
Fig. 702.



exzentrische Kreise darstellen, in Wirklichkeit aber Schwingungskurven sind von denen je eine Wellenlänge auf der Peripherie eines mit der Achse konzentrischen Kreises aufgetragen wurde. Steht die Scheibe *S* unbewegt und rotiert *S'*, so schwingt der Lichtpunkt *C* auf und ab; steht *S'* und rotiert *S*,

so schwingt er horizontal; rotieren beide Scheiben, so beschreibt er eine Lissajoussche Figur, deren Gattung von dem Verhältnis der Rotations-

Fig. 703.



geschwindigkeiten beider Scheiben abhängt. Der Anblick der Kurbelscheibe *K* mit den verschiedenen Schnurläufen und des Befestigungsmechanismus *B* wird genügen, um zu verstehen, wie die verschiedenen Verhältnisse hervorgerufen werden. Die Phasendifferenzen lassen sich durch verschiedene Spannung der Schnüre herstellen. Dieser Apparat ist jedoch nicht eigentlich zur Herstellung der gewöhnlichen Figuren von Lissajous bestimmt, wozu einfachere Mittel ausreichen, als vielmehr zur künstlichen Zusammensetzung beliebiger anderer Schwingungsformen, wie z. B. pendelartiger Schwingungen mit Saitenschwingungen, worauf wir später zurückkommen werden [1]).

Fig. 704.

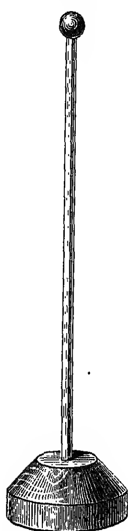
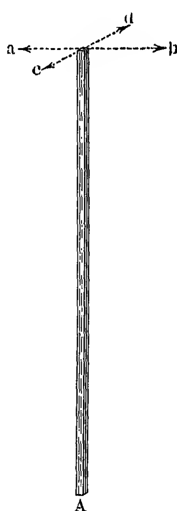


Fig. 705.

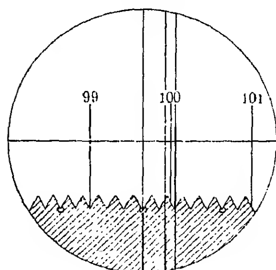


Eine besonders einfache Methode zur Erzeugung der in Rede stehenden Figuren endlich ist jene mittels des **Kaleidophons** von **Wheatstone**, Fig. 704. Ein elastisches Stäbchen von rektangulärer Form, welches am unteren Ende *A*, Fig. 705, festgeklemmt ist, kann sowohl in der Richtung

[1]) Einen ähnlichen Apparat hat Stöhrer konstruiert.

sind nur in Fig. 55a angedeutet), mit welchen man die Bruchteile der Teilung auf den Maßstäben mißt. Zu dem Ende ist nämlich an der Stelle, wo im Mikroskop das von der Objektlinse erzeugte Bild der Maßstabteilung erscheint, nicht bloß ein rechtwinkliges Fadenkreuz angebracht, sondern es sind dort außerdem noch auf einem besonderen Rahmen zwei den Teilstrichen parallele Faden in geringem Abstand voneinander aufgespannt, und dieser Rahmen ist ganz entsprechend wie die Mutter M in Fig 48, § 17 — man denke sich diese nur durch eine Öffnung durchbrochen — innerhalb einer Führung durch eine Mikrometerschraube mit geteilter Trommel verschiebbar, so daß man wie dort die Bruchteile der Schraubenumdrehung an der Trommel mit einem festen Index ablesen kann. Die ganzen Umdrehungen der Schraube aber werden hier gewöhnlich an einem sogenannten Rechen beobachtet, welcher mit den ganzen Umdrehungen entsprechenden Lücken zwischen seinen Zähnen an der Führung F (Fig. 48) im Innern angebracht ist und ebenso wie die Fäden und das Bild der Teilung hinter ihnen mit dem Okular des Mikroskops in seinem Gesichtsfeld vergrößert gesehen wird, etwa so, wie es die Fig. 56 darstellt. Die mit 99, 100 und 101 bezeichneten Striche mögen hier Millimeterstriche der Maßstabteilung mit ihrer Bezifferung darstellen, von denen, wie man sieht, je zwei benachbarte auf fünf Zacken des Rechens fallen, so daß also fünf Umdrehungen der Schraube 1 mm der Teilung entsprechen. Hat die Trommel 100 Teile, so werden wir also Verschiebungen des Parallelfadens direkt bis auf 0,002 mm an ihr ablesen und durch Schätzung der Zehntel-Trommelteile sogar bis 0,2 μ messen können.

Fig. 56.

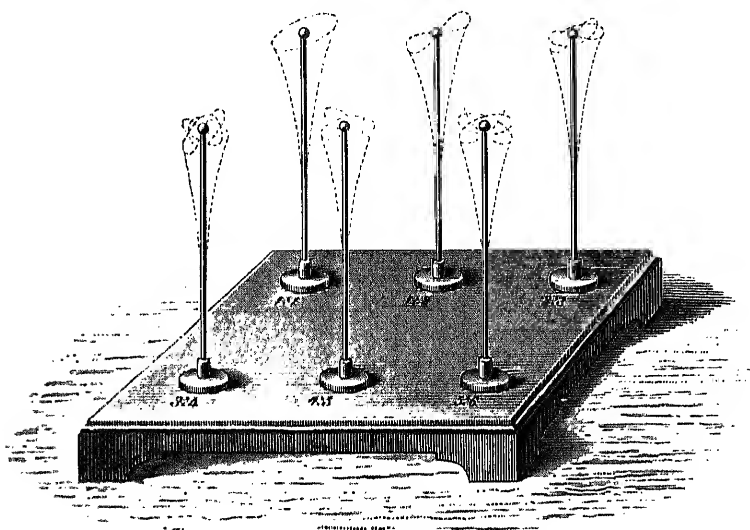


Bei der Messung bringt man durch Bewegung des Wagens zuerst den zu untersuchenden Maßstab vertikal unter die Mikroskope und stellt dann durch Drehung der Mikrometerschraube bei beiden je ihren Parallelfaden auf den der Mitte des Gesichtsfeldes nächsten Teilstrich des Maßstabes so ein, daß dieser, wie es z. B. die Fig. 56 für den Teilstrich 100 zeigt, den Zwischenraum zwischen den parallelen Faden genau halbiert, worauf man am Rechen die Stellung des Parallelfadens von der Mitte als Null aus gerechnet nach ganzen und an der Trommel nach Bruchteilen der Umdrehungen abliest. Durch Bewegung des Wagens führt man sodann rasch den Normalmaßstab vertikal unter die Mikroskope und macht dort durch Fortschiebung der Fadenplatten ebenfalls entsprechende Einstellungen der Parallelfaden auf die nächsten Teilstriche. Aus dem Unterschiede der jetzigen Ablesungen an den Filarmikrometern und der früheren wird das Verhältnis der beiden Maßstablängen zwischen den pointierten Strichen bis auf 0,2 μ unter den obigen Voraussetzungen berechnet. Man habe z. B. bei den obigen Messungen an den Mikrometern nach ganzen Umdrehungen u und Trommelteilen τ abgelesen:

	Links	Rechts
Am zu prüfenden Stabe	für den Millimeter 0	für den Millimeter 100
Mikrometer	$1^u\,51{,}2^\tau$	$1^u\,65{,}6^\tau$
am Normalstab	für den Millimeter 0	für den Millimeter 100
Mikrometer	$2^u\,38{,}6^\tau$	$2^u\,47{,}4^\tau$

ab als auch in der Richtung *cd* vibrieren, je nachdem man es nach der einen oder nach der anderen dieser beiden Richtungen aus seiner Gleichgewichtslage bringt. Ist aber die Dicke des Stäbchens nach der Richtung *ab* nicht gleich der Dicke desselben nach der Richtung *cd*, so wird die Vibrationsgeschwindigkeit des Stäbchens in der Ebene *Aab* verschieden sein von der Vibrationsgeschwindigkeit in der Ebene *Acd*. Wird das Stäbchen nach einer Rich-

Fig. 706.



tung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, welche mit keiner der eben genannten Ebenen zusammenfällt, so vibriert es in der Weise, daß sein oberes Ende eine Kurve beschreibt, deren Gestalt abhängt von dem Verhältnis der Dicke des Stäbchens in der Richtung *ab* zu der Dicke in der Richtung *cd*. Um die durch die Kurve beschriebene Figur sichtbar zu machen, brachte Wheatstone einen glänzenden Metallknopf an.

Fig. 706 zeigt die Abbildung einer Zusammenstellung von sechs Kaleidophonen auf einer schweren Fußplatte von R. König.

Als eine Vervollkommnung dieses Apparates ist das von Lippich und fast gleichzeitig von Melde konstruierte Universalkaleidophon zu bezeichnen, welches in Fig. 707 dargestellt ist. In einen Holtzklotz *A*, welcher in passender Weise an einem Tische befestigt ist, ist eine Messingfeder *B* eingeklemmt, welche ungefähr $1^1/_2$ mm dick und gegen 40 cm lang ist. Oben trägt die Feder *B* eine Messingklammer *D*, in welcher eine oben ein glänzendes Knöpfchen tragende Stahlfeder *C* steckt. Je nachdem man die Stahlfeder *C* mehr hinauf- oder herunterzieht, kann man es erreichen, daß ihre Schwingungsdauer gleich oder daß sie $^2/_3$ oder $^1/_2$ usw. von der Schwingungsdauer der Feder *B* ist. Statt des glänzenden Knöpfchens kann man auch nach J. Tollinger eine glimmende Sprengkohle mit Wachs ankleben, welche im Dunkeln die erwähnten Kurven besonders schön erscheinen läßt. Auch kann ein Spiegelchen aufgesetzt werden, durch welches ein Bündel Lichtstrahlen gegen eine weiße Wand reflektiert wird, wo dann die Kurve erscheint. Melde hat seinen Apparat auch für schiefwinkelige

Kombination eingerichtet und hierzu einen Atlas mit zahlreichen Figuren publiziert [1]).

Wolf befestigte die Spiegel an den schwingenden Zungen von Zungenpfeifen, so daß dieselben beliebig lange in Bewegung erhalten werde können, indem man die Pfeifen anbläst.

Am einfachsten gelangt man zu einer mechanischen Hervorbringung der besprochenen Figuren mittels geeigneter Pendelvorrichtungen. Für den

Fig. 707.

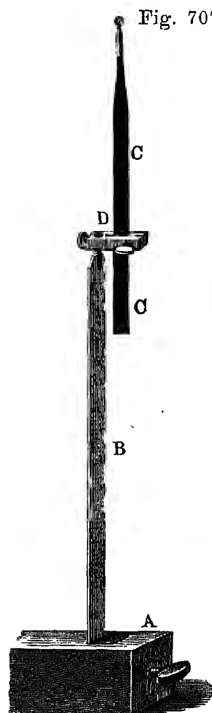
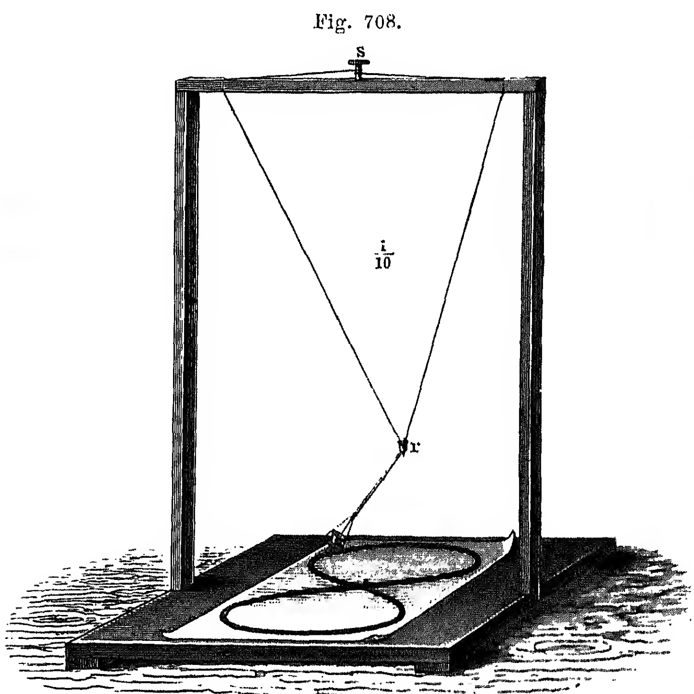


Fig. 708.



Fall gleicher Schwingungsdauer beider Komponenten genügt das einfache Fadenpendel, dessen Kugel in Ellipsen schwingt, die in eine gerade Linie oder einen Kreis übergehen können. Für die übrigen Verhältniszahlen eignet sich recht gut ein Apparat von der Form Fig. 708, bei welchem die Figuren durch den aus dem Trichter ausfließenden Sand aufgezeichnet werden. Durch Verschiebung des die Schnüre zusammenfassenden Röhrchens *r*, sowie durch entsprechendes Drehen der Schraube *s* lassen sich die verschiedenen Intervalle herstellen.

Vollkommeneres leisten die von Eisenlohr, Mos, Knoblauch konstruierten Pendelapparate. Der letztere zeichnet die entstehenden Kurven mit Tinte auf Papier und gestattet auch schiefwinkelige Zusammensetzungen.

§ 231. Schwingungen gespannter Saiten, Obertöne. Die Gesetze der Vibrationen gespannter Saiten sind zuerst von Mersenne (1588 bis 1648) experimentell begründet worden. Um zu untersuchen, wie die Schwin-

[1]) Melde, Lehre von den Schwingungskurven.

gungszahl einer Saite von ihrer Länge und ihrer Spannung abhängt, experimentierte er mit Saiten, welche lang genug waren, um ihre Schwingungen zählen zu können, und kam so zu dem wichtigen Satz, daß die Schwingungszahl einer Saite bei unveränderter Spannung ihrer Länge, bei unveränderter Länge aber der Quadratwurzel aus der Spannung umgekehrt proportional sei. Die mathematische Entwickelung des Problems der schwingenden Saiten wurde zuerst von Taylor (*Methodus incrementorum* 1716) in Angriff genommen und teilweise gelöst. Dieses Problem veranlaßte ein halbes Jahrhundert lang die lebhaftesten Diskussionen zwischen den ersten Mathematikern. J. Bernouilli, d'Alembert, Euler und Daniel Bernouilli hatten viel darüber geschrieben, als Lagrange im Jahre 1759 fast zu Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn alle Schwierigkeiten hob und den Diskussionen ein Ende machte.

Bezeichnet
- l die Länge einer Saite,
- p das Gewicht derselben,
- s die Kraft, welche sie spannt,
- g die beschleunigende Kraft der Schwere (also 981, wenn man das Centimeter zur Längeneinheit nimmt, wobei dann das Gramm zur Gewichtseinheit genommen werden muß, in welcher p und s auszudrücken sind),
- t die Schwingungsdauer der Saite (nach der Bezeichnung der französischen Physiker die Zeit für einen Hingang oder Hergang), so ist

$$t = \sqrt{\frac{p \,.\, l}{g \,.\, s}}.$$

Bezeichnet φ das spezifische Gewicht der Substanz, aus welcher die Saite verfertigt ist, r aber den Halbmesser derselben, so ist $p = \pi r^2 l \varphi$, also auch:

$$t = r \,.\, l \sqrt{\frac{\pi \,.\, \varphi}{g \,.\, s}}.$$

Bezeichnet ferner z die Anzahl der Schwingungen, welche die Saite in einer Sekunde vollendet, so ist $zt = 1$ oder $z = \frac{1}{t}$, folglich auch:

$$z = \frac{1}{r \,.\, l} \sqrt{\frac{g \,.\, s}{\pi \,.\, \varphi}}.$$

Das durch diese Formel, deren Ableitung ohne höhere Mathematik nicht wohl möglich ist, ausgesprochene Gesetz heißt in Worten ausgedrückt:

1. Die Schwingungszahl einer Saite verhält sich umgekehrt wie ihre Länge, d. h. wenn eine Saite auf irgend ein Instrument, wie eine Violine, eine Guitarre usw., aufgespannt ist und in einer gegebenen Zeit eine bestimmte Anzahl von Schwingungen macht, so macht sie in derselben Zeit 2 mal, 3 mal, 4 mal usw. so viel Schwingungen, wenn man bei unveränderter Spannung nur $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ usw. der ganzen Länge schwingen läßt; sie würde $^3/_2$-, $^4/_3$-, $^5/_4$ mal so schnell schwingen, wenn man nur $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ der ganzen Länge schwingen ließe.

2. Die Zahl der Schwingungen einer Saite ist der Quadratwurzel aus den spannenden Gewichten proportional, d. h. wenn das Gewicht, welches die Saite spannt, 4 mal, 9 mal, 16 mal so groß gemacht wird, während ihre Länge unverändert bleibt, so wird die Anzahl der Schwingungen 2 mal, 3 mal, 4 mal so groß.

3. Die Schwingungszahlen verschiedener Saiten derselben Materie verhalten sich umgekehrt wie ihre Dicke. Wenn man z. B. zwei Stahlsaiten von gleicher Länge nimmt, deren Durchmesser sich wie 1 zu 2 verhalten, so wird die dünnere bei gleicher Spannung in derselben Zeit doppelt so viel Schwingungen machen als die dickere. Für Darmsaiten ist dieses Gesetz wohl nicht immer genau wahr, weil sie nicht immer ganz gleichartig sind.

4. Die Schwingungszahlen von Saiten verschiedener Materien verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln ihrer spezifischen Gewichte. Wenn z. B. eine Saite von Kupfer, deren spezifisches Gewicht 9 ist, und eine Darmsaite, deren spezifisches Gewicht 1 ist, gleiche Länge und gleichen Durchmesser haben, und wenn beide durch gleiche Gewichte gespannt sind, so schwingt die Kupfersaite dreimal langsamer als die Darmsaite.

Es versteht sich von selbst, daß diese Gesetze nur für solche Saiten gelten, die ihrer ganzen Dicke und Länge nach homogen sind, daß sie also nicht unmittelbar auf Darmsaiten, welche mit Metallfäden übersponnen sind, angewandt werden können. Die metallische Hülle ist hier eine träge Masse, welche durch die Elastizität der Saite in Bewegung gesetzt werden muß und welche die Schwingungsdauer vergrößert [1]).

Um die wichtigsten Gesetze der Oszillationen gespannter Saiten und ihrer Töne durch den Versuch nachzuweisen, bedient man sich des im § 217 beschriebenen Monochordes [2]).

Prüfen wir zuerst den Zusammenhang, welcher zwischen der Spannung der Saite und der Tonhöhe besteht. Wenn für ein Gewicht von 1000 g, welches an den Haken *P*, Fig. 709, gehängt wird, die Saite einen bestimmten Ton gibt, den wir mit *c* bezeichnen wollen, so muß man

das Gewicht 1562,5 anhängen, um die große Terz,
" " 2250 " " " Quint,
" " 4000 " " " Oktav

von *c* zu erhalten. Nun verhalten sich aber die Zahlen 1000 : 1562,5 : 2250 : 4000 zueinander wie $1 : \frac{25}{16} : \frac{9}{4} : 4$, oder wie die Quadrate von 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, 2, wodurch der Satz unter Nr. 2 bewiesen ist.

Die Ausführung dieses Versuches bietet dadurch einige Schwierigkeit, daß es schon eines ziemlich bedeutenden Gewichtes bedarf, um selbst mit

---

1) Über die Schwingungen von Saiten veränderlicher Dichte liegt eine theoretische Arbeit von M. Radakovic (Monatshefte f. Mathematik u. Physik V) vor, welche auch die frühere Literatur über diesen Gegenstand angeführt enthält.

2) E. Grimsehl empfiehlt zu derartigen Schulversuchen eine 60 m lange, durch einen Flaschenzug gespannte Stahlsaite, deren Spannung durch eine Federwage gemessen wird. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 15, 200 (1902).

einer dünnen Saite einen einigermaßen klangvollen Ton zu erhalten, so daß es unter Umständen nicht geraten erscheint, das vierfache Gewicht anzuwenden, um die Oktav des ursprünglichen Tones zu erhalten. Es genügt aber zu zeigen, daß man durch Anwendung eines $^{25}/_{16}$ mal oder eines $^{9}/_{4}$ mal

Fig. 709.



so großen Gewichtes die große Terz oder die Quinte des ursprünglichen Tones erhält. Auch eignet sich zu diesem Versuch eine Darmsaite besser als eine Stahlsaite.

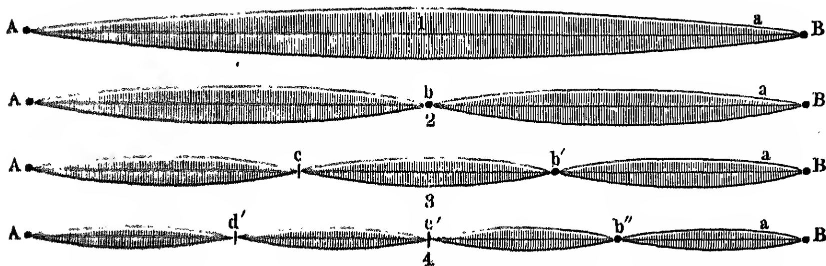
Das Gesetz unter Nr. 2 haben wir bereits durch die im § 217 aufgeführten Versuche erwiesen. Von dem Grundton, welchen die Saite gibt, wenn man sie ihrer ganzen Länge nach schwingen läßt, erhält man:

die große Terz, wenn der freischwingende Teil $^{4}/_{5}$,
die Quint, „ „ „ „ $^{2}/_{3}$,
die Oktav, „ „ „ „ $^{1}/_{2}$

der ganzen Saitenlänge beträgt [1]).

Nach der oben gegebenen Taylorschen Formel ist die Tonhöhe proportional der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Spannung zur Länge. Daraus folgt, daß für eine elastische Saite, deren Gesamtlänge proportional

Fig. 710.



dem spannenden Gewicht ist, die Tonhöhe sich mit stärkerer Spannung nicht ändern kann. Dieses Resultat ist durch V. v. Lang [2]) an Kautschukfäden innerhalb gewisser Grenzen bestätigt worden; auch das Verhältnis zwischen den Tonhöhen der Transversalschwingungen zu den Longitudinalschwingungen ergab sich der Theorie entsprechend.

Wenn man die Saite an irgend einem Punkt sanft mit dem Finger oder mit der Faser einer Feder berührt, so ist freilich die freie Bewegung des

---

[1]) Ein für genaue Versuche bestimmtes Monochord beschreibt Weber im 15. Bande (1829) von Pogg. Ann.

[2]) Wien. Akad. Ber., math. Klasse, Bd. 107 (1898) und Bd. 108 (1899).

berührten Punktes verhindert, aber die Vibrationen des rechts vom berührten Punkt liegenden Saitenstückes pflanzen sich auf das links liegende fort und umgekehrt.

In Fig. 710 stelle Nr. 1 den Schwingungszustand einer Saite dar, welche zwischen den festen Punkten A und B ausgespannt und, bei a mit dem Fiedelbogen gestrichen, ihrer ganzen Länge nach schwingt, also ihren Grundton gibt.

Wenn man aber nun die Mitte der Saite bei b sanft mit einem Finger oder auch mit der Fahne einer Vogelfeder berührt und dann bei a streicht, so kann jetzt die Saite nicht mehr ihrer ganzen Länge nach schwingen, weil der Punkt b sich nicht bewegen kann. Zunächst schwingt die gestrichene Hälfte bB für sich; sie gibt aber die Oktav des Grundtones, weil bei gleicher Spannung die Länge der Saite auf $^1/_2$ reduziert ist.

Wenn aber das Saitenstück bB schwingt, so teilen sich seine Schwingungen auch der anderen Saitenhälfte bA mit, welche nun gleichfalls doppelt so viele Schwingungen in der Sekunde macht, als wenn die Saite AB ihrer ganzen Länge nach vibrierte. Man kann die Schwingungen des Saitenstückes bA leicht dem Auge sichtbar machen, wenn man kleine Papierreiter, d. h. kleine Papierstückchen, aufsetzt, welche so gebogen sind, wie es Fig. 711 in natürlicher Größe darstellt. Alle die zwischen A und b aufgesetzten Reiter geraten in hüpfende Bewegung, sobald die Saite bei a gestrichen wird, und werden abgeworfen, wenn die Schwingungen lebhaft genug sind.

Fig. 711.



Wird die Saite AB, Fig. 710, mit dem Finger oder der Federfahne in einem Punkte b', Nr. 3, angehalten, welcher um $^1/_3$ der Saitenlänge AB von B absteht, so wird, wenn man bei a streicht, das dreimal kürzere Saitenstück $b'B$ auch dreimal schneller schwingen als die ganze Saite AB, man wird also die Quint der Oktav, oder, was dasselbe ist, die Duodecime des Grundtones von AB hören.

Die Schwingungen des Saitenstückes $b'B$ pflanzen sich aber auch auf das Saitenstück $b'A$ in der Weise fort, daß sich Ab' in zwei Teile, Ac und cb', Nr. 3, teilt, deren jedes so lang ist wie $b'B$, und deren jedes für sich schwingt. Die beiden Saitenstücke Ac und cb' sind durch den Knotenpunkt c getrennt; zwischen A und c, sowie zwischen c und b', b' und B befinden sich Bäuche.

Das Vorhandensein des Schwingungsknotens c, Nr. 3, läßt sich mit Papierreitern leicht nachweisen, wenn man eine Reihe derselben zwischen b' und A aufsetzt und dann bei a streicht; der bei c bleibt ruhig sitzen, während die anderen abgeworfen werden oder doch lebhaft tanzen.

Hält man den Finger oder die Federfahne an einen Punkt b'', Nr. 4, welcher um $^1/_4$ der ganzen Saitenlänge von B entfernt ist, so teilt sich die bei a mit dem Fiedelbogen gestrichene Saite in vier gleiche Teile, deren jeder für sich schwingt und deren jeder von dem benachbarten durch einen Schwingungsknoten getrennt ist, es bilden sich also drei Schwingungsknoten, b'', c' und d', und vier Bäuche, wie Nr. 4 der Figur zeigt. Man hört nun die zweite Oktav des Grundtones, da jeder Teil der Saite, also Ad', $d'c'$, $c'b''$ und $b''B$ viermal schneller schwingt als die ganze Saite AB.

Hielte man den Finger an eine Stelle b''', welche um $^1/_5$ der Saitenlänge von B entfernt ist, so würde durch Streichen bei a ein Ton entstehen, dessen Schwingungen fünfmal schneller sind als die des Grundtones, man würde also die große Terz der zweiten Oktav des Grundtones hören, während die Saite durch vier Schwingungsknoten in fünf Bäuche geteilt wird.

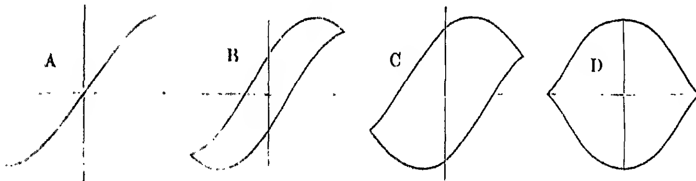
Die Töne, welche zweimal, dreimal, viermal, fünfmal usw. so viel Schwingungen in der Sekunde machen als der Grundton, werden die Obertöne dieses Grundtones genannt. Wenn also die Saite schwingt, wie in Nr. 2, Nr. 3 und Nr. 4 der Figur angedeutet ist, so hört man ihren ersten, ihren zweiten, ihren dritten Oberton.

Das gleichzeitige Vorhandensein dieser Obertöne hat nicht allein Einfluß auf den Klang der Saite, sondern ist auch im Zusammenhange mit dem zeitlichen Verlaufe der Schwingungsbewegung, welche demgemäß sehr von jener Form abweicht, welche wir bei der Stimmgabel beobachten können und welche wir als pendelartige oder harmonische Schwingungsart bezeichnet haben.

Dies läßt sich am besten mittels des Vibrationsmikroskops nachweisen. Will man mit diesem die Vibrationen einer Violinsaite untersuchen, so wird die Violine vor dem Apparat, Fig. 701, S. 683, so befestigt, daß die fragliche Saite in vertikaler Richtung gerade vor die Mitte des Objektivs L zu stehen kommt. Um ein Pünktchen auf der Saite zu markieren, welches durch das Mikroskop beobachtet werden soll, wird die betreffende Stelle der Saite mit Tinte geschwärzt, wenn sie trocken geworden ist, mit Klebwachs eingerieben und dann etwas Stärkemehl darauf gepulvert, wovon einige Körnchen haften bleiben, von denen dann eines durch das Mikroskop beobachtet wird, während Stimmgabel und Saite vibrieren.

Vibriert die Stimmgabel allein, so erscheint das beobachtete weiße Pünktchen als eine vertikale Linie; vibriert die Saite allein, so erscheint es

Fig. 712.



als eine horizontale Linie; vibrieren aber beide gleichzeitig, so beobachtet man eine Kurve, welche von dem musikalischen Intervall der Stimmgabel und der Saite abhängt.

Nehmen wir z. B. an, die Saite sei unisono mit der Stimmgabel, so müßte eine der auf S. 676, Fig. 695, erste Reihe, dargestellten Figuren erscheinen, wenn die Vibrationen der Saite nach demselben Gesetz vor sich gingen wie die Schwingungen der Stimmgabel. Für den Fall, daß die Mitte der Saitenlänge dem Mikroskopobjektiv gegenübersteht und daß die Saite mit dem Violinbogen gestrichen wird, erscheinen aber die Fig. 712 abgebildeten Figuren, und zwar tritt Fig. 712 A statt der schiefen Geraden, Fig. 712 B und C statt der Ellipsen, Fig. 712 D statt des Kreises auf. Aus dieser veränderten Form der Lichtkurven kann man aber auf die Schwingungsform der Saite schließen.

Es läßt sich leicht durch Konstruktion der Beweis liefern, daß gerade diese Figuren entstehen, wenn ein Punkt in vertikaler Richtung nach dem Pendelgesetz und zugleich in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und her schwingt. Zu diesem Zwecke konstruieren wir ein Punktsystem, ähnlich dem der Fig. 690, S. 673, jedoch mit dem Unterschiede, daß die horizontalen Abstände der Punkte einander gleich gemacht werden. Fig. 713 zeigt ein solches Punktsystem. Indem wir nun ganz nach den im § 229 abgeleiteten Konstruktionsregeln verfahren, erhalten wir für die Phasendifferenz $= 0$, $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$ die in Fig. 713 gezeichneten Kurven, welche mit den wirklich beobachteten der Fig. 712 übereinstimmen. Daraus müssen wir schließen, daß die Schwingungen der Violinsaite nicht nach dem Pendelgesetz, sondern mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen. Wenn wir daher für diese Schwingungsform die zugehörige Schwingungskurve analog der im § 54, S. 143 gezeichneten Schwingungskurve eines pendelartig schwingenden Körpers zeichnen wollen, so wird dieselbe die in Fig. 714 abgeleitete Form a' g' a'' g'' erhalten, wie aus der von selbst verständlichen Konstruktion unmittelbar hervorgeht. Um dieses Resultat auch auf synthetischem Wege durch ein Experiment zu demonstrieren, kann man sich des vom Verfasser konstruierten Apparates, Fig. 703, S. 684, bedienen. Man ersetzt zu diesem Zwecke eine der beiden Scheiben durch eine andere, auf welcher statt der Pendelkurve die Schwingungskurve a' g' a'' längs eines konzentrischen Kreises aufgetragen ist. Man erhält dann beim gleich schnellen Drehen beider Scheiben die Kurven der Fig. 712.

Fig. 713.

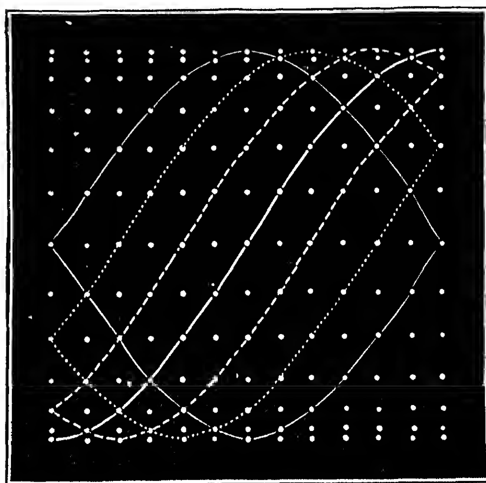
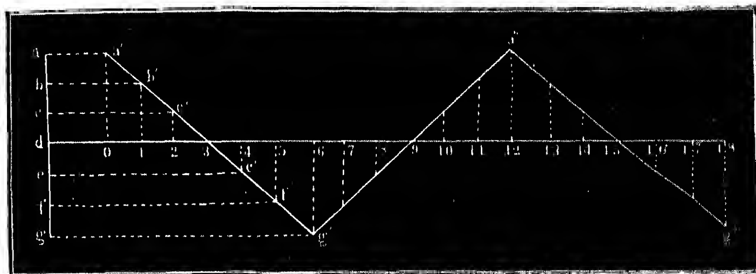


Fig. 714.



Recht einfach ist auch folgende Weise der Untersuchung. Man läßt zwei Saiten welche über Kreuz aufgespannt sind, in Ebenen schwingen,

welche zu den beiden Saiten parallel sind. Es entsteht dann eine Figur, welche jener von Lissajous verwandt ist, aus welcher sich auf das Schwingungsgesetz zurückschließen läßt. Ein Punkt, welcher zu zwei rechtwinkelig aufeinander gerichteten Schwingungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit gezwungen wird, beschreibt bei Unisono je nach der Phasendifferenz ein Quadrat oder ein Rechteck, bei der Oktave eine aus zwei Vierecken bestehende Acht usf., wie sie sich leicht entwickeln läßt, wenn man in Fig. 713 die vertikalen Punktreihen ebenso anordnet wie die horizontalen. Die überkreuzten Saiten repräsentieren zwar nicht einen einzigen derartigen schwingenden Punkt, geben aber eine Figur, welche sich leicht deuten läßt. Man hat übrigens gar nicht nötig, die Saiten über Kreuz zu spannen. Man kann zwischen die parallel gespannten Saiten ein Spiegelchen derart unter 45° aufstellen, daß man in einem Fernrohr die vordere Saite direkt horizontal und die rückwärtige als vertikales Spiegelbild erblickt. Ogden N. Rood[1]) hat auf analoge Weise die Schwingungen von Stäben, Platten, Glocken und Membranen studiert.

Wir kommen auf die Deutung der Schwingungskurve der Fig. 714, sowie auf ihren Zusammenhang mit der Klangfarbe an geeigneter Stelle nochmals ausführlicher zurück.

§ 232. Transversalschwingungen elastischer Stäbe. Unter elastischen Stäben verstehen wir feste Körper von solcher Form, daß ihre Länge sehr bedeutend ist im Vergleich zu ihrer Breite und Dicke, welche aber doch noch breit und dick genug sind, um ihnen die Biegsamkeit der Saiten zu benehmen, so daß also solche Stäbe ohne weiteres schon Elastizität genug haben, um zu vibrieren und zu tönen, und nicht erst einer Spannung bedürfen, wie die Saiten.

Ein solcher Stab kann, wie eine gespannte Saite, mehrere Töne geben, je nachdem sich mehr oder weniger Knotenlinien in demselben bilden.

Die Beziehung der Schwingungszahl eines Stabes und seiner Dimensionen ist durch die Formel

$$z = C \frac{e}{l^2} \sqrt{\frac{gK}{s}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ausgedrückt, in welcher z die Schwingungszahl, l die Länge des Stabes, e dessen Dicke in der Richtung der Schwingungen und C einen konstanten Faktor bezeichnet, welcher von der Art abhängt, in welcher der Stab unterstützt oder eingeklemmt ist, sowie auch von der Anzahl der Schwingungsknoten, durch welche er sich abteilt. Es bezeichnet ferner g die beschleunigende Kraft der Schwere, K den Elastizitätsmodulus und s das spezifische Gewicht der Substanz, aus welcher der Stab verfertigt ist.

Nach der Gleichung (1) ist also die Schwingungszahl eines Stabes

1. direkt proportional der Dicke,
2. umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge,
3. direkt proportional der Quadratwurzel aus dem Elastizitätsmodulus,
4. umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem spezifischen Gewichte der Substanz.

---

[1]) Pogg. Ann. **154**, 604.

Von der Breite des Stabes ist die Schwingungszahl unabhängig.

Den tiefsten Ton, dessen ein Stab überhaupt fähig ist, gibt er, wenn sich seiner ganzen Länge nach kein Schwingungsknoten bildet, wie es der Fall ist, wenn das eine Ende desselben auf zweckmäßige Weise eingeklemmt wird.

Bei einem elastischen Streifen, welcher eingeklemmt ist, wie Fig. 715 zeigt, und welcher langsam genug schwingt, um seine einzelnen Schwingungen zählen zu können, läßt sich ganz direkt die Richtigkeit der Gleichung (1) in

Fig. 715.

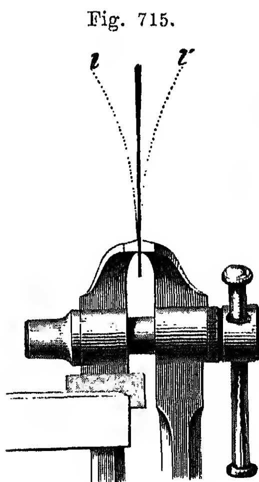


Fig. 716.

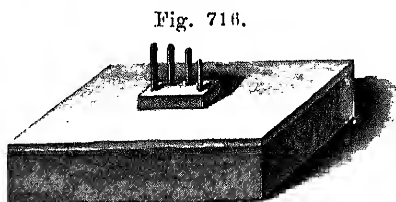


Fig. 717.

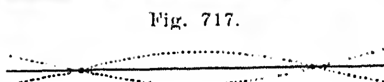
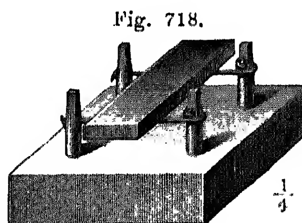


Fig. 718.



Beziehung auf die Länge nachweisen. Macht z. B. ein so eingeklemmter 1 m langer Streifen 40 Schwingungen in 30 Sekunden, so wird er, auf 75 cm verkürzt, 71 Schwingungen in der gleichen Zeit machen, woraus sich leicht ergibt, daß die Schwingungszahlen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der schwingenden Längen.

Je bedeutender die Dicke des Stabes im Vergleich zu seiner Länge wird, desto mehr nimmt die Zahl der Schwingungen zu, so daß man sie alsbald nicht mehr einzeln verfolgen und zählen kann; alsdann aber hat man an der Tonhöhe ein Mittel, die Richtigkeit des obigen Gesetzes zu kontrollieren.

Auf einem Resonanzboden seien vier Stahlstäbchen von gleicher Dicke befestigt, wie es Fig. 716 zeigt, deren Längen sich verhalten wie

$$1 : \sqrt{\frac{4}{5}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}},$$

so wird, mit dem Fiedelbogen gestrichen, das zweite Stäbchen die große Terz, das dritte die Quint und das vierte die Oktav desjenigen Tones geben, welchen man von dem ersten erhält.

Wenn die beiden Enden eines Stabes frei schwingen sollen, so hängt die Schwingungszahl davon ab, welche Stellen desselben festgehalten oder unterstützt sind. Ist der Stab nur in der Mitte seiner Länge befestigt, so ist sein Grundton derselbe wie der eines sonst gleichen Stabes von halber Länge, welcher an dem einen Ende befestigt ist.

so ist, da $1^u = 100^r$ ist, das Verhältnis der Länge von 0 bis 100 Millimeterstrichen am zu prüfenden Stab: $(0-100)_p$ zu der Länge von 0 bis 100 mm am Normalstab: $(0-100)_u$ offenbar gegeben durch:

$$(0-100)_p = (0-100)_u + (238{,}6 - 151{,}2)^r - (247{,}4 - 165{,}6)^r$$
$$= (0-100)_u + 5{,}6^r,$$

oder also:

$$(0-100)_p = 100{,}0112 \text{ wahre Millimeter,}$$

da $1^r = 0{,}002$ mm und die Teilung auf dem Normalstab als richtig angenommen wurde. Stillschweigend haben wir auch vorausgesetzt, daß bei beiden Mikrometern einer Umdrehung der Schraube und damit auch einem Trommelteile derselbe Wert von $u = 0{,}2$ mm oder $r = 0{,}002$ mm zukomme, was nicht immer der Fall sein wird, sondern jeweilen durch eine besondere Messung festzustellen ist.

Die vorstehende Berechnung setzt weiter voraus, daß vom Beobachter aus gesehen die Bezifferung der Teilstriche auf den Stäben in der üblichen Weise von links nach rechts wachse und die Mikroskope nicht, wie gewöhnlich, umgekehrte Bilder gegeben haben. Kehren dieselben um, so werden die Stäbe, um doch aufrechte Bilder der Zahlen im Gesichtsfelde der Mikroskope zu erhalten, verkehrt hingelegt, wobei dann, wie leicht ersichtlich, die Zeichen der Mikrometerablesungen links und rechts entgegengesetzt wie oben zu nehmen sind.

Wären die beiden Stäbe aus verschiedenen Metallen angefertigt, so hätte man nach Gleichung 2), § 16, in der letzten Gleichung oben rechts noch den Faktor $1 + (\mu - \lambda)t$ hinzuzufügen (wo t die an den Thermometern T' während der Messungen abgelesene Temperatur, μ den linearen Ausdehnungskoeffizienten des Normalstabes und λ denjenigen des zu prüfenden Stabes darstellen), um das Resultat für die Normaltemperatur von 0^0 zu erhalten.

Man erkennt unmittelbar, daß bei diesem Längenkomparator nur eine Bedingung erfüllt sein muß, damit das Messungsresultat ein sicheres sei: es soll nämlich während der Zeit, wo man von einem Stabe zum anderen übergeht und an beiden die Mikrometereinstellungen macht, keinerlei Veränderung in der relativen Stellung der Mikroskope vor sich gehen. Jene Zeit ist aber so kurz, daß diese Bedingung durchweg als erfüllt anzusehen ist: hat man aber Zweifel darüber, so braucht man bloß eine zweite Vergleichung in umgekehrter Reihenfolge der Stäbe sofort auf die erste folgen zu lassen, um aus dem Gesamtresultate den Einfluß einer solchen Veränderung ganz oder sehr nahe eliminiert zu sehen.

Handelt es sich bei diesem Komparator um die Vergleichung zweier Endmaße oder eines Endmaßes mit einem Strichmaß, so werden an das Endmaß, je nachdem seine Endflächen eben oder konvex sind, Zylinder mit kugelförmigen oder ebenen Enden angeschoben, die auf ihrer Oberfläche nahe diesen Enden Striche besitzen. Auf diese stellt man die Mikrometer bei der Vergleichung ein und zieht dann später vom Resultat der Vergleichung die Länge ab, welche man nach unmittelbarer gegenseitiger Berührung der Anschiebezylinder als Distanz der Striche auf ihnen bestimmt hat. Bei ebenen Endflächen ist es nach Wild u. Fizeau einfacher, denselben Spitzen oder auch nach Benoit parallel zu ihnen ausgespannte Fäden anzunähern, von

Wenn sich in einem an beiden Enden frei schwingenden Stabe zwei **Schwingungsknoten** bilden, so liegt jeder derselben um $^1/_5$ der gesamten Stablänge von dem entsprechenden Stabende ab, so daß der Zwischenraum zwischen den beiden Schwingungsknoten $^3/_5$ der gesamten Stablänge beträgt, wie dies Fig. 717 andeutet. Man erhält diese Schwingungsart unter anderem, wenn man den Stab in einem der Schwingungsknoten zwischen zwei Fingern festhält und ihn mit einem Holzhammer in der Mitte seiner Länge anschlägt, oder auch, wenn man ihn, wie Fig. 718 andeutet, auf zwei Schnüre legt,

Fig. 719.

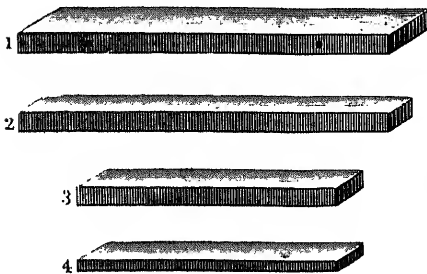


Fig. 720.

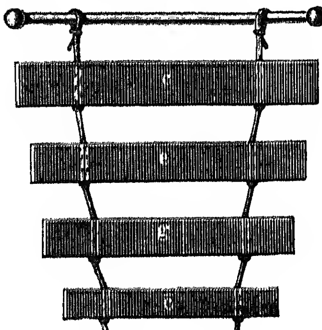
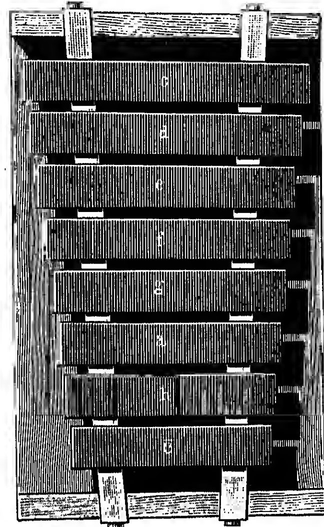


Fig. 721.



welche ungefähr um $^3/_5$ der Stablänge voneinander abstehen, und dann die Mitte oder das eine Stabende mit dem Holzhammer schlägt.

An so unterstützten Stäben ist es nun auch leicht, die Richtigkeit der Gleichung (1) S. 693 nachzuweisen.

Zwei Stahlstäbe, 1 und 2, Fig. 719, geben gleichen Ton, weil sie gleiche Länge und gleiche Dicke haben, obgleich 2 viel schmäler ist als 1.

Der Stab 3 gibt die Oktav der Stäbe 1 und 2, weil bei gleicher Dicke seine Länge $\sqrt{\frac{1}{2}}$, also 0,707 mal kleiner ist.

Da bei gleicher Länge der Stab 4 nur halb so dick ist wie 3, so gibt 4 die nächst tiefere Oktav von 3, der Stab 4 hat also gleiche Tonhöhe mit 1 und 2.

Obgleich die Breite des Stabes ohne Einfluß auf die Tonhöhe ist, so ist sie doch von wesentlichem Einfluß für die Stärke und Reinheit des Tones.

Bezeichnen wir mit l die Länge eines Stabes, welcher ungefähr die Gestalt des Stabes 2, Fig. 719, hat, so muß ein Stab derselben Substanz bei gleicher Dicke die Länge $l\sqrt{\frac{4}{5}} = l \,.\, 0{,}89$ oder die Länge $l\sqrt{\frac{2}{3}} = l \,.\, 0{,}816$ haben, wenn er die große Terz oder die Quint des ersteren Stabes geben soll.

Will man mehrere harmonische Metallstäbe der eben besprochenen Art in einem Apparate vereinigen, so kann man jeden Stab an der Stelle der Schwingungsknoten parallel mit den Breitekanten durchbohren, wie beim Stabe 1, Fig. 719, angedeutet ist, und sie dann mittels durchgezogener Schnüre zusammenfassen, Fig. 720, oder man kann die Stäbe auf konvergierenden gespannten Bändern aufleimen, wie man Fig. 721 sieht.

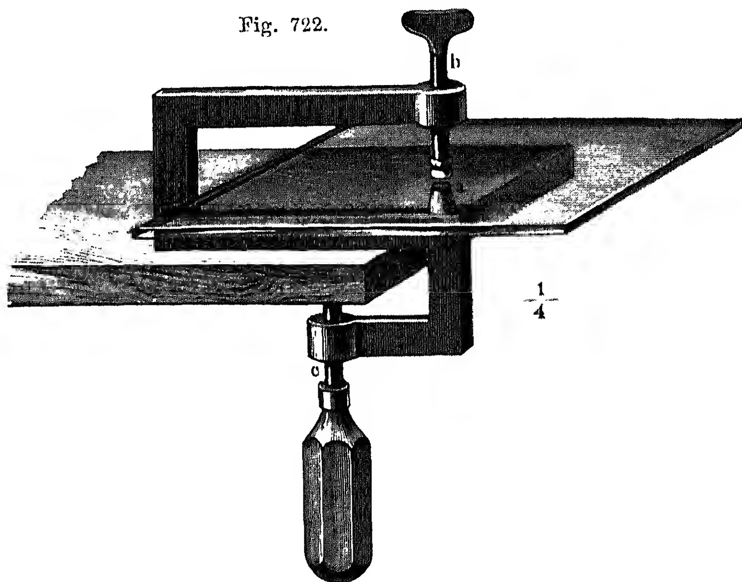
Nach Art der Fig. 721 ist das *Lignum psalterium* aus Holzstäben und die Glasharmonika aus Glasplatten konstruiert, welche mit Korkhämmern geschlagen werden.

Die Stimmgabel und das Kaleidophon, welche beide zu den schwingenden Stäben gehören, wurden bereits an früherer Stelle abgehandelt [1]).

§ 233. Schwingende Platten, Klangfiguren von Chladni.

In Platten, Glocken usw. lassen sich ebenfalls stehende Schwingungen hervorbringen. Um Platten vibrieren zu machen, kann man die Zange, Fig. 722, anwenden, welche aber selbst sehr gut befestigt sein muß. Die Platte wird

Fig. 722.



zwischen den Zylinder *a* und die Schraube *b* gebracht, welche beide mit einem Stückchen Kork oder Leder endigen. Wenn die Platte gehörig festgeschraubt ist, kann man die Vibrationen durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen hervorbringen.

---

[1]) Wir machen an dieser Stelle auf eine Monographie von Robert Hartmann-Kempf „Über den Einfluß der Amplitude auf Tonhöhe und Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfedern", Inauguraldissertation, Frankfurt a. M. 1903, aufmerksam, welche das genannte Thema mit großer Ausführlichkeit und unter Beibringung prachtvoll ausgeführter photographischer Tafeln der von den schwingenden Körpern aufgezeichneten Vibrogramme behandelt. Leider gestattet das umfangreiche Werk keinen Auszug. Die Arbeit ist insbesondere auch für die Theorie der elektromagnetisch betriebenen Stimmgabel von Wichtigkeit.

Man kann auf diese Weise Platten von Holz, Glas, Metall usw. in Schwingungen versetzen, sie mögen nun dreieckig, viereckig, rund oder elliptisch usw. sein. Die vibrierenden Platten erzeugen ebenso wie die vibrierenden Saiten Töne, welche bald höher, bald tiefer sind. Man beobachtet ferner, daß sich die Platte für jeden dieser Töne in schwingende Teile abteilt, welche durch Ruhelinien oder Knotenlinien getrennt sind. Im allgemeinen wird die Ausdehnung der schwingenden Teile um so kleiner, die Knotenlinien also um so zahlreicher, je höher der Ton wird.

Um die Existenz dieser Knotenlinien nachzuweisen, streut man auf die obere Fläche der Tafel feinen trockenen Sand, welcher während des Tönens in die Höhe hüpft und niederfällt und sich endlich an den Knotenlinien anhäuft. Auf diese Weise entstehen die sogenannten Klangfiguren, deren Erfinder Chladni (1756 bis 1827) ist.

Savart hat ein sinnreiches Mittel ausgedacht, um auf eine vollständig korrekte Weise diese Figuren aufzubewahren, die man doch nur sehr schwer kopieren könnte, wenn sie kompliziert und verwickelt sind. Er wandte nämlich statt des Sandes Lackmus an, welches mit Gummi pulverisiert und zu einem Teige angemacht, getrocknet, von neuem pulverisiert und durchgesiebt wird, um Körnchen von passender Dicke zu erhalten. Wenn dieses farbige und hygroskopische Pulver auf der Platte sich in den Knotenlinien angesammelt hat, so reicht es hin, auf die Platte ein mit etwas Gummiwasser befeuchtetes Blatt Papier zu legen, um die Figur durch einen leichten Druck auf demselben zu fixieren. Auf diese Weise ist es Savart gelungen, mehrere hundert solcher Figuren derselben Platte zu sammeln, welche verschiedenen Tönen entsprechen.

Mit derselben Platte lassen sich, wie schon bemerkt, eine Menge verschiedener Figuren erzeugen, je nachdem man mit dem Bogen stärker oder schwächer, schneller oder langsamer streicht, oder je nachdem man den Unterstützungspunkt der Platte verändert und an verschiedenen Stellen des Randes streicht.

Die Fig. 723 bis 726 stellen vier bei zentraler Einspannung (d. h. wenn die Platte gerade in ihrem Mittelpunkte von der Zange, Fig. 722, fest-

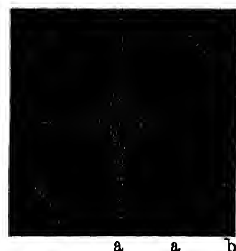
Fig. 723.



Fig. 724.



Fig. 725.



gehalten wird) erhaltene Klangfiguren dar, welche entstehen, wenn man an den mit *a* bezeichneten Stellen des Randes einen Finger anlegt und dann an der durch *b* bezeichneten Stelle mit dem Fiedelbogen streicht.

Die Fig. 727 bis 731 stellen einige der unendlich mannigfaltigen Klangfiguren dar, welche bei exzentrischer Einspannung erhalten werden, und zwar ist die Stelle, welche gerade von der Zange, Fig. 722, festgehalten wird, als

ein ganz weißer Punkt dargestellt. Die Stelle des Randes, welche mit dem Fiedelbogen anzustreichen ist, ist auch hier mit *b*, die mit dem Finger anzuhaltende durch *a* bezeichnet. Um die Fig. 731 sicher zu erhalten, muß man noch bei *c* einen Finger aufsetzen.

Nicht alle Glasplatten von gleicher Größe und Gestalt geben bei gleichem Verfahren genau dieselbe Figur, sondern es kommen Abweichungen vor,

Fig. 726.

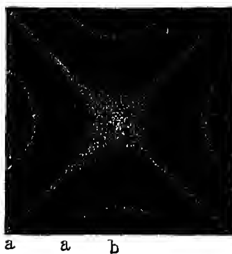


Fig. 727.

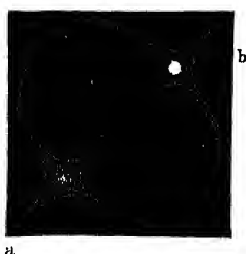


Fig. 728.



welche man als Varietäten desselben Grundtypus bezeichnen kann. So sind die Fig. 728 und 729 Klangfiguren, die bei gleichem Verfahren mit zwei verschiedenen, aber gleich großen Glasplatten erhalten wurden. Häufig beobachtet man auch mehr oder weniger bedeutende Abweichungen vom regel-

Fig. 729.

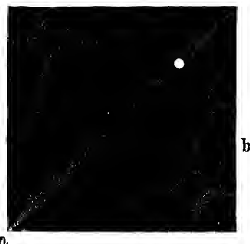


Fig. 730.

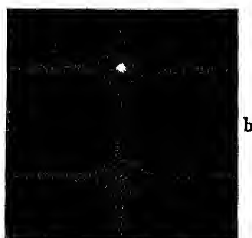
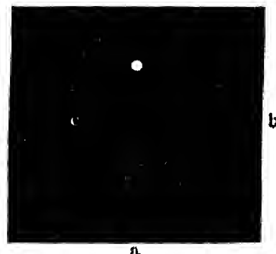


Fig. 731.



mäßigen Verlauf der Klangfiguren, was durch Ungleichförmigkeiten in der Masse der Glasplatten zu erklären ist.

Dreieckige und vieleckige Platten geben ähnliche Erscheinungen.

Kreisförmige Platten geben auch unzählig viele Töne, und jedem derselben entspricht auch eine besondere Figur. Man unterscheidet diametrale, konzentrische und gemischte Systeme.

Das diametrale System ist nur aus Durchmessern zusammengesetzt, wie Fig. 732 und 733, und teilt den Umfang in eine gerade Anzahl von Teilen. Man erhält solche Figuren, wenn man die Platte in ihrem Mittelpunkt einspannt und am Rande streicht. Die Fig. 732 erhält man, wenn man mit dem Finger einen Punkt des Randes berührt, welcher 45° von der Stelle absteht, an welcher man streicht. Um die Fig. 733 zu erhalten, muß man zwei Punkte des Randes berühren, welche um 45° voneinander abstehen, und an einer Stelle streichen, welche $22^1/_2{}^0$ von dem einen dieser Punkte entfernt ist.

An Metallscheiben von 3 bis 4 dcm Durchmesser beobachtet man oft 36 bis 40 Abteilungen am Umfange. Es ist leicht einzusehen, warum bei

dieser Teilungsart durch Radien stets eine gerade Anzahl von gleichen Abteilungen entstehen muß; denn 1. ist klar, daß die Schwingungen aller Abteilungen im Einklange sein müssen, d. h. sie müssen alle in gleicher Zeit gleichviel Schwingungen machen, und da sie gleiche Länge haben, so muß

Fig. 732.

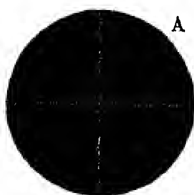


Fig. 733.

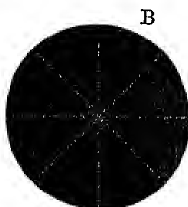


Fig. 734.

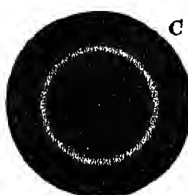
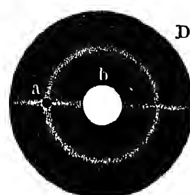


Fig. 735.



auch ihre Ausdehnung dieselbe sein; 2. müssen die nebeneinander liegenden Abteilungen entgegengesetzte Bewegungen haben, und dies wäre bei einer ungeraden Anzahl von Abteilungen nicht möglich.

Um konzentrische Knotenlinien zu erhalten, wovon Fig. 734 die einfachste Form zeigt, muß die Platte vom Mittelpunkte aus in Schwingungen versetzt werden, was am besten dadurch bewerkstelligt werden kann, daß man aus der Mitte ein Stück herausschneidet, wie Fig. 735 andeutet, welches groß genug ist, um mit einem Fiedelbogen hineinzukommen. Nachdem nun diese Platte exzentrisch in die Schraubklemme, Fig. 722, S. 696, eingespannt worden ist, wird eine beliebige Stelle des inneren Randes mit dem Fiedelbogen gestrichen. Ist z. B. der Punkt *a*, Fig. 735, eingeklemmt, so entsteht die hier abgebildete Figur, wenn man bei *b* streicht.

Um ringförmige Knotenlinien zu erzeugen, kann man sich auch einer Metallplatte bedienen, in deren Mitte ein ungefähr 4 mm dicker und ungefähr 1 m langer Stahlstab eingesteckt und eingelötet ist. Wenn man den Stab in der Mitte seiner Länge zwischen zwei Fingern der linken Hand festhält und am oberen Ende dann mit den Fingern der anderen Hand, zwischen denen man vorher etwas Kolophonium zerrieben hat, herabstreicht, wie Fig. 736 andeutet, so gibt der Stahlstab seinen Längston, und der auf die Platte gestreute Sand ordnet sich dabei zu mehreren konzentrischen Ringen.

R. Schulze[1]) hat auf diese Weise über 500 verschiedene Klangfiguren erhalten, die sich durch Schärfe und Schönheit auszeichnen.

Dieser Versuch läßt sich auch dahin abändern, daß man eine Glas- oder Metallplatte in der Fig. 737 und 738 anschaulich gemachten Weise auf dem oberen Ende eines gegen 7 dcm langen, 4 bis 6 mm dicken, unten in einen Holzklotz eingeleimten Holzstäbchens befestigt und dieses durch Streichen mit dem Finger zum Tönen bringt.

Das gemischte System von Knotenlinien besteht aus diametralen Linien, welche mehr oder weniger gebogen, und Kreisen, die ebenfalls mehr oder weniger verändert sind. Um solche Figuren zu erhalten, ist immer einige Geschicklichkeit nötig; das Prinzip besteht darin, mit den Fingern auf mehrere der Punkte zu drücken, durch welche die Knotenlinien gehen sollen. In Fig. 739 sind mehrere solcher zusammengesetzten Klangfiguren zusammengestellt.

[1]) Neue Klangfiguren, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. **13**, 277 (1900).

Savart hat ebenfalls die Klangfiguren runder Platten studiert und hat z. B. gefunden, daß die diametralen Linien sich nicht bis zur Mitte fortpflanzen, wenn ihre Anzahl etwas groß wird. Nach Strehlke sind überhaupt alle Knotenlinien gekrümmt, die scheinbar geraden Linien in manchen dieser Figuren sind nur Zweige hyperbolischer Kurven.

Fig. 736.

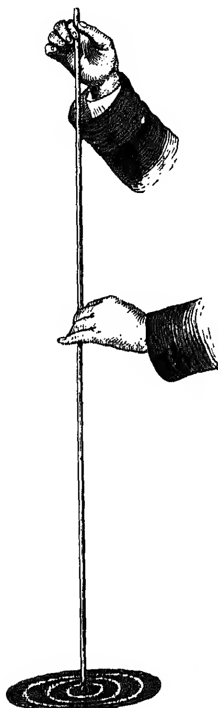


Fig. 737.

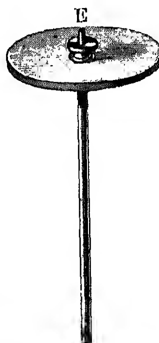


Fig. 738.

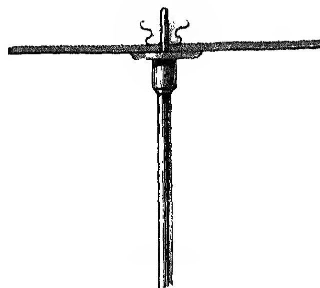
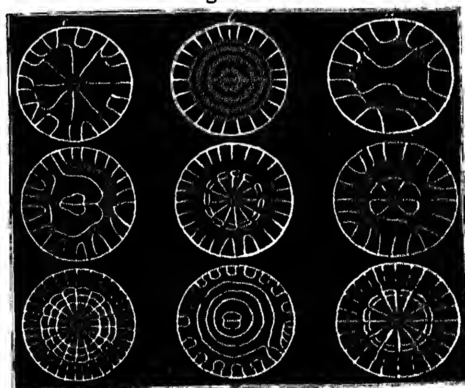


Fig. 739.



Eine merkwürdige, von Savart aufgefundene Tatsache ist die Verrückung der Knotenlinien. Wenn man eine sorgfältig gearbeitete Messingplatte von ungefähr 4 dcm Durchmesser und 2 bis 3 mm Dicke in der Weise befestigt, wie man Fig. 740 sieht und, nachdem man *Semen lycopodii*, welches weit leichter ist als Sand, darauf gestreut hat, mit einem Fiedelbogen am Rande streicht, so beobachtet man für gewisse tiefe und volle Töne, welche einer diametralen Figur von 4, 6 oder 8 Strahlen entsprechen, daß die Knotenlinien nicht fest bleiben; sie erleiden eine entschiedene Oszillationsbewegung, und wenn man mit der Bewegung des Fiedelbogens fortfährt, gelangt man selbst dahin, ihnen eine kontinuierliche Rotationsbewegung zu erteilen, so daß das Pulver eine Art Wirbel bildet, welcher in einer bestimmten Entfernung vom Umfange der Scheibe, dem er parallel bleibt, die Ebene der Scheibe durchläuft. Savart erklärt diese interessante Erscheinung auf folgende Weise: In den Scheiben, sie mögen noch so gut gearbeitet sein, ist die Elastizität nicht nach allen Richtungen dieselbe; es gibt zwei Durchmesser, von welchen einer der größten, ein anderer der kleinsten Elastizität

entspricht. Wenn man nun mit dem Fiedelbogen an einer solchen Stelle anstreicht, daß die Knotenlinien auf diese Durchmesser fallen, so bleiben die Knotenlinien unbeweglich; wenn man aber an einem anderen Punkte anstreicht, so sind die Bewegungen, welche der Fiedelbogen an dem Rande der Scheibe hervorbringt, unsymmetrisch, und die Knotenlinien, welche sich bilden, haben ein Bestreben, in die erste Lage zurückzukehren, und deshalb oszillieren sie um diese Lage, oder sie drehen sich kontinuierlich, wenn die hinlänglich großen Exkursionen der Scheibe ihnen eine hinreichende Amplitude geben, damit sie ihre Ruhelage verlassen können.

Fig. 741.

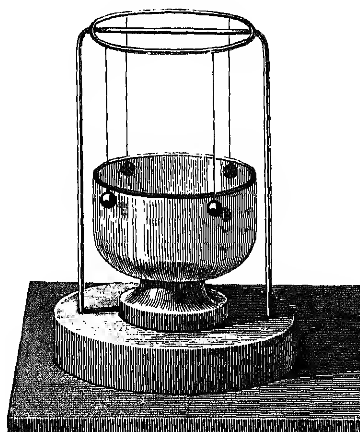
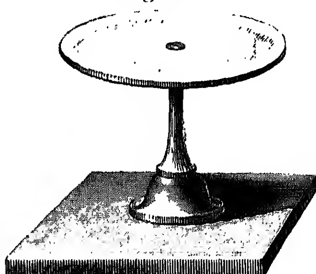


Fig. 740.



Faraday hat dann aber durch Versuche unter dem Rezipienten der Luftpumpe gezeigt, daß die vom Lykopodiumpulver oder ähnlichen leichten Massen gebildeten Figuren durch Luftströmungen entstehen und vollständig ausbleiben, wenn man die Luft ausschließt.

Der in Fig. 741 abgebildete Apparat dient dazu, die Schwingungen einer Glasglocke zu demonstrieren. Beim Streichen mit dem Fiedelbogen teilt sich die Glocke in vier Quadranten, welche durch Knotenlinien getrennt sind. Berühren die herabhängenden leichten Kügelchen aus Holundermark die Glocke an den Stellen der Knoten, so bleiben sie ruhig. Sie kommen in lebhafte Bewegung, wenn sie sich in der Mitte zwischen zwei Knotenlinien berühren.

§ 234. Theorie der Klangfiguren. Wir verdanken Wheatstone[1]) die erste in der Hauptsache befriedigende Erklärung der Chladnischen Klangfiguren. Dieselbe beruht auf der Annahme, daß sich auf der Platte zwei (oder auch vier) Systeme von Schwingungen, deren Knotenlinien sich durchkreuzen, zu einem resultierenden Schwingungssystem vereinigen.

Nehmen wir als einfachsten Fall jenen der quadratischen Platte. Fassen wir dieselbe als einen Stab auf, welcher in der Weise zum Schwingen gebracht werde, daß sich, wie in Fig. 742, Knotenlinien nach ab und cd und wie in Fig. 744 nach ef und gh ausbilden, während die dazwischen liegenden Felder nach entgegengesetzten Richtungen schwingen. Wir können uns denken, daß in einem gegebenen Moment die schattierten Stellen nach aufwärts, die nicht schattierten nach abwärts in Bewegung seien. Wirken nun

---

[1]) Philos. Transact. 1833.

die Anregungen zu beiden Schwingungssystemen in einer und derselben Platte zusammen, so wird man das resultierende Schwingungssystem ableiten können, indem man sich die Fig. 742 und 744 übereinander gelegt denkt, wie es in Fig. 743 ausgeführt erscheint. Dabei ist fürs erste sicher, daß die doppelt schattierten Stellen entgegengesetzt mit jenen schwingen, wo keine

Fig. 742.

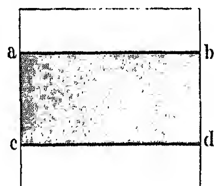


Fig. 743.

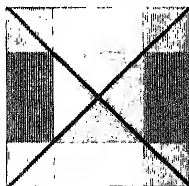
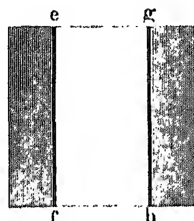


Fig. 744.



Schattierung hintrifft. Ferner ist einleuchtend, daß jene Sellen, welche an den Durchschneidungsstellen der ursprünglichen Knoten liegen, auch hier in Ruhe bleiben werden. Da ferner die Richtungen nach unten und nach oben durchaus gleichwertig sind und daher keine von beiden überwiegen kann, so werden die Knotenlinien zwischen den Grenzen der doppelt schattierten und der hell gebliebenen Felder symmetrisch hindurchgehen müssen. Diese Schlüsse lassen uns einsehen, daß die resultierenden Knotenlinien mit den beiden Diagonalen des Quadrates zusammenfallen müssen.

Für den anderen Fall, daß in beiden ursprünglichen Schwingungssystemen die mittleren Felder gleiche Schwingungsrichtung hatten, wie in

Fig. 745.

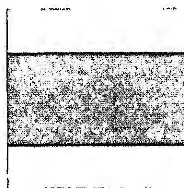


Fig. 746.

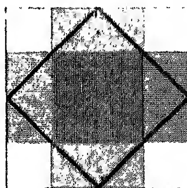


Fig. 747.

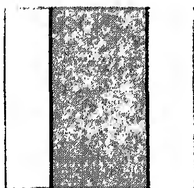


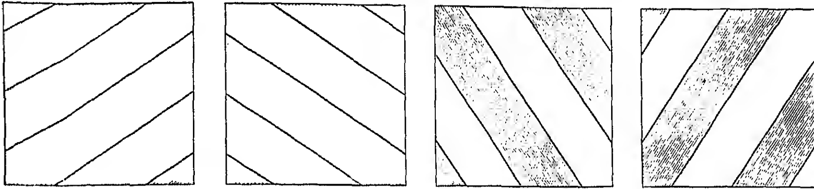
Fig. 745 und 747 angedeutet ist, führt eine ganz ähnliche Betrachtungsweise zu der resultierenden Fig. 746. Die Knotenlinien haben in diesem Falle die Lage von Geraden, welche die Mitten der benachbarten Quadratseiten verbinden.

In ähnlicher Weise hat Wheatstone komponierende Schwingungen mit Knotenlinien von verschiedener Anzahl und von verschiedener Neigung gegen die Seiten der Platten zusammengesetzt und dadurch eine Anzahl von 47 Chladnischen Figuren erklärt. Wir müssen uns aus Raummangel versagen, hierauf näher einzugehen. Dagegen gibt es noch eine Anzahl von Chladnischen Figuren, nämlich alle mit krummen Knotenlinien, welche sich nur durch Übereinanderlagerung von vier einfachen Figuren ableiten lassen.

Es seien als Beispiel die vier schwingenden Platten in Fig. 748, 749, 750, 751 mit den ursprünglichen Knotenlinien gegeben, und es sollen wiederum die schattierten Felder jene Punkte der Platte darstellen, welche gleichzeitig momentan nach aufwärts schwingen. Durch Übereinanderlegung von Fig. 748

und 749, sowie von Fig. 750 und 751 entstehen zunächst die Fig. 752 und 754. Zeichnet man in diese nach den oben entwickelten Grundsätzen die resultierenden Knotenlinien ein, so erhält man hierfür Gerade, welche parallel den Quadratseiten verlaufen. Die Fig. 755 und 757 stellen die nämlichen Knoten-

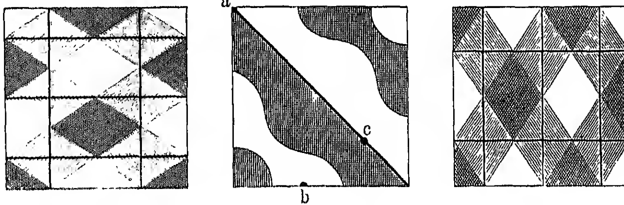
Fig. 748. Fig. 749. Fig. 750. Fig. 751.



linien dar, wobei jedoch die Felder so mit Schattierung ausgefüllt sind, daß wiederum die momentan nach aufwärts bewegten dunkel erscheinen.

Legt man nun diese beiden Figuren übereinander, so erhält man die Fig. 756, in welcher man wiederum nach denselben Grundsätzen die Knotenlinien erhält, von denen eine die Gerade nach der Diagonale des Quadrates, die

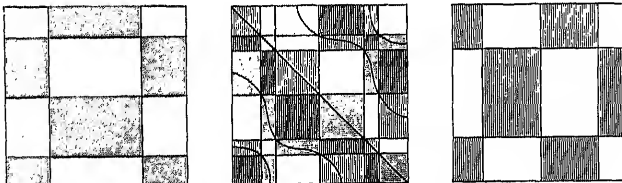
Fig. 752. Fig. 753. Fig. 754.



übrigen aber Kurven sind. Fig. 753 stellt den resultierenden Schwingungszustand der Platte vor; *c* ist der Befestigungspunkt, bei *b* wird der Bogen, bei *a* der Finger angesetzt. Siehe auch Fig. 729, S. 698.

Es ist einleuchtend, daß auf diese Weise kein ganz genaues Resultat zu erhalten ist und daß man zur Erzielung eines solchen die Größe der

Fig. 755. Fig. 756. Fig. 757.



komponierenden Elongationen für jeden Punkt der Platte berücksichtigen müßte.

Die Erklärungsweise von Wheatstone wird unterstützt durch die früheren Versuche der Gebrüder Weber[1]), welche durch Interferenz von Flüssigkeitwellen in quadratischen Gefäßen dieselben Ruhelinien erhalten

[1]) Wellenlehre, 1825, S. 474.

hatten. Ferner sprechen für dieselbe die Versuche Savarts[1]) mit ungleichartig elastischen Platten, sowie jene von Wheatstone mit rechteckigen Holzplatten, an denen nur dann die Klangfigur mit Diagonalen sich ausbildet, wenn die Seiten des Rechtecks sich wie die Größen der Elastizitätsachsen verhalten, da nur dann die Töne der kombinierenden Schwingungen gleiche Höhe haben.

Eine Erweiterung der Wheatstoneschen Theorie wurde dann durch die Versuche von R. König[2]) mit rechteckigen Platten von Messing angebahnt, bei welchen die Dimensionen so gewählt waren, daß die Töne nahe gleiche Höhe hatten, welche entstanden, wenn sich die Platte nach Knotenlinien parallel zur einen oder zur anderen Seite des Rechteckes abteilte. Dabei war jedoch die Anzahl der Knotenlinien nach beiden Richtungen verschieden. Die Fig. 758, 759, 760 geben hierfür ein Beispiel. Die Platte Fig. 758 gibt in drei Teilen schwingend nahe denselben Ton wie die Platte Fig. 760, wie sie in vier Abteilungen schwingt. Ihre Kombination Fig. 759 führt zu der daselbst eingetragenen Knotenlinie, welche, wie auch in anderen Fällen, wesentlich analoge Form hat wie die demselben Zahlenverhältnis entsprechende Lissajoussche Figur.

Fig. 758.

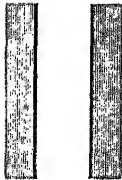


Fig. 759.

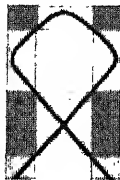
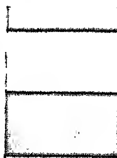


Fig. 760.



Noch nicht erklärt ist die bei Stäben und Platten dieser Art konstatierte Tatsache, daß der Ton der Kombinationsfigur und diese selbst am reinsten und leichtesten sich ausbildet, wenn die Töne der komponierenden Schwingungen nicht genau im Unisono stehen, sondern ein Intervall eines starken ganzen Tones bilden. Strehlke[3]) hat ferner bei genauerer Untersuchung der Figuren nachgewiesen, daß die Knotenlinien der quadratischen Platten stets krumme Linien seien und daß sich dieselben nie durchschneiden. Eine vollständige mathematische Theorie der Figuren für quadratische und rechteckige Platten fehlt bis jetzt. Dagegen hat Kirchhoff[4]) eine solche für kreisförmige Platten ausgearbeitet, nachdem er eine ältere von Poisson als nicht ganz richtig erkannt hatte. Durch sehr sorgfältige Messungen von Strehlke wurde die Kirchhoffsche Theorie bestätigt. So z. B. berechnete Kirchhoff unter Annahme des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation $\mu = {}^1/_3$ (s. § 107), den Durchmesser des Knotenkreises in Fig. 734 zu 0,6794 des Scheibendurchmessers, Strehlke fand an einer sorgfältig gearbeiteten Glasscheibe 0,6792 und 0,6782. Etwas weniger gut stimmen die aus der Theorie abgeleiteten Tonhöhen, deren Beziehung zur Anzahl der Knotenlinien eine sehr komplizierte ist.

§ 235. Longitudinalschwingungen der Saiten und Stäbe. Wir haben bisher nur die Querschwingungen der Saiten und Stäbe betrachtet; dieselben können aber auch, wie Chladni zuerst entdeckt hat, ihrer Länge

1) Pogg. Ann. 16.
2) Pogg. Ann. 122, 238.
3) Pogg. Ann. 4, 18, 27.
4) Crelles Journ. f. Math. 40.

denen dann durch die Endfläche Bilder erzeugt werden; nach den Refle
gesetzen des Lichtes repräsentiert die Mitte zwischen Gegenstand un
die Endfläche des Stabes, und man hat somit die Mikrometerfäden m
diese Mitte einzustellen, um eine Messung des Maßstabendes zu erhalt

§ 21. Messung von Vertikalabständen: Kathetometer. I
praktischen Physik kommt häufig die Aufgabe vor, Vertikalabständ
Punkten zu messen, welche nicht lotrecht übereinander liegen. Man b
sich zu diesem Zwecke eines Meßinstrumentes namens Kathetomet

Dasselbe besteht in seiner einfachsten Gestalt aus einer auf D
vertikal gestellten Säule, längs welcher ein Gestell verschiebbar u
beliebiger Höhe feststellbar ist.

Das Gestell trägt ein Ablesefernrohr auf kurze Distanz mit einem F
kreuz in seinem ausziehbaren Okularrohr.

Die Säule ist mit einer Längenteilung, meistens in Millimetern,
sehen, längs welcher ein an dem beweglichen Gestell befestigter Noniu
schiebbar ist.

Fig. 57 gibt eine schematische Ansicht des Instrumentes und
Anwendung.

AB stellt beispielsweise ein Heberbarometer vor, dessen Quecks
kuppen A und B den vertikalen Abstand BC haben. Letzterer Ab

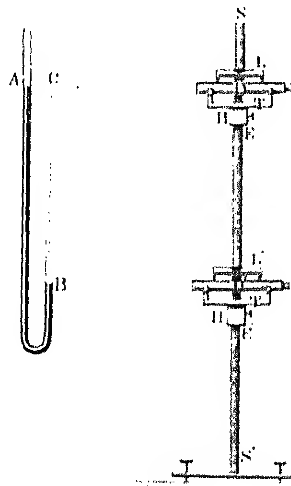


Fig. 57.

die Kathete im rechtwinkeligen Dr
ABC, soll gemessen werden, daher der
des Instrumentes. Die Messung geschi
der Weise, daß man nacheinander das
rohr in genau horizontaler Lage auf di
den Punkte A und B richtet und di
gehörigen Ablesungen am Nonius vonein
subtrahiert.

In der einfachen Form der Fig. 57
jedoch das Kathetometer nicht brau
Selten liegen nämlich die beiden Visier
nach dem oberen und unteren Punk
einer Vertikalebene. Es muß also das
rohr samt Gestell um eine vertikale
drehbar sein, ohne daß dadurch der N
seine Stellung gegenüber der Längente
verliert.

Wir geben in den Figuren 58 a
eine perspektivische Zeichnung nebst ei
Durchschnitten durch die wichtigsten Teile eines Kathetometers au
Werkstätte des Universitätsmechanikers Fr. Miller in Innsbruck.

Man hat daran folgende Bestandteile zu beachten:

Die zylindrische Säule S aus Eisen (Fig. 58 b, c und f), welc
dem Dreifuß D befestigt ist und mittels der Stellschrauben m,
vertikal gestellt werden kann. An dieser Säule ist der Konus C, Fig.
angedreht; am oberen Ende (Fig. 58 c) ist eine konische Vertiefun
gebracht, welche die Spitze der Schraube E aufnimmt. In der Haupt
ist diese Säule nicht sichtbar.

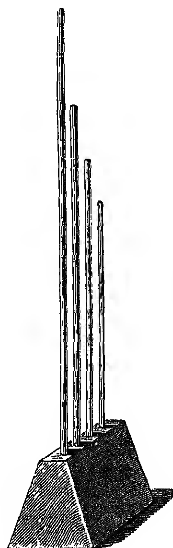
nach schwingen, ganz ähnlich wie eine in einer Röhre eingeschlossene Luftsäule. Solche Längenschwingungen kann man dadurch erzielen, daß man eine gespannte Saite unter sehr spitzem Winkel mit einem Fiedelbogen streicht oder eine Glasröhre mit nassen Fingern oder einem nassen Tuche der Länge nach reibt.

Nimmt man z. B. eine Glasröhre von 2 m Länge, welche einen Durchmesser von 2 bis 3 cm hat, und hält man sie in der Mitte mit einer Hand fest, während man die eine Hälfte mit einem in der anderen Hand gehaltenen nassen Tuche reibt, so wird man einen Ton hören, den man mit einiger Geschicklichkeit leicht rein und voll erhalten kann[1]). Die Schwingungen, welche man auf diese Weise erzeugt, sind offenbar Longitudinalschwingungen. Durch schnelleres Reiben und stärkeren Druck kann man außer dem Grundton des Stabes auch noch höhere Töne erzeugen. Die Schwingungen können dabei leicht so sehr gesteigert werden, daß die stärkste Glasröhre in viele Stücke zerbricht.

Man erhält dieselben Resultate mit langen zylindrischen und prismatischen vollen Glasstäben, mit Röhren und Stäben von Holz und Metall; bei den letzteren wendet man aber statt des nassen Tuches ein mit Harz bestreutes Tuch an.

Zur Hervorbringung von Longitudinalschwingungen hölzerner Stäbe kann man den Apparat Fig. 761 anwenden. In einem Holzklotz von entsprechender Größe sind mehrere Holzstäbchen von ungefähr 6 mm Dicke eingeleimt. Streicht man diese Stäbchen von oben nach unten fahrend zwischen zwei Fingern, mit denen man vorher etwas Kolophonium gerieben hat, so entstehen reine, volle Töne. Gesetzt, die Länge der Stäbchen verhielte sich wie 30 : 24 : 20 : 15, so geben sie den Grundton, seine große Terz, seine Quint und seine Oktav.

Fig. 761.



Die Longitudinalschwingungen eines Stabes sind im wesentlichen den Vibrationen der Luftsäulen in Pfeifen ganz analog, d. h. die einzelnen Querschichten oszillieren in der Richtung der Längenachse des Stabes hin und her. Der Longitudinalton eines Stabes ist demnach zunächst von seiner Länge abhängig. Die Schwingungszahlen zweier Stäbe desselben Materials verhalten sich verkehrt wie ihre Längen. Man kann sich davon leicht mit Hilfe des Apparates Fig. 761 überzeugen.

Stäbe, welche in der Mitte festgehalten, an beiden Enden aber frei sind, verhalten sich wie offene Pfeifen; Stäbe dagegen, welche an einem Ende befestigt sind, wie die in Fig. 761, verhalten sich wie gedeckte Pfeifen.

Wie die Tonhöhe der Pfeifen von dem Querschnitte derselben nicht ganz unabhängig ist, so verhält es sich auch mit den Längsschwingungen von Stäben. Von zwei Stäben derselben Holzart, welche gleiche Länge, aber ungleichen Durchmesser haben, gibt der dickere einen etwas höheren Ton.

---

[1]) Einen hierzu geeigneten Apparat hat R. König angegeben.

Wenn ein Stab denselben Ton durch longitudinale und transversale Erregung zu geben vermag, so treten die Längen- und Querschwingungen immer gleichzeitig auf, man mag den Stab longitudinal oder transversal in Schwingungen versetzen. Diese von Terquem entdeckte Tatsache dient auch zur Erklärung der eigentümlichen Anordnung der Knotenlinien an Stäben mit quadratischem Querschnitt, welche von Savart beobachtet und von Seebeck zuerst richtig gedeutet worden sind. Demnach ist es also nicht möglich, in einem Körper, welcher nach zwei verschiedenen Schwingungsarten in nahe gleicher Tonhöhe zu schwingen vermag, einen dieser Töne isoliert hervorzurufen.

Da die Longitudinalschwingungen von Stäben, deren eines Ende vollkommen festgeklemmt ist, wie in Fig. 761, ganz den Gesetzen der stehenden Schwingungen in Röhren eingeschlossener Luftsäulen folgen, so ist auch die Länge eines solchen Stabes $^1/_4$ der Wellenlänge, mit welcher sich sein Grundton in dem Medium des Stabes fortpflanzen würde.

Dies gibt ein sehr einfaches Mittel an die Hand, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in irgend einem festen Stoffe experimentell zu bestimmen. Man mache nur aus diesem Stoffe einen Stab, den man mit seinem einen Ende festklemmt, um ihn dann in Longitudinalschwingungen zu versetzen. Es verhält sich dann die Länge des Stabes zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in seinem Material wie die Länge einer gedeckten Pfeife, welche denselben Ton gibt, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft.

So findet man z. B., daß ein 1 m langer Stab von Erlenholz, in der durch Fig. 761 erläuterten Weise befestigt, einen Longitudinalton gibt, welcher dem Longitudinalton einer 7 cm langen gedeckten Pfeife gleich ist. Die Wellenlänge eines Tones in Erlenholz verhält sich demnach zur Wellenlänge desselben Tones in Luft wie 1 zu 0,07, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist also $\frac{100}{7} = 14{,}3$ mal größer für Erlenholz als für Luft.

Nach dieser Methode haben Chladni sowohl wie auch Savart die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen festen Körpern bestimmt.

Die nebenstehende Tabelle enthält einige der von Chladni erhaltenen Resultate.

Wenn eine ungefähr 1 m lange, 2 cm weite, nach der in § 214 besprochenen Weise mit Lykopodium oder Korkstaub versehene, an jedem Ende durch einen wohl passenden Kork geschlossene Glasröhre *ab*, Fig. 762, in

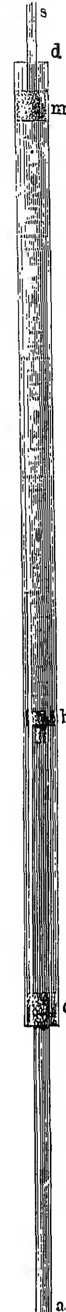
Fig. 762.



horizontaler Lage in ihrer Mitte festgeklemmt und durch Reiben mit einem befeuchteten wollenen Lappen zum Tönen gebracht wird, so bilden sich in der Röhre ähnliche Staubfiguren, wie wir sie bereits in § 214 kennen lernten. Diese Staubfiguren rühren von stehenden Luftwellen her, welche dadurch entstehen, daß die geschlossenen Enden der Röhre bei der abwechselnden Verlängerung und Verkürzung derselben die eingeschlossene Luft abwechselnd ausdehnen und verdichten und sie auf diese Weise in stehende Schwingungen

Name der Substanzen	Geschwindigkeit, verglichen mit Schallgeschwindigkeit in der Luft
Fischbein	$6^2/_3$
Zinn	$7^1/_2$
Silber	9
Nußbaumholz	$10^2/_3$
Messing	$10^2/_3$
Eichenholz	$10^2/_3$
Kupfer	12
Ahornholz	$12^1/_3$
Akazienholz	$14^2/_5$
Ebenholz	$14^2/_5$
Erlenholz	$14^2/_5$
Lindenholz	15
Glas	$16^2/_3$
Eisen oder Stahl	$16^2/_3$
Tannenholz	18

Fig. 763.



versetzen, deren Ton genau derselbe ist wie der der Glasröhre. Da nun im Glase die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles beinahe 16 mal so groß ist als in der Luft, da ferner die Länge des Rohres $a\,b$ gleich ist der halben Wellenlänge ihres Tones in Glas, so müssen auf die Luftsäule in $a\,b$ 16 halbe Wellenlängen kommen, die Staubfigur in derselben wird also stets 16 Maxima und Minima zeigen müssen, welches auch die Länge der Röhre sein mag.

Bringt man statt Luft ein anderes Gas in die Röhre $a\,b$, so ändert sich auch die Länge der Staubwellen in derselben; sie wird 20, wenn die Röhre mit Kohlensäure, sie wird 10, wenn sie mit Leuchtgas gefüllt ist.

Der Apparat Fig. 763, den wir bereits in § 214 kennen lernten, gestattet nun auch, auf eine sehr einfache Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luft mit der verschiedener fester Stoffe zu vergleichen. Man hat nur die Glasröhre $a\,b$ durch einen gleich langen Stab des fraglichen Körpers zu ersetzen und den Versuch in der bekannten Weise zu wiederholen; die Länge der Staubwellen ändert sich, je nachdem man für $a\,b$ einen anderen Stab einsetzt. Die halbe Länge einer Staubwelle wird $\frac{1}{12}\,a\,b$ sein, wenn $a\,b$ ein Stab von Kupfer, sie wird $\frac{1}{18}\,a\,b$ sein, wenn der Stab $a\,b$ aus Tannenholz besteht.

Hier dürfte wohl der geeignetste Ort für die Bemerkung sein, daß Wasser den Schall nicht allein zu leiten imstande ist, sondern daß es unter

auch, wenn sie vollständig unter Wasser getaucht ist und einen S… Wasser durch die Öffnungen hindurchtreibt, wie es bei den gew… Sirenen mit der Luft geschieht. Wertheim hat förmliche Wa… konstruiert, d. h. Pfeifen, in welchen eine Wassersäule ebenso in Schwingungen versetzt wird wie die Luftsäule in gewöhnlichen…

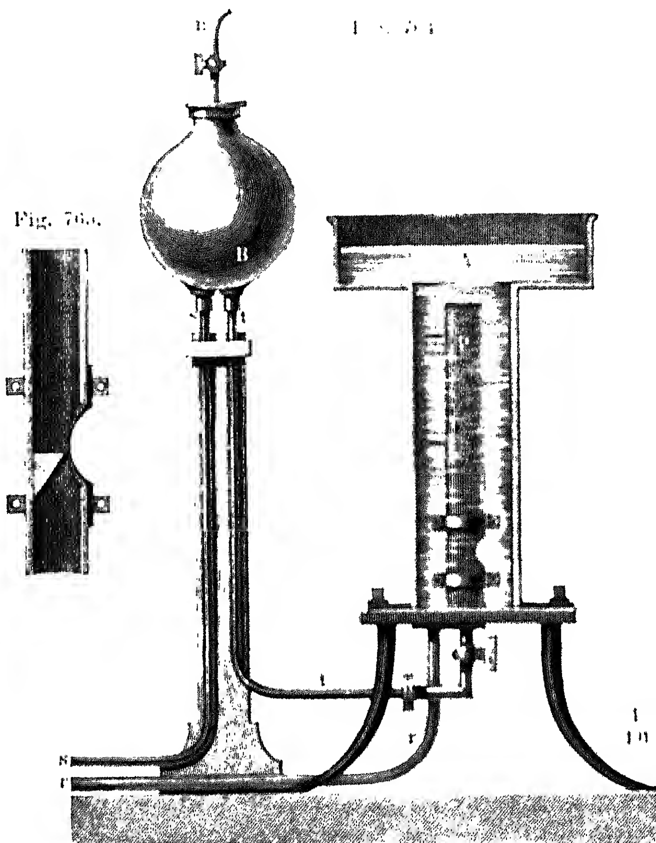


Fig. 764.

Fig. 765.

Die ganz mit Wasser gefüllte, offene oder gedeckte Pfeife p, … befindet sich in einem 52 cm hohen, mit Wasser gefüllten Gefäße A… einer Druckpumpe wird beim Aufziehen des Kolbens durch da… Wasser aus dem Gefäße A herausgesaugt, beim Niedergange de… aber wird es durch das Rohr s in den Windkessel B hineingepreßt… chem es durch den Druck der komprimierten Luft durch die Rohr… Fuß der Pfeife p getrieben wird. Die Röhre n führt zu einem M…

Fig. 765 stellt das Mundstück der Pfeife p in größerem Maß…

Dieser Versuch beweist, daß die Wassersäule in p ganz in… Weise vibriert wie eine Luftsäule.

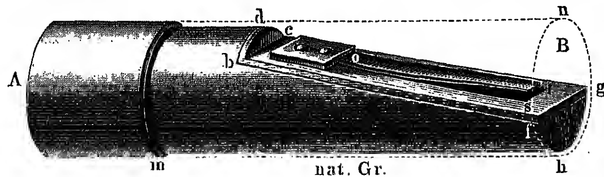
Die interessanten Erscheinungen, welche ein schwingender G… Polarisationsapparat zeigt, sowie die einschlägigen Versuche von … und von E. Mach können erst in der Optik besprochen werden.

[1]) Annal. d. Chim. et de Phys., 3. Ser., T. [illegible]

§ 236. Die Zungenpfeifen. Wenn ein Luftstrom durch eine Öffnung hervordringt, welche durch die Vibrationen eines elastischen Körpers in regelmäßigen Intervallen geschlossen und wieder geöffnet wird, so entsteht ein Ton ganz in der Weise, welche wir bei der Sirene kennen lernten. Bei jedem Freiwerden der Öffnung nämlich entsteht ein Luftstoß, welcher eine Verdichtung erzeugt. Solche Instrumente nun, durch welche nach diesem Prinzip Töne erzeugt werden, nennt man Zungenwerke.

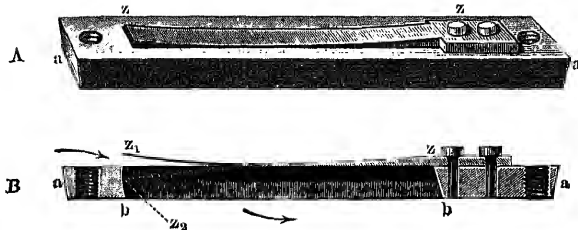
Eine der einfachsten Formen der Zungenpfeifen ist in Fig. 766 dargestellt. Von einem bei A offenen Messingrohre ist durch einen schrägen Schnitt ein Stück abgeschnitten und auf die Schnittfläche die Messingplatte $bcfg$ aufgelötet; außerdem ist aber das Messingrohr durch die Messingstücke bde und fhg auf der rechten Seite vollständig geschlossen, so daß man einen Hohlraum hat, welcher einerseits geschlossen, bei A aber offen ist.

Fig. 766.



nat. Gr.

Fig. 767.



Aus der Messingplatte $bfge$ ist oben eine rektanguläre Öffnung ost ausgeschnitten und über derselben ein federnder Metallstreifen, eine sogenannte Zunge, angebracht, welche nur um sehr weniges kürzer und schmäler ist als die Öffnung ost. In ihrer Ruhelage steht das freie Ende der Zunge ein wenig in die Höhe, etwas niedergedückt paßt sie aber fast ganz genau in dieselbe hinein, so daß bei dieser Lage die Öffnung durch die Zunge geschlossen ist.

Wenn man die Zunge auf irgend eine Weise, etwa mittels des Fingernagels, ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage herausbiegt und dann losläßt, so hört man einen ganz schwachen, klanglosen, sehr bald wieder verschwindenden Ton; in dieser Weise könnten also die Schwingungen des federnden Metallstreifens nicht für musikalische Zwecke verwendet werden. Um mittels der Zunge kräftige Töne zu erzeugen, wird nun über die rechte Seite des bereits besprochenen Messingrohres ein zweites Rohr mn geschoben, welches in unserer Figur nur durch Punktierung angedeutet ist, so daß nun ein zweiter, bei B offener Hohlraum gebildet wird, welcher nur durch die Öffnung ost mit dem bei A mündenden in Verbindung steht. — Wird nun bei B Luft eingeblasen, so wird dadurch die Vibration der Zunge eingeleitet. So oft infolge dieser Vibration die Öffnung ost teilweise frei wird, dringt ein Luftstrom durch dieselbe und aus der Mündung A hervor, um sogleich wieder unterbrochen zu werden, wenn die Öffnung ost durch die vibrierende Spalte wieder geschlossen wird.

Es sind also nicht die Vibrationen der Zunge selbst, welche die Schallwellen erzeugen, vielmehr dienen diese Vibrationen nur dazu, den aus *ost* hervorquellenden Luftstrom zu regulieren und ihn in regelmäßigen Zwischenräumen zu unterbrechen. So viele Schwingungen die federnde Zunge in der Sekunde macht, so viele Wellen treten der Reihe nach bei *A* aus dem Rohre hervor.

In der Regel ist an das Rohr bei *A* noch ein kleiner Schallbecher, bei *B* aber ein entsprechendes Mundstück angesetzt.

Fig. 767 zeigt die Form der Zunge, wie sie gewöhnlich zur Konstruktion der Mundharmonika, der Blasbalgharmonika und der Physharmonika verwendet werden, und zwar zeigt *A* eine perspektivische Ansicht, *B* den Durchschnitt der Zunge samt Fassung.

Hierher gehören auch die Zungenwerke unserer Orgeln, deren Einrichtung durch Fig. 768 und Fig. 769 erläutert wird. In dem durchbohrten hölzernen Stopfen *s*, Fig. 769, ist unten eine Rinne *r* von Messingblech befestigt, deren Querschnitt ungefähr einen Halbkreis bildet, und welche den Namen Canile führt. Oben ist diese Rinne offen, unten ist sie geschlossen, und ihre seitliche Öffnung wird durch die elastische Platte *l* bedeckt, welche bei ihrer Vibration auf die Ränder der Rinne aufschlagend dieselbe vollständig verschließt und dann wieder zurückschwingend einen Luftstrom in die Canile eintreten läßt.

Fig. 768.

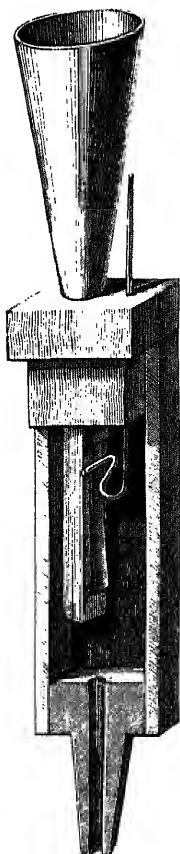
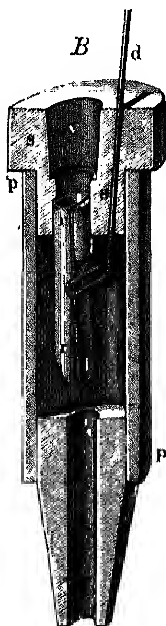


Fig. 769.



Dieser Stopfen *s* mit der Canile *r* und der Zunge *l* wird nun in das kurze Rohr *pp* eingesetzt, in welches man von unten her den Wind einblasen kann. Sobald dies geschieht, beginnt die Zunge *l* zu vibrieren, es wird also in den durch die Zunge bedingten Intervallen ein Luftstrom aus dem Inneren der Röhre *p* durch die Canile und die Höhlung *v* hervordringen, um dann sogleich wieder unterbrochen zu werden. Durch dieses stoßweise Vordringen des Luftstromes wird nun der Ton erzeugt, zu dessen Verstärkung man noch ein kegelförmiges Rohr, den Schallbecher, aufsetzt, wie man es in Fig. 768 sieht.

Solche Zungen, welche, wie die in Fig. 766 und Fig. 767 dargestellten, etwas kleiner sind als die zugehörige Öffnung, so also, daß sie mit den Rändern derselben nicht in Berührung kommen, nennt man durchschlagende Zungen, im Gegensatz zu den aufschlagenden, welche, wie die Zunge Fig. 769, bei jeder Oszillation auf den Rahmen schlagen. Die

aufschlagenden Zungen werden ihres rasselnden Tones wegen selten mehr gebraucht.

Durch Aufziehen oder Niederdrücken des Stimmdrahtes d, dessen unteres horizontal gebogenes Ende die Zunge gegen die Canile andrückt, kann man die Länge des vibrierenden Teiles der Zunge vergrößern oder verkleinern und dadurch die Tonhöhe abändern.

Wenn gar kein Schallbecher oder doch nur eine kurze Röhre auf das Zungenwerk aufgesetzt ist, so hängt die Schwingungsgeschwindigkeit der Zunge, also der Ton, den sie gibt, von ihrer Elastizität und von ihren Dimensionen ab; wenn aber eine lange Röhre aufgesetzt wird, so modifiziert diese den Ton wesentlich; die Bewegung der Zunge hängt dann mehr von der Bewegung der in der langen Pfeife hin und her laufenden Luftwellen als von ihrer eigenen Elastizität ab; sie wird also eigentlich mehr geschwungen, als sie selbst schwingt.

Fig. 770.

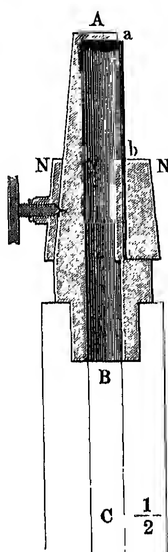
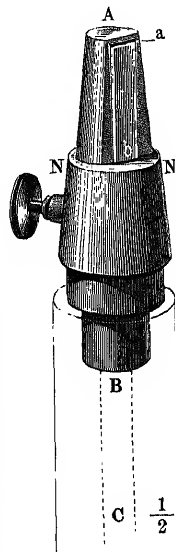


Fig. 771.



W. Weber hat über diesen Gegenstand eine Reihe ausführlicher Versuche angestellt[1]). Fig. 770 und Fig. 771 stellen seinen Apparat in $^1/_2$ der natürlichen Größe dar, und zwar Fig. 770 im Durchschnitt, Fig. 771 in perspektivischer Ansicht. Der schraffierte Teil AB ist aus Messing verfertigt, ba ist die vibrierende Zunge. Bei B können hölzerne Röhren von beliebiger Länge angesteckt werden, wie man aus den Figuren ersieht, wo sie nur durch Konturen angegeben sind.

Diese Vorrichtung wird nun mittels des konischen Zapfens NN in eine entsprechende Öffnung einer Windlade so eingesetzt, daß A nach unten, die hölzerne Ansatzröhre BC aber nach oben steht.

Als in den Apparat, Fig. 770, eine 0,48 mm dicke Messingzunge eingesetzt war und in die Windlade Luft eingepreßt wurde, erhielt Weber ohne Ansatz eines Holzrohres den Ton g^1. Als nun aber der Reihe nach Holzröhren von verschiedener Länge aufgesetzt wurden, erhielt er die folgenden Töne, wenn die Gesamtlänge der mittönenden Luftsäule die nachstehenden, in Millimetern ausgedrückten Werte hatte:

g^1	92 mm	c^1	290 mm
fis^1	178 „	ais	331 „
f^1	202 „	g	394 „
d^1	252 „	g^1	439 „

[1]) Pogg. Ann. 14, 16 und 17.

Kurze Ansatzröhren bringen also keine merkliche Veränderung der Tonhöhe hervor; bei allmählicher Verlängerung der Röhre wird aber der Ton tiefer, und zwar bis zur nächst niederen Oktave des Anfangstones, um dann für eine bestimmte Länge l (im vorliegenden Falle 440,6 mm) wieder auf den Ton zurückzuspringen, welchen die Zunge für sich allein gibt.

Die Länge l (hier 440,6 mm) ist die Länge einer offenen Pfeife, deren Grundton unisono ist mit dem Tone, welcher der Schwingungszahl der nur unter dem Einflusse ihrer Elastizität vibrierenden Zunge entspricht.

Eine Verlängerung der Röhre über die Länge l hinaus macht, daß der Ton abermals tiefer wird, und zwar in unserem Falle bis d^1 für die Röhrenlänge 866,3 mm, um für $2\,l$ (hier 881,2 mm) zum zweiten Male auf den ursprünglichen Ton zurückzuspringen.

Kurz, der Ton der Zungenpfeife ist für die Röhrenlängen l, $2\,l$, $3\,l$ usw. derselbe wie ohne Ansatzrohr, während jede andere Länge der Ansatzröhre den Ton der Zungenpfeife tiefer macht, wenn sie durch Einblasen von Luft in die Windlade zum Tönen gebracht wird, wie es bei den eben besprochenen Versuchen der Fall war.

Wird dagegen die Zungenpfeife dadurch zum Tönen gebracht, daß die Luft aus der Windlade ausgesaugt wird, so hat das Ansetzen von Röhren eine Erhöhung des Tones zur Folge.

Der Grund dieser Erscheinung ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Fig. 772 stelle eine an beiden Enden offene Röhre dar, welche eine im Zustande stehender Schwingungen sich befindliche Luftsäule enthält. Schwingungsknoten befinden sich in k und k', Bäuche dagegen in b und an den Enden der Röhre in b' und b''.

Der Ton dieser Pfeife wird nun keinerlei Änderung erfahren, wenn an irgend einer Stelle im Innern der Röhre ein Scheibchen angebracht wäre, dessen Ebene rechtwinkelig auf der Röhrenachse steht und welches genau dieselben Oszillationen machte, welche einer an dieser Stelle befindlichen Luftschicht infolge des Tönens der in der Rohre eingeschlossenen Luftsäule zukommen. An die Stelle dieses Scheibchens könnte aber auch ohne merkliche Änderung eine in gleicher Weise oszillierende Zunge eingesetzt werden.

Es sei nun eine solche Zunge in der Röhre Fig. 772 bei z zwischen dem Schwingungsknoten k' und dem Bauche angebracht, welche so eingerichtet ist, daß sie die Verbindung zwischen dem oberen und unteren Teile der Röhre absperrt, während sie aus ihrer Gleichgewichtslage nach oben (also in Beziehung auf den oberen Teil der Röhre nach innen) entfernt ist, daß dagegen die Verbindung zwischen der Luft im oberen und unteren Teile der Röhre hergestellt ist, während die Zunge nach unten (bzw. nach außen) gebogen ist.

Die Zunge z wird sich aber von ihrer Gleichgewichtslage nach unten (außen) bewegen müssen, während die benachbarten Luftschichten infolge der stehenden Wellen in der Rohre gleichfalls von einer nach unten gerichteten Bewegung affiziert sind, während sich also beim Knoten k eine Luftverdichtung bildet. Während der äußeren Schwingung der Zunge ist es offenbar einerlei, ob die Luft unmittelbar über z mit der bei k' verdichteten Luft im unteren Teile der Röhre $b'\,b''$ oder mit der gleich verdichteten Luft in der Windlade, W, Fig. 773, kommuniziert; während der inneren Schwingung der

Zunge aber ist die Verbindung zwischen dem unteren Teile des Röhrenstückes $z\,b'$ mit dem unter z befindlichen Raume ohnehin unterbrochen, es ist also in dieser Periode gleichgültig, ob sich unterhalb z das Röhrenstück $z\,b''$ oder die Windlade befindet.

Man kann also, ohne in den Vibrationen der Zunge und der Luftschichten in dem Röhrenstücke $z\,b'$ etwas zu ändern, das Röhrenstück $z\,b''$

Fig. 772.

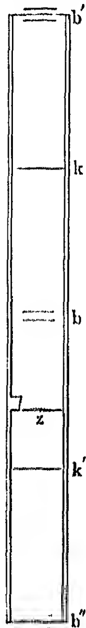


Fig. 773.

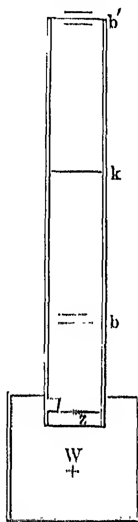


Fig. 774.

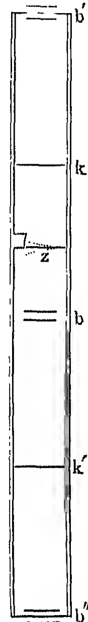
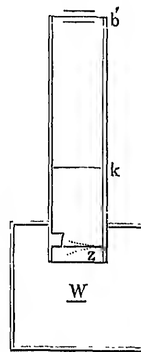


Fig. 775.



mit einer Windlade vertauschen, welche entsprechend verdichtete Luft enthält.

Aus diesem Raisonnement ergibt sich nun auch, daß in einer Zungenpfeife, welche auf einer Windlade mit verdichteter Luft aufgesetzt wird, sich in der Röhre über der Zunge zunächst ein Bauch, und erst jenseits des Bauches ein Knoten bilden kann.

Betrachten wir aber nun den Einfluß, welchen die abwechselnde Verdichtung und Verdünnung der Luft am Fuße der Röhre $z\,b'$ auf die Schwingungen der Zunge ausüben muß.

Während der inneren Schwingung der Zunge ist die untere Endabteilung der Luftsäule $z\,b'$ verdünnt, und sie beschleunigt die Platte nach innen, während dieselbe durch ihre eigene Elastizität nach außen beschleunigt ist. Während der äußeren Schwingung der Zunge ist dagegen die untere Endabteilung der Luftsäule $z\,b'$ verdichtet und sie beschleunigt die Platte nach außen, während dieselbe durch ihre eigene Elastizität eine Beschleunigung nach innen erleidet.

Der Einfluß der schwingenden Luftsäule hält also immer einem Teile der elastischen Kraft der Zunge das Gleichgewicht, sie wird also langsamer schwingen, der Ton der Zungenpfeife wird also tiefer sein, als der Ton der isoliert schwingenden Zunge.

Denken wir uns dagegen die Zunge in der Röhre $b'b''$, Fig. 774, zwischen dem Knoten k und dem Bauche b eingesetzt, so ist klar, daß die äußere (nach unten gerichtete) Schwingung der Zunge z mit einer Verdünnung der Luft zwischen b und k zusammenfallen muß. Während also die Zunge z so steht, daß der obere Teil zb' der Röhre mit dem unteren zb'' kommuniziert, ist die Luft unmittelbar über und unter z verdünnt; man kann also, ohne die Schwingungen in dem Röhrenstücke zb'' zu beeinflussen, statt des unteren Röhrenstückes zb'' eine Windlade W, Fig. 775, ansetzen, welche verdünnte Luft enthält; in diesem Falle aber muß sich in der Röhre zunächst über der Zunge ein Knoten und erst jenseits desselben ein Bauch bilden.

Für den Fall, daß die Luft in der Windlade verdünnt wird, ist also während der äußeren Schwingung der Zunge das untere Ende der Luftsäule zb', Fig. 775, verdünnt und beschleunigt die Platte nach innen, während sie durch ihre eigene Elastizität nach derselben Richtung beschleunigt wird. Während der inneren Schwingung der Zunge aber ist die Luft im unteren Ende der Röhre zb' verdichtet, und beschleunigt die Platte gleich ihrer eigenen Elastizität nach außen.

Da also hier der Einfluß der schwingenden Luftsäule stets in gleichem Sinne auf die Zunge wirkt, wie deren eigene Elastizität, so muß sie schneller schwingen, ihr Ton muß höher werden, als der Ton der isoliert schwingenden Platte.

Wenn die Zunge gerade an der Stelle eines Bauches sich befindet, so findet unmittelbar über derselben weder Verdünnung noch Verdichtung der Luft statt, die stehenden Wellen der Luftsäule in der Röhre üben also in diesem Falle weder einen beschleunigenden noch einen verzögernden Einfluß auf die Vibrationen der Zungen aus, der Ton der Luftsäule ist unisono mit dem der isoliert schwingenden Zunge.

§ 237. Die Labial- oder Lippenpfeifen. Eine zweite Art der Zungenwerke wird durch membranöse elastische Platten gebildet, welche die beiden Lippen eines schmalen Spaltes bilden und welche durch ihre Oszillationen den Spalt abwechselnd öffnen und schließen. Joh. Müller konstruierte membranöse Zungenpfeifen in der durch Fig. 776 erläuterten Weise, indem er auf ein rechtwinkelig zur Achse abgeschnittenes Rohr zwei Lappen von vulkanisiertem Kautschuk so aufband, daß nur ein schmaler Spalt zwischen ihnen frei blieb. Noch besser als diese sprechen solche membranöse Zungenpfeifen an, wie sie in Fig. 777 dargestellt sind. Das obere Ende des hölzernen Rohres, in welches unten die Luft eingeblasen wird, ist von zwei Seiten schräg abgeschnitten, wie man Fig. 778 sieht, so daß zwei ungefähr rechtwinkelige Spitzen zwischen den beiden schrägen Schnittflächen stehen bleiben. Über die beiden Abdachungsflächen werden alsdann mit leichter Spannung Streifchen von Kautschuk so gelegt, daß sie einen schmalen Spalt zwischen sich lassen, und endlich mit einem Faden festgebunden.

Sehr leicht läßt sich eine membranöse Zungenpfeife auch in folgender Weise herrichten: von einer Röhre dünnen vulkanisierten Kautschuks, welche 1 bis 2 cm weit ist, schneide man ein 4 bis 5 cm langes Stück ab und befestige es am Ende eines Glasrohres von entsprechender Weite, wie man Fig. 779 sieht. Wenn man nun die Kautschukröhre an ihrem oberen Ende

Der Hohlzylinder *H* mit dem Maßstabe *M* (Fig. 58 a, b, c, e, f), ebenfalls aus Eisen. Der Hohlzylinder trägt am unteren Ende einen Ring *R*, welcher mit seiner konischen Öffnung genau auf den massiven Konus *C* paßt

Fig. 58 a.

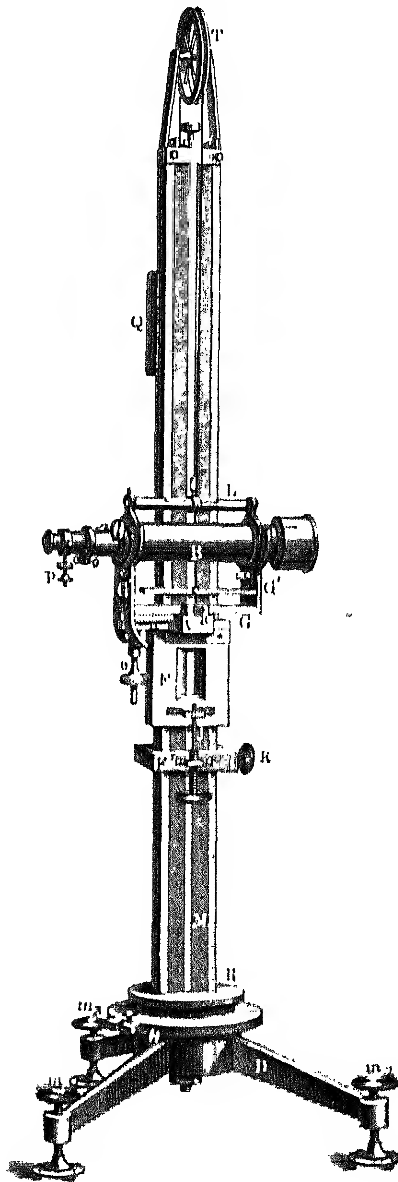


Fig. 58 c.

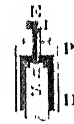


Fig. 58 d.

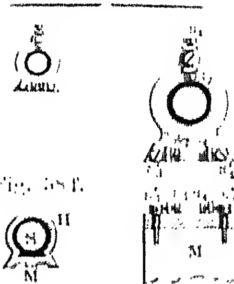
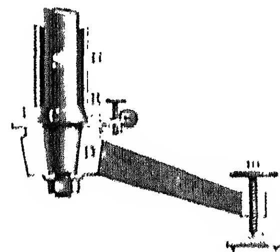


Fig. 58 e.

Fig. 58 f.



Fig. 58 b.



und auf demselben drehbar ist. Am oberen Ende ist der Hohlzylinder durch die angeschraubte Platte *P* geschlossen, welche durch die Schraube *E* auf der Säule *S* aufruht. Hierdurch ist also erreicht, daß Hohlzylinder samt Maßstab um die Mittelsäule gedreht werden können. Die Befestigung der

an zwei gegenüberliegenden Punkten faßt und auseinanderzieht, so bildet sich eine Ritze, wie sie unsere Figur zeigt, deren Ränder von Kautschuk sind, und wenn man dann unten in das Rohr hineinbläst, so erhält man einen Ton, der um so höher wird, je stärker die beiden Lippen angespannt

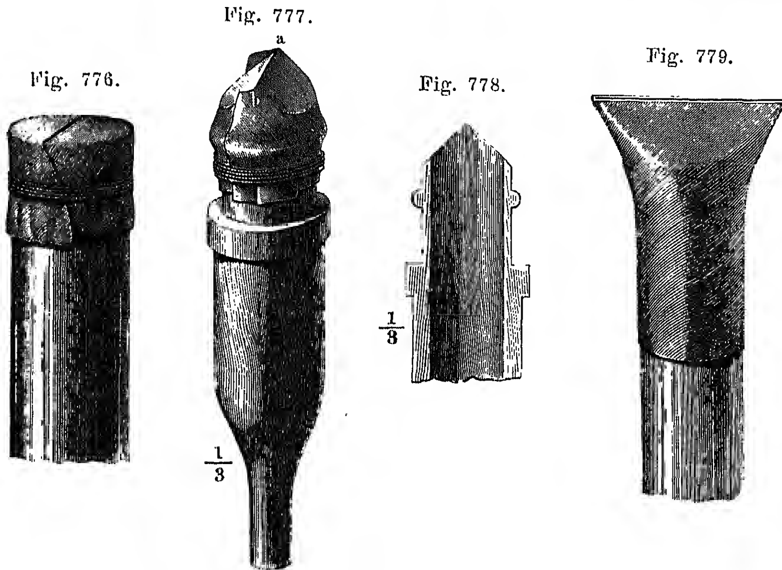


Fig. 776. Fig. 777. Fig. 778. Fig. 779.

werden. Man kann dabei ganz deutlich die Vibrationen der beiden Kautschuklippen sehen, welche die Ritze bilden.

§ 238. Mitteilungen der Schallschwingungen zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern. Wenn mehrere feste Körper untereinander zu einem ganzen verbunden sind, so verbreiten sich die von einem Teile dieses Systems ausgehenden Vibrationen mit der größten Leichtigkeit als fortschreitende Wellen über die ganze Masse; an der Grenze angekommen, gehen nun aber die Wellen nur teilweise in das angrenzende Mittel, einen luftförmigen oder flüssigen Körper, über, teilweise werden sie reflektiert und durch die Interferenz der reflektierten Wellen mit den neu ankommenden bilden sich in den einzelnen Teilen des festen Systems stehende Schwingungen. Ein solches System bildet ein ganzes, welches sich, wenn ein Punkt in Schwingungen versetzt wird, wie ein einzelner fester Körper in einzelne schwingende Teile abteilt, die durch Schwingungsknoten getrennt sind. Jeder einzelne Teil verliert gewissermaßen seine Individualität; seine Verbindung mit den benachbarten Stücken hindert ihn, so zu schwingen, wie es geschehen würde, wenn er allein wäre.

Savart hat viele Versuche über diesen Gegenstand gemacht; er hat seine Apparate auf mancherlei Weise abgeändert, um zu zeigen, daß sich die Vibrationen wirklich über ein ganzes System von Platten, Streifen, Glocken, Saiten usw. verbreiten. Unter den Resultaten, die in seiner Abhandlung[1]) niedergelegt sind, wollen wir folgendes Beispiel hervorheben, welches den

[1]) Ann. de Phys. et de Chim. T. 25.

Vorteil hat, zugleich den Einfluß nachzuweisen, welchen die Ric
Bewegung auf die Bildung der Schwingungsknoten hat. Eine He
Fig. 780, ist an dem einen Ende befestigt, an dem anderen aber

Fig. 780.



Saite *b* gespannt,
kann durch einen
mehr oder weniger
werden. Sobald
durch einen Fiede
gestrichen wird, gerät auch die Platte *a* in Schwingungen. Für
Ton sind die Knotenlinien, welche sie auf der oberen Seite zeig
Schiefe des Fiedelbogens oder der Richtung abhängig, in welcher
schwingt, wie man in F
784 sieht, wo die ent
Richtung, in welcher
bogen streicht, durch ein
Pfeil bezeichnet ist.

Fig. 781.

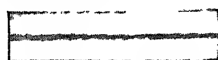


Fig. 782.



Fig. 783.



Fig. 784.



Während sich die S
leicht über ein System
Körpern verbreiten, gehe
so leicht von einem fes
auf einen flüssigen, noc
leicht auf einen gasförm
so kommt es denn, da
ziemlich stark vibrierende feste Körper doch nur einen ganz
Ton hören läßt, nur weil er seine Schwingungen der Luft nic
mitteilen kann. Dies ist z. B. teilweise die Ursache, warum die S
stark angeschlagen und frei in der Luft gehalten, doch nur
schwachen Ton hören läßt.

Um den Ton eines solchen Körpers zu verstärken, muß ma
teilung seiner Schwingungen an die Luft durch Resonanz, d.
befördern, daß man die stehenden Schwingungen des tönenden K
auf einen anderen zu übertragen sucht. Ein Mittel dazu haben
kennen gelernt, die schwach tönenden, aber doch stark vibrieren
vor eine Röhre von entsprechender Länge zu halten, und so die
in derselben zum Mittönen zu bringen.

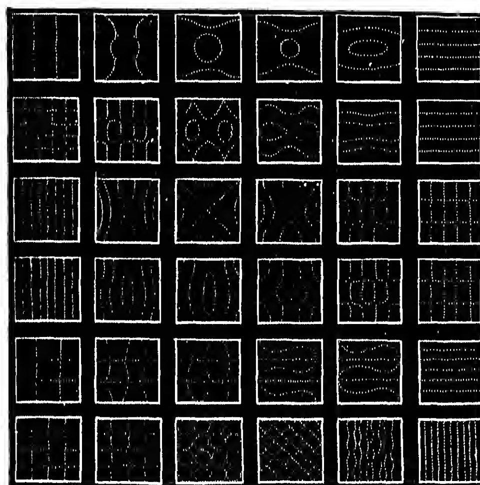
Ein zweites Mittel, den Ton zu verstärken, besteht darin, de
Körper mit einem anderen, leicht in Schwingungen zu versetzen
Körper von verhältnismäßig großer Oberfläche in Berührung z
Es bilden sich dann auf diesem, wie schon erwähnt wurde, ebenfal
Schallschwingungen, und diese teilen sich, der großen Oberfläch
tönenden (resonierenden) Körpers wegen, der Luft leichter mit.
z. B. die stark angeschlagene, aber in freier Luft schwach tönen
gabel auf einen Kasten von dünnem, elastischem Holze, so hört m
ungleich stärker. Darauf beruht die Anwendung des Resonanz
verschiedenen musikalischen Instrumenten. Bei Flöten, Orgelpfei
kein Resonanzboden nötig, weil hier die stehenden Schwingungen
masse den Ton geben und diese sich ganz leicht der umgebenden Lu

So wie Vibrationen fester Körper Schallwellen in der Luft er
können auch umgekehrt Schallwellen, die, sich in der Luft verbrei

festen Körper treffen, diesen zum Vibrieren bringen. So sieht man z. B. die Saite eines Instrumentes in Schwingungen geraten, wenn sie von den Schallwellen des Tones, welchen sie selbst gibt, oder eines seiner harmonischen Töne getroffen wird; so erzittern die Fensterscheiben heftig unter dem Einflusse gewisser Töne der Stimme oder des Knalles einer Kanone. Ein Trinkglas, welches an seinem Boden frei gehalten wird, kann durch kräftiges Ansingen in der Höhe seines Eigentones zum Zerspringen gebracht werden.

Leicht in Schwingungen zu versetzende Körper teilen sich, wenn sie durch Schallwellen, welche sie treffen, in Vibrationen versetzt werden, durch Knotenlinien auf ähnliche Weise in einzelne vibrierende Abteilungen, wie dies auch bei selbsttönenden Körpern der Fall ist. Savart, welcher diese Erscheinungen ganz besonders studiert hat, befestigte Membranen von Papier, Pergament oder Goldschlägerhaut, indem er ihre Ränder auf einen Holzrahmen oder über die Öffnung einer Glasglocke klebte; sie wurden mehr oder weniger befeuchtet, um ihnen eine größere oder geringere Spannung zu erteilen. Um sie in Schwingungen zu versetzen, näherte er eine schwingende Stimmgabel oder eine Orgelpfeife, deren Ton voll und andauernd war. Sobald der Ton sich hören läßt, vibriert die Membran gerade so, als ob sie direkt wäre erschüttert worden; die Sandkörnchen, welche sie bedecken, springen auf der Oberfläche umher, um sich in den Knotenlinien anzuhäufen. Die Figuren, welche man erhält, sind äußerst mannigfaltig und hängen von der Spannung der Membran und der Höhe der Töne ab, welche sie treffen.

Fig. 785.



In Fig. 785 ist eine Reihe solcher an quadratischen Membranen beobachteter Knotenlinien dargestellt. Savart hat beobachtet, daß, wenn man durch irgend einen Ton eine bestimmte Figur erzeugt hat, dieselbe allmählich in andere übergeht, wenn der Ton höher und höher wird. In unserer Figur enthält jede Horizontalreihe eine Reihe solcher aufeinander folgender Modifikationen.

Eine neuere ausführliche Untersuchung über Klangfiguren auf gespannten Membranen und auf Glasplatten, welche mittels Tonübertragung hervorgerufen werden, ist von K. Antolik in Arad[1]) veröffentlicht worden. Der Verfasser faßt seine Ergebnisse in 26 Sätzen zusammen, unter denen wir hervorheben: Die Membranen verhalten sich wie ein System von unendlich vielen Saiten, welche in zwei zueinander senkrecht stehenden Richtungen

[1]) Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn 8 (1890).

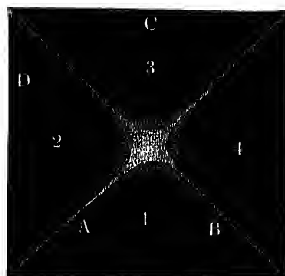
schwingen. Es treten im allgemeinen zugleich Transversal- und Long
schwingungen auf. Je höher die Töne sind, desto mehr treten di
versalschwingungen in den Hintergrund. Die letzteren machen
gestreuten Sand heftig in die Höhe springen, die Longitudinalschwi
bewirken ein sanftes Gleiten desselben. Bei Klangfiguren, welc
Longitudinalschwingungen erzeugt werden, scheinen die Dimensi
Figuren und Wellenlängen unabhängig zu sein von der Spannung, G
Gestalt der Membran und von ihrer Belastung. Dagegen hat letzter
Einfluß auf die Transversalschwingungen. Die Klangfiguren der feste
unterscheiden sich von denen der Membranen insbesondere dadurch
weniger ausgebildet sind als die letzteren.

Viertes Kapitel.

Von dem Zusammenwirken der Töne.

§ 239. Interferenz isochroner Schallwellen. Schon im § 208 haben wir das Resultat des Zusammenwirkens oder der Interferenz von Wellenzügen gleicher Wellenlänge, wie sie durch isochrone Schwingungen entstehen, abgeleitet. Seitdem sind wir mit experimentellen Hilfsmitteln ausgerüstet worden, welche uns gestatten, die damals erhaltenen theoretischen Folgerungen durch Versuche zu bestätigen. Wenn zwei Wellenzüge in derselben Fortpflanzungsrichtung zusammentreffen, addieren sich ihre Exkursionen mit Rücksicht auf das Zeichen. Ist demnach ihr Gangunterschied ein ungerades Multiplum der halben Wellenlänge, so vernichten sich Wellen gleicher Amplituden; ist ihr Gangunterschied = Null oder ein gerades Multiplum der halben Wellenlänge, so erhält man eine resultierende Welle doppelter Amplitude. Es muß daher unter Umständen gelingen, durch Zusammenwirken zweier Töne deren Intensität zu vermindern oder zu steigern. Zu diesem Zwecke dienen folgende Versuche: Eine quadratische Platte, wie sie zu den Klangfiguren Chladnis dient, wird so eingespannt und zum Tönen gebracht, daß die Klangfigur, Fig. 786, entsteht. Hierauf wird ein Röhrensystem aus Holz oder Pappe von der in Fig. 787 abgebildeten Form, dessen obere Mündung *a* mit einer Membran verschlossen ist, mit den unteren gabelförmigen Enden in kurzem Abstande über die Klangplatte gehalten, so daß die beiden Röhrenmündungen abwechselnd über zwei gleich schwingende Felder 1 und 3, 2 und 4, dann über zwei entgegengesetzt schwingende Felder, 1 und 2, 3 und 4 zu stehen kommen. Im ersten Falle wird Sand, den man auf die Membran gestreut hat, lebhaft bewegt, im zweiten Falle bleibt er ruhig liegen.

Fig. 786.



Am klarsten und entschiedensten zeigt sich die Interferenz der Schallwellen, wenn man einen Ton in eine Röhre eintreten läßt, welche in eine zwei Zimmer trennende Wand eingemauert ist und die sich im Inneren der Wand in zwei alsbald sich wieder vereinigende Kanäle teilt. Wenn die Differenz der Wege gerade $1/2$ Wellenlänge des einfallenden Tones beträgt, so müssen sich die aus den beiden Kanälen kommenden Schallwellen bei ihrem Zusammentreffen aufheben. Wenn also in dem einen Zimmer der richtige

Ton in die Röhre eintritt, so wird man im anderen nichts hören, wenn beide Kanäle offen sind, während der Ton sogleich wieder erscheint, wenn einer der Kanäle verschlossen wird.

Die Idee dieses Versuches rührt ursprünglich von Herschel her, aber erst Nörrenberg hat nach diesem Prinzip einen Apparat konstruiert, welcher genügende Resultate liefert.

Fig. 788 stellt eine Nörrenbergsche Interferenzröhre im horizontalen Durchschnitt dar. Der ganze Apparat ist in eine Wand eingemauert,

Fig. 787.

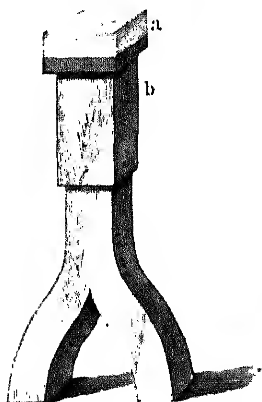
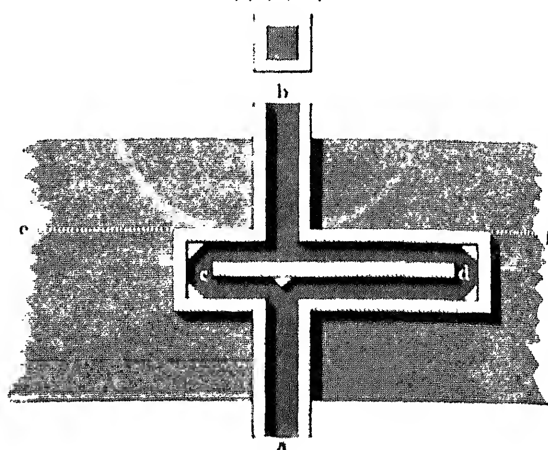
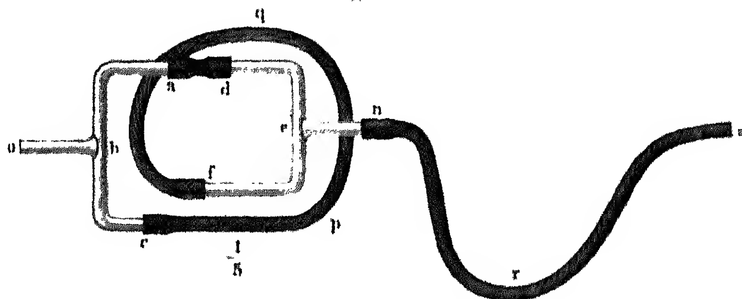


Fig. 788.



welche zwei Zimmer trennt, so daß die Luft der beiden Zimmer nur durch die Kanäle des Apparates in Verbindung steht. Die Dimensionen des Apparates sind derart, daß der Weg von a über d nach b um 30 cm länger ist, als der Weg von a über c nach d. Läßt man daher bei a einen Ton von 60 cm Wellenlänge, wie ihn eine 30 cm lange offene Pfeife bei mäßigem Anblasen gibt, eintreten, so beträgt der Gangunterschied gerade eine halbe

Fig. 789.



Wellenlänge und ist daher im anderen Zimmer fast nichts zu hören. Dagegen wird der Ton hörbar, wenn man bei c einen Schieber einschiebt, welcher einen der beiden Kanäle absperrt. Bläst man die Pfeife stärker an, so gibt sie ihren ersten Oberton mit der Wellenlänge = 30 cm, welcher dann auch bei offenem Schieber im anderen Zimmer stark gehört wird.

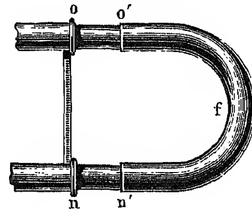
Fig. 789 stellt einen von Quincke konstruierten Apparat dar, welcher bestimmt ist, das Stimmgabel-a^1 (von 435 Schwingungen in der Sekunde)

auszulöschen. Die Enden zweier gabelförmig gebogenen Glasröhren *obac* und *nedf* sind einerseits durch den kurzen Kautschukschlauch *ad*, andererseits durch den ungefähr 39 cm langen Kautschukschlauch *cpqf* verbunden, so daß die Differenz der Wege *edab* und *efqpcb* gleich ist der halben Wellenlänge des Tones a^1 in der Luft. Das eine Ende *o* des Apparates wird mittels eines kurzen Kautschukrohres in den Gehörgang des einen Ohres eingesetzt, während das andere Ohr verstopft wird.

Fig. 790.



Fig. 791.



Läßt man nun den Klang einer entsprechenden Stimmgabel durch das offene Ende *s* des langen Kautschukschlauches *srn* in den Apparat eintreten, so hört man den Ton a^1 nicht, wohl aber die mitklingende Oktav a^2, während a^1 sogleich kräftig ertönt, wenn man den Gummischlauch *cpqf* mit den Fingern zudrückt.

Fig. 792.

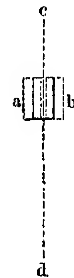
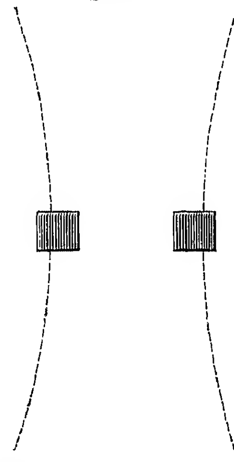


Fig. 793.



Kundt wendete seine Staubfiguren an, um die Interferenz isochroner Schallschwingungen sichtbar zu machen. Durch Reiben der Glasröhre *ab*, Fig. 790, wird dieselbe zum Tönen gebracht und erzeugt in dem weiteren Röhrenstücke *ca* Luftwellen, welche durch die bekannten Staubfiguren sichtbar werden. Bei *c* treten die Luftwellen in einen Doppelkanal von Blech und ziehen zur Hälfte über *g*, zur Hälfte über *f* nach *h*, um hier in das bei *k* verschlossene Glasrohr einzutreten. In *hk* werden nun ebenfalls Staubwellen erzeugt, sobald der Gangunterschied der von beiden Seiten her bei *h* zusammentreffenden Schallstrahlen gleich 0 oder gleich einem ganzen Vielfachen einer halben Wellenlänge ist. Wenn der Apparat so gestellt ist, wie die Fig. 790 zeigt, so ist der Weg von *c* über *g* nach *h* ebenso groß, wie der Weg von *c* über *f* nach *h*, der Gangunterschied ist 0 und in *hk* bilden sich die Staubwellen.

Das Röhrenstück *cfh* ist aber kein zusammenhängendes Ganzes, sondern das Röhrenstück *nfo* ist bei *n* und bei *o* in die Röhrenstücke *ho* und *cn* ein-

gesteckt, so daß man es ausziehen kann, wie die Fig. 791 erläutert. so weit ausgezogen, daß $oo' + nn' = \frac{1}{2}$ Wellenlänge ist (deren G mittels der Staubfiguren leicht bestimmen läßt), so beträgt der Ga schied der bei g zusammentreffenden Schallstrahlen gleichfalls $\frac{1}{2}$ länge, ihr Zusammenwirken kann also in gh keine stehende Luftwell regelmäßigen Staubfiguren erzeugen.

In Beziehung auf Fig. 790 ist übrigens noch zu bemerken, Deutlichkeit wegen der Querschnitt aller Röhren doppelt so groß g ist, als er im Verhältnis zu den Längendimensionen sein sollte.

König hat den beschriebenen Interferenzapparat mit eine metrischen Kapsel (§ 214) in Verbindung gebracht, deren Flamm brennt oder vibriert, je nachdem der Ton durch die Interferenz unt wird oder nicht.

Auch an der Seebeckschen Sirene läßt sich die Interferen indem man zwei benachbarte Löcher von entgegengesetzter Seite gl anbläst. Die von nahe derselben Stelle ausgehenden Schallwellen einen Gangunterschied gleich einer halben Welle haben, schwachen sic seitig, so daß man fast nur das Sausen der rotierenden Scheibe hö tritt nicht ein, wenn man die benachbarten Löcher von dersell gleichzeitig anbläst.

Versetzt man einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, den zwei Knotenstellen aufgehängt hat, durch Streichen mit einem Violin Schwingungen, so wird stets gleichzeitig auf einer Seite des Stabes verdichtet und auf der anderen Seite verdünnt. Es müssen daher beiden Seiten des Stabes Wellen mit einem Gangunterschiede eine Wellenlänge ausgehen, welche zur Interferenz gelangen. Dies wu auch von W. Weber und später von Kiessling[1] nachgewiese Fig. 792 die Endfläche des Stabes, die ganz ausgezogenen Linien sei lage, die gestrichelten Linien seine Exkursionen vor, so sind a u Ausgangsstellen der Wellen. Jeder Punkt der durch die Gerade gestellten Ebene ist von jenen gleich weit entfernt, erhält also gle gegengesetzte Impulse. Verstopft man sich ein Ohr, steckt in da einen Kautschukschlauch und führt die offene Mündung dieses S senkrecht auf cd hin und her, so verschwindet der Ton jedesmal, so die Mittelebene cd passiert.

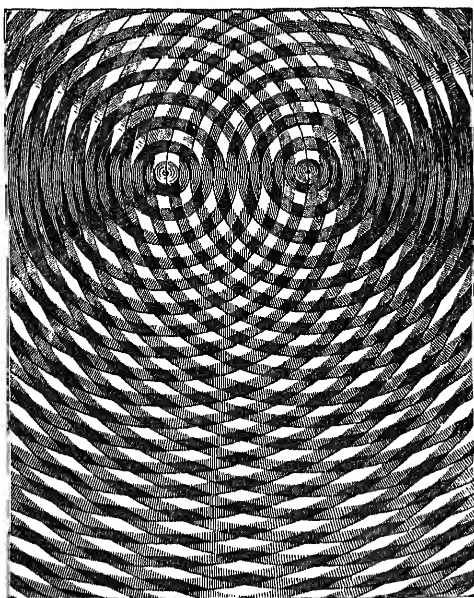
Dieselbe Erscheinung tritt auch an den Zinken einer Stimmg Da von jeder Zinke nach beiden Seiten der Schwingungsebene ei Interferenzebene sich erstreckt, so muß auch der Ton der Stimmg mal erlöschen, wenn man sie in der Nähe des Ohres einmal um il dreht. Der Ton muß am stärksten auftreten, wenn man die Mün Kautschukröhre in die Symmetrieebene der Gabel bringt. Dabei tr auch noch einige Komplikationen auf. Die Schallwellen der ein werden an den Wänden der anderen reflektiert und außerdem inte auch die von beiden Zinken ausgehenden Impulse untereinander. gnügen uns, mitzuteilen, daß nach Kiesslings Untersuchunge dieser Nebenumstände die von den Zinken ausgehenden Interfere nicht parallel bleiben, sondern hyperbolisch gekrümmt sind und zwar

[1]) Pogg. Ann. 130.

außen voneinander entfernen (Fig. 793, a. S. 721). Bedeckt man die eine Zinke durch eine Glasröhre, so tritt an der anderen die Interferenzebene wiederum in normaler Lage auf. Da die Wellenlänge des Tones einer Stimmgabel im Verhältnis zum Abstande der Zinken gewöhnlich sehr groß ist, so ist die Interferenz der von beiden Zinken ausgehenden Wellen in Luft nicht gut zu zeigen. Dagegen lassen sich nach Lommel[1]) die von den beiden Zinken in Quecksilber erregten Wellen und deren Interferenz auf folgende Weise stroboskopisch darstellen:

Zwei gleiche Wellensysteme werden auf der Oberfläche des in einer flachen Schale befindlichen Quecksilbers erregt durch eine Stimmgabel, an deren Zinken, die Fortsetzung derselben bildend, zwei Eisendrähte mit Klebwachs befestigt sind. Die mit einem Resonanzkasten versehene Stimmgabel wird, mit den Zinken nach unten, von einem Stativ festgehalten, so daß die Spitzen der Eisendrähte ein wenig in das Quecksilber eintauchen. Die Stimmgabel wird mittels einer zweiten, gleichgestimmten Gabel durch Resonanz zum Schwingen gebracht, um andere als die gewünschten Wellen, welche beim direkten Anstreichen oder Anschlagen unvermeidlich entstehen würden, auszuschließen. Das vom Heliostaten oder der elektrischen Lampe kommende Lichtbündel wird durch eine Linse auf dem Rande einer vertikalen, um ihre horizontale Achse drehbaren Metallscheibe konzentriert, welche längs ihrem Rande von einer Anzahl gleichweit abstehender Löcher durchbohrt ist. Der aus einem dieser Löcher austretende Lichtkegel wird von einem ebenen Spiegel unter einem Winkel von etwa 45° auf die Quecksilberoberfläche reflektiert, und das reelle, vergrößerte Bild der letzteren mittels einer geeigneten Linse auf einem vertikalen Schirme entworfen. Steht die Lochscheibe still, so sieht man auf dem Schirme die Wellenringe selbst nicht, weil dieselben zu rasch aufeinander folgen; man sieht aber ein System abwechselnd hellerer und dunklerer homofokaler Hyperbeln, deren gemeinsame Brennpunkte mit den Eintauchungsstellen der Drahtspitzen zusammenfallen; die helleren Hyperbeln sind die Orte aller Punkte, in welchen die beiden Wellensysteme sich aufheben. Dreht man aber die Scheibe, so werden in der dadurch bewirkten intermittierenden Beleuchtung auch die Wellenringe selbst sichtbar, und man findet leicht eine solche Drehungsgeschwindigkeit, bei welcher die Wellen still zu stehen scheinen.

Fig. 794.



[1]) Wiedem. Ann. 26.

Die Fig. 794 gibt eine Darstellung der Erscheinung. Dreht man die Scheibe etwas zu langsam oder etwas zu rasch, so scheinen sich die Wellenringe nach außen oder nach innen zu bewegen. Bei diesem Versuche würde die rotierende Scheibe vorteilhaft durch eine Machsche Stimmgabel (§ 228) ersetzt werden.

§ 240. Abweichungen vom Prinzip der Koexistenz kleiner Bewegungen; Machs Untersuchung der Funkenwellen. Die im vorausgehenden Paragraphen beschriebenen Versuche beruhen auf dem früher (§ 208) mitgeteilten Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen, welchem gemäß sich die durch die komponierenden Wellen hervorgebrachten kleinen Verschiebungen algebraisch addieren. Man kann dies (bei Transversalwellen) auch so ausdrücken, daß sich die Wellen übereinander lagern. Fallen ihre Fortpflanzungsrichtungen nicht zusammen, sondern durchkreuzen sie sich, so schreiten die Wellen ungestört übereinander hinweg, ohne sich gegenseitig zu stören. Dort, wo Teile des Körpers, der die Wellenbewegungen fortpflanzt, von beiden Wellen zugleich bewegt werden, legen sich die Berge und Täler der einen Welle über die Berge und Täler der anderen Welle, wodurch freilich daselbst die Wellenform modifiziert wird. Aber diese Modifikation schreitet nicht mit den Wellen fort. Haben sie den Kreuzungspunkt überschritten, so haben sie auch die ursprüngliche Form wieder erlangt. Man kann sich hiervon ein ungefähres Bild verschaffen, wenn man sich vorstellt, daß zwei flache Bänder aus biegsamem Stoffe, von denen jedes aus allmählich dicker und wieder dünner werdenden Stücken besteht, übers Kreuz aufeinander gelegt und dann ihrer Länge nach fortgeschleift werden. An der Durchkreuzungsstelle wird sich die Oberfläche, je nachdem gerade zwei dicke oder zwei dünne Stellen oder eine dicke und eine dünne Stelle zusammentreffen, zu doppelter Höhe erheben oder niedersenken oder eine mittlere Höhe einnehmen, während die einzelnen Bänder nach wie vor ihre ursprüngliche wellige Oberfläche behalten. Dabei darf man freilich nicht vergessen, daß bei diesen Bändern auch der materielle Inhalt der Wellen fortschreitet, was bei den wirklichen Wellen nicht der Fall ist.

Dieses Pinzip gilt aber streng genommen nur für Wellen mit unendlich kleinen Amplituden. Bei den Wellen mit Amplituden endlicher, aber doch relativ mäßiger Größe, wie sie in der Regel vorkommen, sind die Abweichungen von dem Prinzip der Koexistenz meistens geringfügig, so daß sie nicht merklich hervortreten. Dagegen sind sie nicht mehr zu vernachlässigen bei Wellen, welche durch sehr heftige Schallerregungen entstehen, wie z. B. bei Explosionen und elektrischen Funken.

Wir haben bereits im § 201 mitgeteilt, daß nach Regnaults Messungen die Schallwellen einer Kanone in der Nähe derselben eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben und erst nach ihrer Ausbreitung, wodurch die Intensität geschwächt, also die Amplitude verkleinert wird, einen nahezu konstanten Minimalwert der Geschwindigkeit annehmen. Daraus folgt, daß, wenn man diese Wellen rückgängig machen würde, so daß sie sich gegen die Kanonenmündung hin wieder vereinigen, mit der dadurch wachsenden Intensität der Schwingungen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder zunehmen müßte. Durch Interferenz zweier isochroner Wellen kann also unter Umständen nicht allein eine Welle mit größerer Amplitude ent-

Platte P an dem Hohlzylinder ist in der Weise ausgeführt, daß beiden geg einander horizontale Verstellungen in jeder Richtung gegeben werden kön wozu die Schrauben s_1, s_2, s_3 und s_4 (Fig. 58 d) dienen, welche auf die Schlitzen beweglichen Schrauben s'_3, s'_4 (Fig. 58 e, die andere vertikale Schra nicht sichtbar) wirken. Der mit dem Hohlzylinder ein Stück bildende M stab M hat einen trapezförmigen Querschnitt (Fig. 58 f) und trägt auf ein eingelegten Silberstreifen die Millimeterteilung[1]).

Der Schlitten FF' besteht in zwei Teilen aus Messing, dem obe größeren F und dem unteren kleineren F', welche nur durch die Dif rentialschraube JJ' miteinander verbunden sind und beide den p matischen Maßstab von drei Seiten umklammern. Mittels der Klemmschra K kann der Teil F' an den Maßstab befestigt werden, worauf die fe Bewegung des Schlittens F mittels der Differentialschraube J erfolgt. Auß dem ist dieser Schlitten mittels einer Darmsaite, welche über die Rolle gelegt ist und ein Gewicht Q trägt, am Fallen gehindert und mit gering Kraftaufwande vertikal verschiebbar.

Der Schlitten trägt einen Vorsprung V mit einem horizontalen Achs lager, worin die stählerne Achse a des Gestelles $G'GG'$ drehbar ist, des vertikale Teile $G'G'$ in die ringförmigen Träger des Fernrohrs B endig Mittels der Schraube O, welche gegen den vom Schlitten nach links herv ragenden Arm n wirkt, kann das ganze Gestell um die Achse a gedreht werd

Das Fernrohr B ist ein sogenanntes astronomisches, welches Gegenstände verkehrt zeigt. Die innere Einrichtung des Fernrohrs wer wir erst in der Optik kennen lernen; hier muß als bekannt vorausgese werden, daß in dem vorderen ausziehbaren Teile desselben, der Okularröh ein Bild des beobachteten Gegenstandes entsteht und daß in der Ebene die Bildes ein feines Fadenkreuz aus einem vertikalen und einem horizonta Spinnfaden ausgespannt ist, welches zugleich mit dem avisierten Gegensta scharf und deutlich gesehen wird, wenn man die Röhre richtig ausgezogen Der Rahmen, auf welchem das Fadenkreuz aufgespannt ist, kann mit einer Mikrometerschraube p in vertikaler Richtung gehoben oder gesenkt der Betrag dieser Verschiebung in einer im Okular vorhandenen Skala an der eingeteilten Trommel der Schraube abgelesen werden, ähnlich so, dies im § 20 beschrieben ist.

Die Aufstellung des Fernrohrs auf seinen Trägern ist dieselbe, sie bei Nivellierinstrumenten und auch sonst noch häufig vorkommt, wesh wir sie hier näher besprechen wollen. Das Fernrohr ist nämlich gegen be Enden des Hauptrohrs mit zwei Ringen aus hartem Rotguß von gen gleichen Durchmessern versehen, welche auf der Drehbank zusammen gedreht wurden.

Mit diesen Ringen lagert sich das Fernrohr in den halbkreisförmi Ausschnitten des Trägers und wird durch darüber geschobene Spannung

[1]) Da infolge der verschieden starken Ausdehnung von Eisen und Silber letztere pro Meter und Grad um 0,0081 mm länger wird als das erstere, so der Silberstreifen nicht unverschiebbar befestigt werden. Man bringt den Sil streifen auf einem Messingstabe an und befestigt letzteren verschiebbar auf Eisensäule. Der Unterschied in der Verlängerung zwischen Messing und Sil beträgt pro Meter und Grad nur 0,00051 mm, und kann daher der Silberstrei fest in das Messing eingelassen werden.

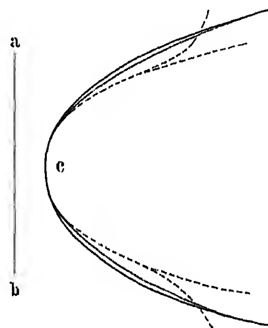
stehen, sondern dieselbe kann auch eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, was durch das Prinzip der Übereinanderlagerung allein nicht zu erklären ist.

Wir können diesen Gegenstand hier nicht theoretisch näher begründen, sondern müssen uns auf experimentellen Nachweis beschränken.

Einen solchen liefern die zahlreichen, sehr interessanten Interferenzerscheinungen, welche E. Mach[1]) an den Schallwellen beobachtet hat, die durch Explosionen oder durch elektrische Funken hervorgerufen werden. Die Beobachtungsmethode gründete sich im Anschluß an K. Antolik[2]) auf die Figur, welche eine schwach berußte Glasplatte zeigt, wenn man sie der Einwirkung der in nächster Nähe überspringenden Funken aussetzt. Die Erschütterung fegt den Ruß an gewissen Stellen weg und häuft ihn an anderen an, so daß derselbe eine analoge Rolle spielt, wie der Lykopodiumstaub in den Kundtschen Röhren oder der Sand auf den Klangfiguren.

Um wenigstens ein Beispiel anzuführen, wollen wir die Erscheinung beschreiben, welche man erhält, wenn man auf der berußten Glasplatte gleichzeitig einen elektrischen Funken auf der geradlinigen Bahn *ab*, Fig. 795, und einen anderen durch eine punktförmige (sehr kurze geradlinige) Bahn *c* überspringen läßt. Es geht dann von *ab* als Achse eine Zylinderwelle, von *c* als Mittelpunkt eine Kugelwelle aus. Die Gesamtheit der Durchschnittspunkte der beiden Wellen bildet die Interferenzfläche. Betrachtet man den Vorgang nur so weit, als er in der Ebene *abc* stattfindet, so schreitet von *ab* aus eine geradlinige, von *c* aus eine kreisförmige Welle fort. Da nun bekanntlich alle Punkte, die gleich weit von *ab* wie von *c* entfernt sind, eine Parabel bilden, deren Direktryx *ab*, deren Brennpunkt *c* ist, so muß die Interferenzlinie eben die Form dieser Parabel haben. In der Tat stimmt nun die im Ruß entstehende Figur mit derselben nahe überein, insbesondere, wenn man die Glasplatte unbedeckt läßt. Bedeckt man sie aber mit einer zweiten Platte, wodurch die Intensität der Schallwellen, insbesondere der von *ab* ausgehenden, gesteigert werden muß, so bemerkt man nicht allein, daß die beiden Paraboläste etwas nach einwärts abweichen, sondern es zeigen sich dieselben in je zwei Äste gespalten, so daß eine V-artige Ausbreitung derselben erfolgt. In der Fig. 795 zeigt die dickere Linie die theoretische Parabel, die dünnere die Interferenzlinie bei unbedeckter, die punktierte, gespaltene jene bei bedeckter Platte.

Fig. 795.



Offenbar muß die um *c* entwickelte Welle bei ihrer Ausbreitung rascher geschwächt werden als die von *ab* ausgehende. Die erstere wird daher rascher an Fortpflanzungsgeschwindigkeit abnehmen und deshalb müssen die gleichzeitig erreichten Punkte, welche die Interferenzlinie bilden, näher an *c* liegen als die Punkte der theoretischen Parabel. Die V-artige Ausbreitung

[1]) Mach und Wosyka, Wien. Akad. Ber., Bd. 72 (1875); Rosicky, Bd. 73 (1876); Mach und Sommer, Bd. 75 (1877); Mach, Tumlirz und Kögler, Bd. 77 (1878); Mach, Bd. 77, S. 819 (1878).

[2]) Pogg. Ann. 1875.

aber erklärt Mach auf folgende Weise. Wo sich die beiden Welle hinlänglich spitzem Winkel ihrer Fortpflanzungsrichtungen treffen, steht eine neue Welle von größerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, gewissermaßen als Welle in der Welle selbstandig mit ihrem Gesch keitsüberschuß fortschreitet. Die beiden Zweige des Parabelastes e durch die Interferenz dieser neuen Welle mit den früheren.

Mit diesen Erscheinungen, deren nähere Beschreibung und Der den zitierten Originalabhandlungen nachzulesen ist, steht die außer lich große Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Funkenwellen und dere Abnahme mit der Ausbreitung im engsten Zusammenhang. Wir ha diese bereits im § 201 hingewiesen und wollen hier nur noch eine d reichen Methoden beschreiben, nach welchen Mach diese Geschwind innerhalb der Distanzen von wenigen Centimetern gemessen hat.

Eine Messingscheibe von 17 cm Durchmesser lief auf einer hori Achse in Spitzen und wurde durch ein großes massives Schw mittels Schnurlauf in rasche Rotation versetzt. Die eine Seite der war mit einer schwachen, gleichmäßigen Rußschicht überzogen. N Rande wurden dieser berußten Kreisfläche ein Metallstift S und d gegenüber die Mündung C eines Holzkanales genähert. Diese Mündu durch ein dünnes Plättchen mit einer kleinen runden Öffnung vo Durchmesser geschlossen. Am rückwärtigen geschlossenen Ende de kanales waren zwei Elektroden eingesetzt, zwischen denen ein elek Funke überschlagen konnte. Die von diesem Funken ausgehende Sch bringt bei ihrer Ankunft an der Scheibe auf der Rußschicht eine klein Marke hervor, indem durch den mechanischen Druck der Luft der Ru primiert wird. Der elektrische Funke wurde durch eine Leidenerfla zeugt, deren Entladung auf dem Wege über die rotierende Sche Spitze S und durch die Elektroden des Kanales zurück zur Flasc genommen wurde. Dadurch entsteht nun zuerst gegenüber der S eine Funkenmarke F und etwas später, nachdem die Welle den Kanal laufen hat, gegenüber C eine Wellenmarke W. Hat man diese Marken bei rotierender Scheibe erhalten, so erzeugt man nachher d nochmals bei ruhender Scheibe etwas weiter rückwärts in der N früheren. Die Winkelabstände dieser neuen Marken F'' und W'' v früheren F und W werden dann mittels eines Goniometers gemesse Differenz dieser Winkelabstände $WW'' - FF'' = w$ gibt dann, w einfache Überlegung lehrt, die Drehung der Scheibe für denselben Z den die Funkenwelle braucht, um den Kanal zu durchlaufen.

Bei Machs Versuchen war die Umdrehungszahl der Scheibe 6 Sekunde, also die Winkelgeschwindigkeit $= 22698^0$, die Zeit, in wel Kanal von der Länge l durchlaufen wird, ist also $\frac{w}{22698}$ und die Geschwindigkeit der Funkenwelle gleich:

$$v = \frac{22698}{w} l.$$

Bei einem solchen Versuche war $l = 80$ mm, $w = 2^0 24' =$ woraus

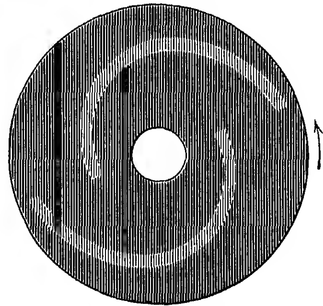
$$v = \frac{22698 \cdot 0{,}08}{2{,}4} = 756{,}6 \text{ m}$$

folgt.

Erst bei einer Kanallänge von 1 m wurde die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit nahe erreicht.

Wir haben noch zu zeigen, wie Mach die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe bestimmte. Seine Methode beruhte auf der optischen Vergleichung mit einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl. Die nicht berußte Seite der Scheibe trug auf schwarzem Grunde zwei glänzende Kurven von beistehender Form (Fig. 796). Es sind archimedische Spiralen. Bedeckt man die Scheibe mit einem Schirm, in welchen ein Spalt nach Richtung des horizontalen Durchmessers geschnitten ist, so durchläuft der glänzende Durchschnittspunkt der Spirale mit dem Spalt den letzteren mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Zentrum gegen die Peripherie und zwar während einer halben Rotation. Während der zweiten Hälfte tritt die zweite Spirale in derselben Weise auf. Betrachtet man nun die Scheibe im Spiegel einer vertikal schwingenden Stimmgabel, deren ganze Schwingungsdauer gleich der Zeitdauer einer halben Scheibenrotation ist, so erscheint der glänzende Punkt in eine vollständige Sinuswelle ausgezogen. Bleibt dieselbe ruhig stehen, so wissen wir, daß obiges Geschwindigkeitsverhältnis genau eingehalten ist. Laufen dagegen per Sekunde p solcher Sinuswellen vom Zentrum zur Peripherie, so ist $\frac{n+p}{2}$ die Zahl der Scheibenrotationen per Sekunde, wenn n die Schwingungszahl der Stimmgabel ist. Indem man den Moment abpaßt, wo bei allmählich gesteigerter Geschwindigkeit der Scheibe die Sinuskurve ruhig zu stehen kommt, und in diesem Moment den Funken entladet, ist man sicher, daß gleichzeitig die Umlaufszahl $= \frac{n}{2}$ war.

Fig. 796.



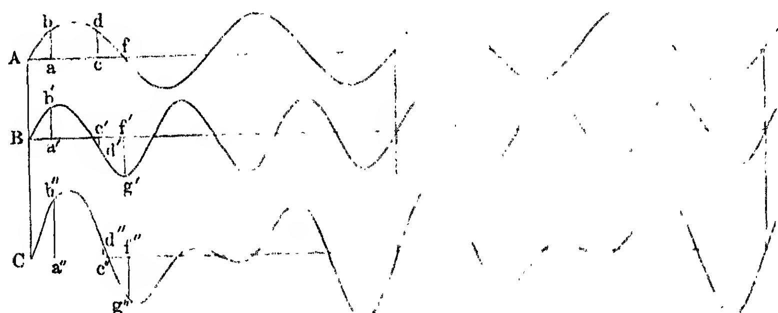
Diese Methode gestattet offenbar eine vielfache Anwendung zur Messung sehr kleiner Zeiträume.

§ 241. Zusammensetzung von Wellen ungleicher Wellenlänge, Fouriers Theorem. Treffen zwei Wellenzüge ungleicher Wellenlänge längs der gleichen Fortpflanzungsrichtung zusammen, so gilt für die Aufsuchung der resultierenden Wellenform, abgesehen von den im vorhergegangenen Paragraphen angeführten Abweichungen, dasselbe Prinzip der Übereinanderlagerung, wie für isochrone Wellen.

Unter dem Einfluß beider komponierenden Wellen wird nämlich der Abstand jedes Teilchens des fortpflanzenden elastischen Mediums von seiner Ruhelage gleich der algebraischen Summe der Abstände, welche durch die einzelnen Wellen hervorgebracht würden. Es seien z. B. A und B, Fig. 797, die Schwingungskurven eines Tones und seiner Quint, so ergibt sich als Resultat des Zusammenwirkens dieser beiden Wellensysteme eine Wellenbewegung, deren Schwingungskurve durch C, Fig. 797, dargestellt ist.

Jede Ordinate der Kurve C ist die algebraische Summe der O[...] der Kurven A und B, welche derselben Abszisse angehören; z. B. die Ordinate $a''b''$ gleich $ab + a'b'$; ferner ist $c''d'' = cd$ [...] weil $c'd'$ von der Abszissenachse nach unten gekehrt ist, während [...] entgegengesetzte Lage hat. Die nach unten gerichtete Ordinate [...]

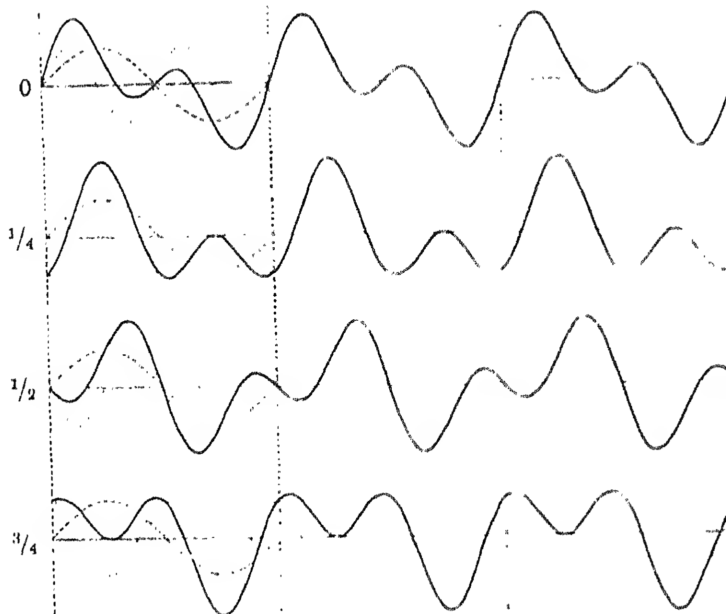
Fig. 797.



gleich $f'g'$, weil die dem Abszissenpunkte f entsprechende Ordi[...] Kurve A gleich Null ist.

In Fig. 798 ist die Zusammensetzung zweier Wellen gleicher A[...] deren Wellenlängen sich wie 2 : 1 verhalten, für die Gangunterschie[...] $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ der Länge der größeren Welle dargestellt. Man sieht, [...]

Fig. 798.



resultierende Wellenform sehr von dem Gangunterschiede der We[...] von der Phasendifferenz der sie erregenden Schwingungen abhängt.

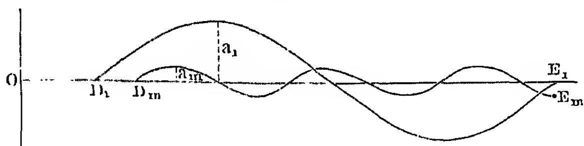
Statt diese Zeichnungen anzufertigen, was immer zeitraubend[...] dient man sich mit Vorteil des im § 208 beschriebenen Appara[...]

Fig. 624b, S. 592 zeigt in der obersten Kurve die Zusammensetzung des Grundtones mit der Quinte, in der zweiten Kurve mit der Oktave, in der untersten Kurve mit dem sechsten Oberton.

Da außer dem Unterschied in der Wellenlänge und dem Gangunterschied auch noch eine Ungleichheit der Amplituden stattfinden kann, so begreift man, daß die resultierenden Wellen von unendlich großer Mannigfaltigkeit der Form sein können.

Mag eine Welle aber was immer für eine Form haben, so läßt sich dieselbe doch stets als die Resultierende einer Reihe von Sinuswellen darstellen, welche dem Grundtone von derselben Wellenlänge und seinen Obertönen angehören.

Fig. 799.



Wir wollen diesen wichtigen Satz in mathematischer Form ausdrücken. Die Gleichung einer Sinuswelle, Fig. 799, $D_1 E_1$, deren Amplitude $= a_1$ und deren Wellenlänge $= \lambda_1$, ist gegeben durch

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_1}.$$

Wenn der Anfangspunkt der Welle um die Strecke D_1 nach rechts liegt:

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{x - D_1}{\lambda_1} = a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} x - \frac{2\pi D_1}{\lambda_1}\right) \quad . \; . \quad (1)$$

Für eine zweite Welle, Fig. 799, $D_m E_m$, deren Amplitude $= a_m$, deren Wellenlänge $\lambda_m = \frac{\lambda_1}{m}$, welche also dem Oberton mit der $m$fachen Schwingungszahl entspricht, gilt, wenn ihr Anfang um D_m nach rechts verschoben ist

$$y_m = a_m \sin 2\pi \frac{x - D_m}{\lambda_m} = a_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \cdot mx - \frac{2\pi D_m}{\lambda_m}\right) \; . \; . \quad (2)$$

Wählen wir den Abszissenmaßstab so, daß $\lambda_1 = 2\pi$ wird, so ist $\frac{2\pi}{\lambda_1} = 1$ zu setzen; bezeichnen wir ferner die Phasendifferenzen $\frac{2\pi D_1}{\lambda_1}$ und $\frac{2\pi D_m}{\lambda_m}$ mit ϑ_1 und ϑ_m, so lauten die Gleichungen (1) und (2):

$$y_1 = a_1 \sin(x - \vartheta_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$y_m = a_m \sin(mx - \vartheta_m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nun denken wir uns eine Reihe von Sinuskurven von der Art, daß ihre Wellenlängen nacheinander die Reihe

$$\lambda, \; \frac{\lambda}{2}, \; \frac{\lambda}{3}, \; \frac{\lambda}{4} \; . \; . \; . \; .$$

bilden; ihre Amplituden seien

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \; . \; . \; . \; .$$

Die Schwingungszahlen der Töne, denen diese Wellen angehör
die Reihe

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad . \quad . \quad . \quad .$$

den Ton n nennt man den Grundton, die übrigen die Obertön
endlich die Gangunterschiede dieser Wellen gegenüber dem Anfa
gleich

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_3, \quad \vartheta_4 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

so wird, wenn man sich diese sämtlichen Wellen zu einer resul
Welle zusammengesetzt denkt, wenn also sämtliche Ordinaten
Abszissenpunkt algebraisch addiert werden, die Gleichung der resul
Kurve lauten:

$$Y = a_1 \sin(x - \vartheta_1) + a_2 \sin(2x - \vartheta_2) + a_3 \sin(3x -$$
$$+ a_4 \sin(4x - \vartheta_4) + \dots$$

Der Mathematiker Fourier hat nun bewiesen, daß sich du
Gleichung, wenn man nur über die Anzahl ihrer Glieder und die V
Größen

$$a_1, a_2, a_3 \dots \quad \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \dots$$

unbeschränkt verfügen kann, jede beliebige periodische Kurve
lasse; daß ferner jede solche Kurve nur auf eine einzige Weise d
Gleichung aus solchen Gliedern dargestellt werden könne[1]. Dar
also, daß jede beliebige Kurve, wenn sie nur die eine Eigenschaft
sie sich in lauter unter sich kongruente Stücke (Wellen) von der A
länge λ zerlegen läßt, aufgebaut werden kann durch Übereinander
einer Reihe, und zwar nur dieser einen Reihe von Sinuskurven, deren
längen gleich $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \dots$ sind, deren Amplituden a_1, a_2, a_3 un
unterschiede $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ von Fall zu Fall aus der gegebenen Kurve
werden können[2].

§ 242. Obertöne, Teiltöne. Nach dem im vorigen Par
Vorgetragenen spielen bei den zusammengesetzten Schwingungen di
töne eines Grundtones eine hervorragend wichtige Rolle. Wir
bezüglich derselben und ihrer Bezeichnung noch einige Bemerkungen

Sind für eine Reihe von Tönen die Schwingungszahlen

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad mn$$

so nennt man, wie bereits bemerkt, n den gemeinschaftlichen Grund
übrigen seine (harmonischen) Obertöne. Die ganze Reihe h
Reihe harmonischer Töne. Damit ist natürlich nicht gemeint,
diese Töne miteinander harmonisch klingen, d. h. Konsonanz geb

---

[1]) Der Fouriersche Satz, mitgeteilt vom Entdecker in seiner Théo
tique de la chaleur, Paris 1822, ist bei verschiedenen physikalischen
von Wichtigkeit. Nach Thomson und Tait kann er in folgenden Wo
gedrückt werden: „Eine zusammengesetzte harmonische Funktion, mit
zugefügten Konstanten, kann zur mathematischen Darstellung einer jeden
periodischen Funktion und folglich auch einer jeden beliebigen anderen
zwischen bestimmten Werten der Veränderlichen gebraucht werden."

[2]) Nach der „Methode der unbestimmten Koeffizienten".

Ton 6 n und der Ton 7 n z. B. stehen miteinander in Dissonanz. Das Wort harmonisch ist hier lediglich eine konventionelle Bezeichnung für die Töne mit Schwingungszahlen, welche ganze Multipla der Schwingungszahl des gewählten Grundtones sind.

Insofern nun diese Obertöne als Bestandteile eines Tongemisches, d. i. eines Klanges auftreten, heißt man sie auch Partialtöne oder Teiltöne des Tongemisches oder Klanges. Der erste Partial- oder Teilton eines Klanges ist dann sein Grundton selbst, der gewöhnlich der stärkste ist. Der erste Oberton wäre demnach der zweite Partialton usf.

Die harmonischen Obertöne von c als Grundton (mit 128 Schwingungen per Sekunde) sind also:

1.	Oberton	$= c^1$ . . .	mit	256	Schwingungen	(Oktave)
2.	„	$= g^1$ . . .	„	384	„	(Duodezime)
3.	„	$= c^2$ . . .	„	512	„	(Doppeloktave)
4.	„	$= e^2$ . . .	„	640	„	(Terz der Doppeloktave)
5.	„	$= g^2$ . . .	„	768	„	(Quint der Doppeloktave)
6.	„	$= b^2$ . . .	„	896	„	
7.	„	$= c^3$ . . .	„	1024	„	
8.	„	$= d^3$ . . .	„	1152	„	
9.	„	$= e^3$ . . .	„	1280	„	usw.

Außer den harmonischen Obertönen können aber in einem Tongemisch, selbst in einem solchen, welches von einem einzigen schwingenden Körper ausgeht, auch unharmonische Obertöne enthalten sein, weil sich die Körper manchmal, ja in der Mehrzahl der Fälle, in schwingende Teile abteilen, welche nicht genau den Schwingungszahlen der harmonischen Obertöne gemäß schwingen. Dem Fourierschen Theorem gemäß können aber dann diese Töne zusammen keinen einheitlichen Klang von konstanter Klangfarbe geben. Die Klangfarbe muß vielmehr von Welle zu Welle des Grundtones wechseln, was sich auch durch die wechselnde Form der entsprechenden Tonschriften bestätigt, welche sich nicht in kongruente Teile von der Wellenlänge des Grundtones zerlegen läßt. So z. B. gibt die Stimmgabel, insbesondere wenn sie schwache Zinken hat und mit einem harten Körper angeschlagen wird, solche unharmonische Töne, ebenso Klangplatten, Glocken usw.

Bei den Orgelpfeifen und den Saiten sollten die Obertöne der einfachen Theorie nach harmonische sein. Dies ist aber insbesondere bei ersteren nicht streng der Fall. Die wirklichen Obertöne der Orgelpfeifen sind stets etwas höher als die berechneten Obertöne, so zwar, daß der achte Oberton fast mit dem neunten berechneten zusammenfällt. Bei den Saiten aus Metall ist die Abweichung gering, bei Darmsaiten oft sehr beträchtlich.

König[1]) hat vorgeschlagen, den Namen Teiltöne für diese unharmonischen Obertöne allein zu gebrauchen, weil sie stets nur durch die Schwingungen von Teilen des Körpers entstehen, während die harmonischen Obertöne durch die Zerlegung der Schwingungsform des als Ganzes schwingenden Körpers entstehen und deshalb streng den Multiplen der Schwingungszahl des Grundtones entsprechen. Wir möchten aber gegen

---

[1]) „Bemerkungen über die Klangfarbe", Wied. Ann. **14**, 369 (1881).

diese Nomenklatur den Einwand erheben, daß die harmonischen Obertöne doch auch als Teiltöne aufzufassen sind. Eine gestrichene Violinsaite beispielsweise schwingt zwar als Ganzes, insofern alle ihre Punkte gleichzeitig durch die Ruhelage gehen, trotzdem kann man sich vorstellen, daß ihre Form aus jener, welche dem Grundton entsprechen würde, durch die Darüberlagerung der für sich schwingenden Teile der Saite entstanden ist. Da überdies der Name Partialton oder Teilton bereits allgemein in der Bedeutung als Oberton (Grundton als erster Partialton mit eingeschlossen) gebräuchlich ist, so wollen wir ihn künftig auch in dieser Bedeutung verwenden und für Teilton im Sinne Königs die bestimmtere Bezeichnung unharmonischer Oberton gebrauchen.

Das Vorhandensein von Obertönen in den meisten Klängen der musikalischen Instrumente ist für Besitzer eines feinen Gehörs ohne besondere Hilfsmittel nachzuweisen. Am Pianoforte lassen sich diesbezüglich leicht folgende Versuche anstellen.

Man schlage z. B. die Taste c^{-2} ($= \underline{C}$) an und halte den Ton längere Zeit, bis er verklingt; man wird dann neben dem Grundton noch leise die Töne c^{-1} g^{-1} c^0 e^0 g^0 b^0 c^1 d^1 ($= C, G, c, e, g, b, \bar{c}, \bar{d}$) hören. Es ist aber oft nötig, die Aufmerksamkeit auf jenen Ton zu lenken, den man hören soll, was am besten dadurch geschieht, daß man ihn leise und auf ganz kurze Zeit auf seiner eigenen Taste ertönen läßt. Nach dem Erlöschen desselben hört man ihn dann im Klange des Grundtones leichter als vorher.

Um diese Versuche auf andere Grundtöne auszudehnen und die zugehörigen Obertöne schnell aufzufinden, ist es recht bequem, sich einer von E. Mach angegebenen Methode zu bedienen. Man fertigt sich das Bild einer Klaviatur, Fig. 800, welche sich von den üblichen Klaviaturen nur dadurch

Fig. 800.



unterscheidet, daß die weißen und schwarzen Tasten am rückwärtigen Rande gleich breit gemacht sind, wodurch die Breiten der weißen Tasten am vorderen Rande zwar ungleich werden, aber ein Vorteil für die Einfachheit der Darstellung gewonnen wird.

Schreitet man auf dieser Klaviatur um gleiche Abstände von links nach rechts, so schreitet auch die musikalische Tonhöhe um gleiche Intervalle fort, während die Schwingungszahlen in geometrischer Reihe fortschreiten[1]). Wir können demgemäß Rechnungsoperationen, die an Schwingungszahlen durch Multiplikation oder Division vorzunehmen wären, auf der Klaviatur durch Addition oder Subtraktion vornehmen, d. h. durch Vorrücken um gleiche Abstände nach rechts oder links in Ausführung bringen, so etwa wie bei einem logarithmischen Rechenschieber. Daraus folgt nun auch, daß der Abstand eines Obertones von seinem Grundton auf der Klaviatur immer der-

[1]) Dabei wird eine Stimmung nach gleichschwebender Temperatur vorausgesetzt, deren Abweichung von der reinen hier vernachlässigt werden muß.

selbe bleibt, wenn wir den Grundton beliebig wo wählen. Der erste Oberton wird immer um 12 Tasten, der zweite um 19, der dritte um 24 Tasten weiter nach rechts hin liegen als der Grundton, von dem man ausgehen will.

Fertigt man sich demnach eine Leiste, welche, wie in der Figur angedeutet, am oberen Rande der Klaviatur verschoben werden kann und an den Stellen der Obertöne mit schwarzen Feldern bemalt ist, so braucht man nur das unterste mit 1 bezeichnete Feld auf den gewählten Grundton einzustellen, um sofort die ersten sechs Obertöne aufzufinden. Diese Vorrichtung wird uns später noch einmal gute Dienste leisten.

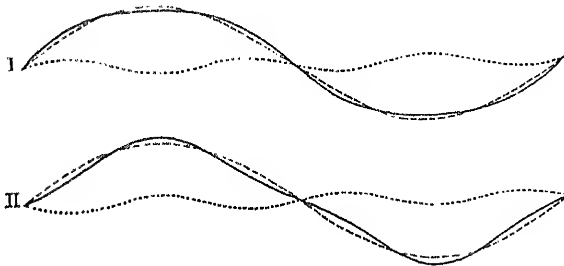
§ 243. Beispiele für die Zusammensetzung ungleich langer Wellen, Saitenschwingungen. Da wir den mathematischen Beweis des Fourierschen Theorems hier nicht ausführen können, so wollen wir dafür an einigen Beispielen zeigen, daß sich wirklich durch Übereinanderlagerung von Sinuskurven die verschiedenartigsten Wellenformen herstellen lassen.

Ein besonders interessantes Beispiel ist die Welle von der Gleichung:

$$y = a \cdot \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x - \frac{a}{49} \sin 7x \quad . \quad . \quad (1)$$

in welcher die Glieder abwechselnd positives und negatives Zeichen haben, die Amplituden verkehrt wie die Quadrate der ungeraden Zahlen, die Abszissen

Fig. 801.



wie die ungeraden Zahlen selbst wachsen. Diese Welle entspricht also einem Klange, der neben dem Grundtone nur die ungeradzahligen Partialtöne mit abnehmender Stärke enthält.

In Fig. 801 I sind die beiden Wellen $y = a \sin x$ und $y = \frac{a}{9} \sin 3x$, die erstere gestrichelt, die zweite punktiert gezeichnet, und zwar mit dem Gangunterschiede Null. Die ganz ausgezogene Kurve entspricht der resultierenden Welle

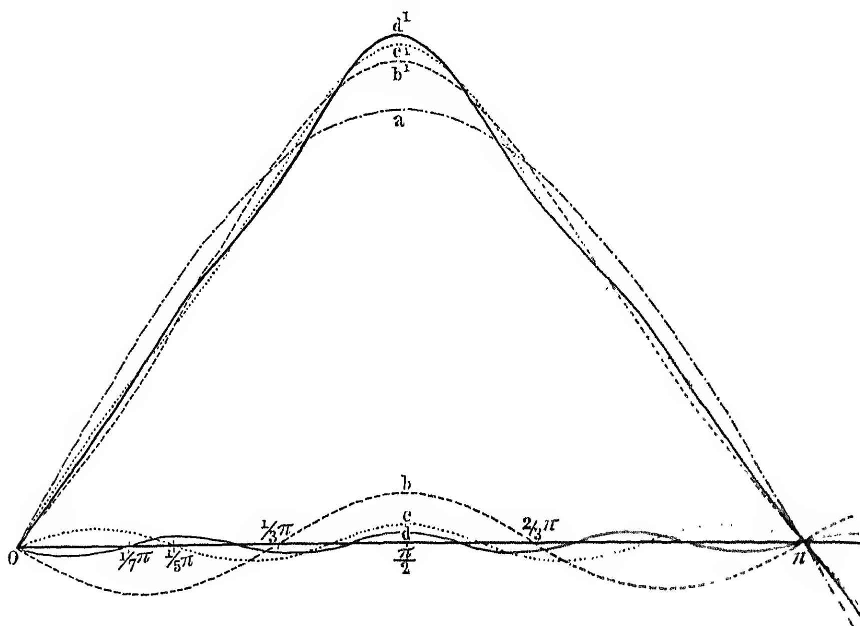
$$y = a \sin x + \frac{a}{9} \sin 3x.$$

In Fig. 801 II dagegen ist die kleinere Welle um eine halbe Wellenlänge verschoben. Ihre Gleichung ist daher $y = \frac{a}{9} \sin (3x - \pi) = -\frac{a}{9} \sin 3x$. Die resultierende ganz ausgezogene Kurve entspricht also der Gleichung

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x;$$

Wellen, welche den höheren Gliedern der Gleichung (1) entsprechen, übereinander aufbaut, so erhält man eine Welle, deren Berge und Täler sich immer mehr der Form geradliniger gleichschenkeliger Dreiecke nähern.

Fig. 802.



Die Fig. 802 zeigt eine derartige Konstruktion bis zum 4. Gliede fortgesetzt, die resultierende (halbe) Welle entspricht also der Gleichung (1). Sie nähert sich schon merklich der Dreiecksform.

Da die Anfertigung dieser Zeichnung zu mühevoll und zu zeitraubend ist, um sie während der Unterrichtungsstunde vorzunehmen, es aber doch wünschenswert ist, den allmählichen Aufbau der Welle zu beobachten, so empfiehlt sich eine mechanische Zusammensetzung, welche sich mittels des vom Verfasser konstruierten Apparates, Fig. 803, bewerkstelligen läßt [1]). Derselbe bildet die Rückseite des bereits in § 208, Fig. 624 beschriebenen Apparates.

Auf den Stäbchen ist zunächst mit weißer Farbe eine halbe Sinuswelle aufgemalt, welche der Gleichung $y = a \sin x$ entspricht. Oberhalb derselben ist mit roter Farbe die Welle

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x$$

---

[1]) Auch L. Boltzmann hat einen hierzu bestimmten Apparat konstruiert, welcher von Arth. Boltzmann in den Wien. Akad. Ber. **113**, Abt. IIa, 1904, beschrieben ist.

Ferner findet sich ein derartiger Apparat beschrieben von Leop. Kann in der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht **15**, 18 (1902), welcher beliebig viele Wellen zu superponieren gestattet. Ein zweiter, daselbst nur angedeuteter Apparat gestattet außerdem die Verschiebung der Partialwellen, während die resultierende Welle ersichtlich gemacht wird.

festgehalten. Das Fernrohr kann somit in seinen Lagern um eine durch die Mitte der Ringe gehende Achse gedreht werden; doch schlägt hierbei ein vorstehender stählerner Zapfen an die Spitze einer Schraube, die am Träger befestigt ist, sobald der Horizontalfaden des Fadenkreuzes genau die horizontale Lage angenommen hat. Hierdurch wird dann eine weitere Drehung nach dieser Seite verhindert.

Das Fernrohr kann also überhaupt folgende Bewegungen machen:

1. Drehung um seine eigene mechanische Achse, welche durch die Mittelpunkte der beiden Ringe geht.

2. Drehung um die horizontale Achse a mittels der Schraube a innerhalb enger Grenzen.

3. Drehung um die vertikale Achse des ganzen Instrumentes, welche oben durch die konische Vertiefung, unten durch die Achse des Konus C der Säule S gegeben ist.

4. Parallelverschiebung in vertikaler Richtung, und zwar fein mittels der Differentialschraube J, grob nach Lüftung der Klemmschraube K.

Die Horizontalstellung des Fernrohrs geschieht entweder mittels einer abnehmbaren Aufsatzlibelle L oder mittels einer unterhalb des Fernrohrs mit den Trägern $G' G'$ fest verbundenen Libelle. Die Einrichtung einer solchen Libelle wird hier als bekannt vorausgesetzt.

§ 22. Rektifikation des Kathetometers. Vertikalkomparator. Jedes Kathetometer muß, um richtige Messungen zu ermöglichen, folgenden Bedingungen entsprechen:

1. Der Maßstab und seine Längenteilung müssen genau vertikal stehen.

2. Die Visierrichtung durch das Fernrohr (Kollimationslinie) muß genau horizontal sein und auch bleiben, wenn das Instrument um die vertikale Achse gedreht wird. Damit dieses stets der Fall sei, muß.

3. Die vertikale Drehungsachse genau senkrecht stehen.

4. Damit die Visierrichtung auch horizontal bleibe, wenn das Fernrohr gehoben oder gesenkt wird, muß der Maßstab genau geradlinig und gegen Verbiegung gesichert sein, sowie der Schlitten enge anschließen, so daß er keine merkliche Seitenbewegung zuläßt. Da letztere Bedingung fast unmöglich ganz zu erfüllen ist, so muß die genau horizontale Stellung des Fernrohrs bei jeder Ablesung ohne weitere Fehlerquelle zu bewirken sein.

Die Prüfung bzw. Herstellung dieser Bedingungen kann durch nachfolgende Reihe von Rektifikationen ausgeführt werden.

A. Rektifikation des Fadenkreuzes.

1. Verlegung der Visierlinie in die mechanische Achse des Fernrohrs.

Nachdem man durch Ausziehen der Okularröhre und ev. durch Verstellung des Fadenkreuzes in der Richtung der Rohrachse erreicht hat, daß sowohl das anzuvisierende Objekt als das Fadenkreuz scharf gesehen werden, stellt man durch Drehen des Fernrohrs auf seinen Lagern jenen Faden, welcher als Horizontalfaden dienen soll, vorläufig annähernd horizontal.

noch weiter oben mit gelber Farbe die Welle

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x$$

aufgemalt.

Zum Apparate gehören noch drei Schablonen, welche

die Welle $y = \frac{a}{9} \sin 3x$ in roter Farbe,

„ „ $y = \frac{a}{25} \sin 5x$ in gelber Farbe,

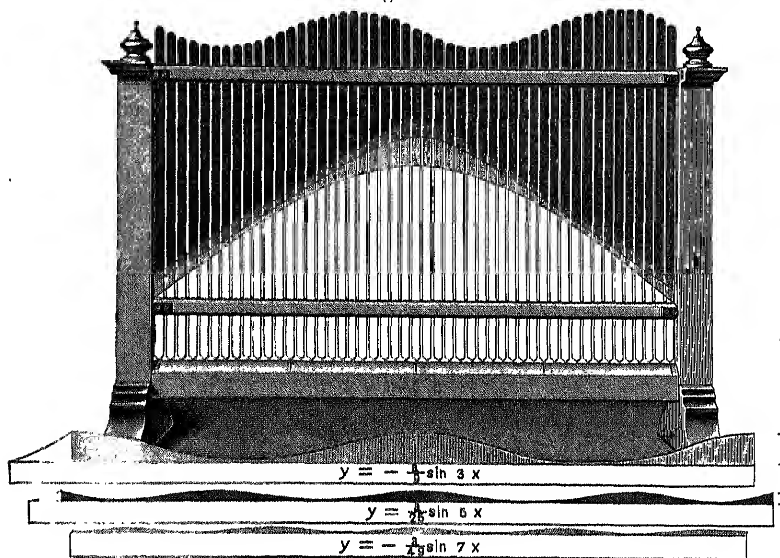
„ „ $y = \frac{a}{49} \sin 7x$ in grüner Farbe

darstellen.

Man schiebt zuerst die rote Schablone unter die Stäbchen, so daß ein Wellenberg in die Mitte kommt. Die weiße Fläche ändert ihre Begrenzung, indem ihr Rand jetzt Welle $y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x$ darstellt.

Man zeigt mittels einer Kopie aus Karton, daß diese Welle mit jener roten übereinstimmt, welche sich auf den Stäbchen ohne untergeschobene

Fig. 803.



Schablone zeigt. Nun nimmt man diese zum Ausgang und schiebt die gelbe Schablone unter, und zwar wieder mit einem Berg in der Mitte. Jetzt zeigt die rote Fläche die Welle

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x.$$

Man zeigt wieder, daß dieselbe identisch ist mit der Welle, welche die gelbe Fläche der Stäbchen ohne untergeschobene Schablone zeigt. Indem man jetzt diese zum Ausgang wählt und die letzte (grüne) Schablone mit

einem Berg bis zur Mitte einschiebt, erhält man als Grenzlinie der gelben Fläche die Welle

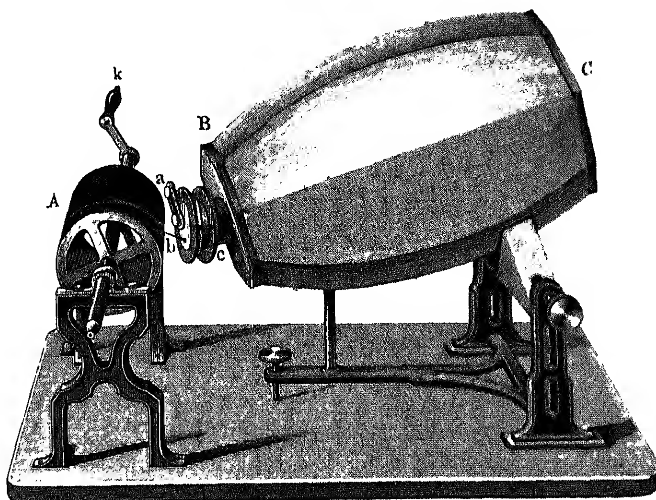
$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x - \frac{a}{49} \sin 7x,$$

an der nun gezeigt werden kann, daß sie sich der Dreiecksform mehr nähert als die früheren. Bei der Fortsetzung des Verfahrens würden sich auf die abgerundete Spitze immer mehr kleinere Wellenberge auftürmen und sie zu einer vollständigen Spitze ergänzen, während die Krümmungen der Saiten immer mehr zu geraden Linien ausgeglichen werden. Diese Demonstration gibt eine Vorstellung, wie so das unerwartete Resultat zustande kommt. Der strenge Beweis folgt aus dem Theorem von Fourier.

Die in Rede stehende Schwingungsform stimmt mit jener überein, welche eine in ihrer Mitte gestrichene Saite zeigt. Im § 229 haben wir bereits die optische Methode beschrieben, deren sich v. Helmholtz bedient hat, um dies nachzuweisen.[1] In den beiden nächstfolgenden Paragraphen werden wir noch einige andere Methoden und deren Resultate mitteilen, welche das Wissenswerte über diesen Gegenstand ergänzen.

§ 244. Anwendung der graphischen und optischen Methode zur Darstellung und Untersuchung zusammengesetzter Schwingungen; Phonautograph. Daß sich die zusammengesetzten Wellen auch durch die Luft fortpflanzen und andere elastische Körper in entsprechend zusammen-

Fig. 804.



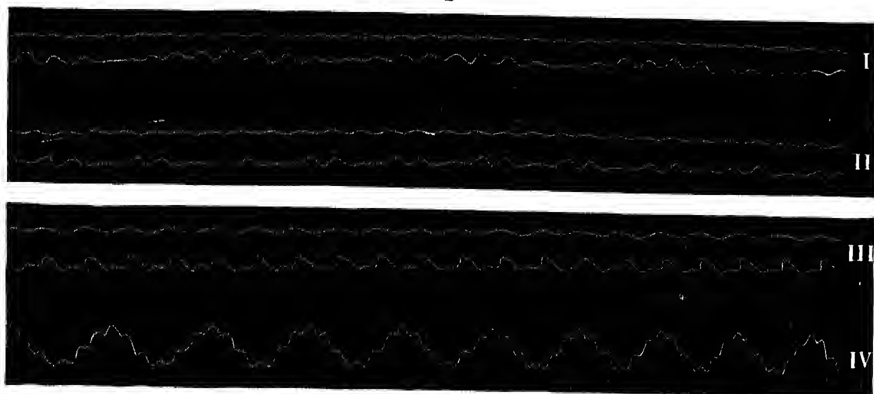
gesetzte Schwingungen versetzen können, läßt sich mit Hilfe des Phonautographen von Scott und König dartun, welcher in Fig. 804 dargestellt ist. Ein ungefähr 50 cm langes hohles Ellipsoid von Gips oder Metall ist bei C offen, am anderen Ende bei *B* aber ist es durch einen festen Boden bedeckt, in dessen Mitte ein kurzes messingenes, an seiner Außenseite durch eine elastische Membran von Goldschlägerhaut oder Kautschuk geschlossenes Rohr eingesetzt ist. Auf dieser Membran, deren Spannung nach Bedürfnis ab-

geändert werden kann, ist ein leichtes steifes Stielchen *b* aufgekittet. Das verschiebbare Stäbchen *a*, welches mit seinem einen Ende auf die Membran drückt, muß so gestellt werden, daß sich das Stielchen *b* während der Vibrationen der Membran auf einem Bauche derselben und nicht auf einem Knoten befindet.

Diese Vorrichtung hat, wie man sieht, eine entfernte Ähnlichkeit mit dem Ohr; die Membran repräsentiert das Trommelfell, während das Ellipsoid dem Gehörgange entspricht. — Wenn nun die Wellen irgend eines Tones bei *C* eintreten, so wird die Membran samt dem Stiftchen in Schwingungen versetzt, welche unisono mit dem einfallenden Tone sind; wenn aber gleichzeitig die Schallwellen zweier Töne bei *C* einfallen, werden die Vibrationen der Membran der Kombination der beiden Wellensysteme entsprechen.

Der eben besprochene Apparat wird nun, wie Fig. 804 zeigt, an den mit berußtem Papier überzogenen Zylinder *A* herangerückt, welchen wir bereits

Fig. 805.



in § 224, S. 650 kennen lernten (das Stielchen *b* steht aber weder normal zur Membran, noch normal zum Zylinder, wie die Fig. 804 zeigt, sondern es ist in entsprechender Weise schräg gestellt), und man erhält eine graphische Darstellung der von der Membran ausgeführten Oszillationen, wenn der Zylinder gedreht wird, während die Membran unter dem Einfluß bestimmter, bei *C* einfallender Töne vibriert.

In Fig. 805 sind die unteren Kurven in Nr. I, II und III die Kopien von Kurven, welche mit dem Apparat geschrieben wurden, als zwei durch Orgelpfeifen erzeugte Töne gleichzeitig bei *C* einfielen. Nr. I entspricht der Kombination des Grundtones mit einem um einen ganzen Ton ($^9/_8$) höheren. Nr. II entspricht der Kombination des Grundtones mit der Quint und Nr. III der Kombination des Grundtones mit seiner Oktav. Die obere Kurve jeder Abteilung ist gleichzeitig direkt durch eine Stimmgabel geschrieben, welche unisono war mit dem tieferen der beiden bei *C* einfallenden Pfeifentöne.

Nr. IV ist ohne Vermittelung der Membran des Scottschen Phonautographen erhalten; es zeigt die Schwingungen einer Stimmgabel, deren Grundton stark von einem Oberton begleitet war.

Hier sind es die Kombinationskurven von II und III, welche uns näher interessieren. In der unteren Kurve Nr. II erkennt man leicht alle charakteristischen Eigenschaften der theoretisch konstruierten Kurve *C* (Fig. 797,

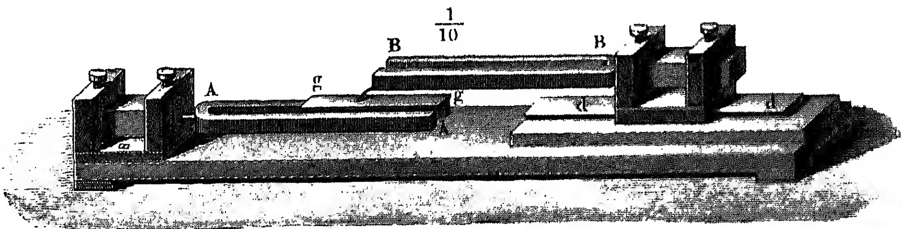
S. 728), d. h., daß sich nach je zwei Schwingungen des Grundtones stets dieselbe Form der Kombinationskurve wiederholt.

So stimmt auch die Kurve Nr. III, Fig. 805, welche von dem Phonautographen unter gleichzeitigem Ertönen des Grundtones und seiner Oktav geschrieben wurde, im wesentlichen mit der theoretischen Kurve, Fig. 798, überein. Nach jeder Schwingung des Grundtones wiederholt sich die gleiche Form der Kombinationskurve.

Was hier von den Vibrationen eines Luftteilchens gesagt ist, welches gleichzeitig durch die Schallwellen zweier oder mehrerer Töne affiziert wird, gilt auch von den Vibrationen eines materiellen Punktes, welcher einem tönenden Körper angehört, der gleichzeitig neben seinem Grundton auch noch einen oder mehrere Obertöne hören läßt, wie dies z. B. auch durch die auf die rotierende Trommel geschriebene Schwingungskurve Nr. IV, Fig. 805, erläutert wird, welche die Vibrationen des äußersten Endes einer Stimmgabel darstellt, die neben dem Grundton auch noch den siebenten Partialton hören läßt. In diesem Falle kann das Ohr ebenso leicht den Oberton neben dem Grundton hören, wie das Auge in der Schwingungskurve Nr. IV, Fig. 805, die Vibrationen des Obertones verfolgen kann.

Während der Phonautograph dazu bestimmt ist, die auf ihn aus der Luft eindringenden zusammengesetzten Wellen aufzuzeichnen, ist das folgende

Fig. 806.



Verfahren dazu bestimmt, solche Zeichnungen auf mechanischem Wege zu erzeugen, ohne daß die komponierenden Wellen in der Luft zur Kombination gelangen. Man läßt die schwingende Zinke einer Stimmgabel auf einer schwingenden Schreibfläche, welche von der Zinke einer anderen Gabel getragen wird, schreiben. Fig. 806 zeigt einen dazu geeigneten Apparat. Er besteht aus zwei großen Stimmgabeln *A* und *B*, von welchen die erstere feststeht, während die letztere in einem Schlitten befestigt ist, dem das Brettchen *d* in der Weise zur Führung dient, daß die Stimmgabel *B* parallel über die Stimmgabel *A* weggezogen werden kann. Die feste Stimmgabel trägt einen schmalen Streif *g* von dünnem Spiegelglas, welcher berußt wird, oder auf welchem noch besser ein berußter Streifen Glanzpapiers befestigt ist. An dem einen Arme der Stimmgabel *B* ist in der früher beschriebenen Weise ein Schreibfederchen in der Weise befestigt, daß es auf der berußten Fläche seine Spur zurückläßt, wenn die Stimmgabel *B* über das Brettchen *d* abgezogen wird.

Die Fig. 807 zeigt eine Anzahl auf diese Weise (von **König**) erhaltener Kurven. Das Verhältnis der Schwingungszahlen ist daneben verzeichnet. Man wird unter denselben mehrere der früher abgeleiteten Kurven wieder erkennen. Bei der zweiten Kurve von oben ist das Verhältnis 1 : 2 nicht

genau eingehalten. Infolgedessen ändert sich im Verlaufe derselben der Gangunterschied und deshalb auch allmählich die Form der Wellen, was

Fig. 807.

1 : 2

1 : 2±

1 : 3

2 : 3

3 : 4

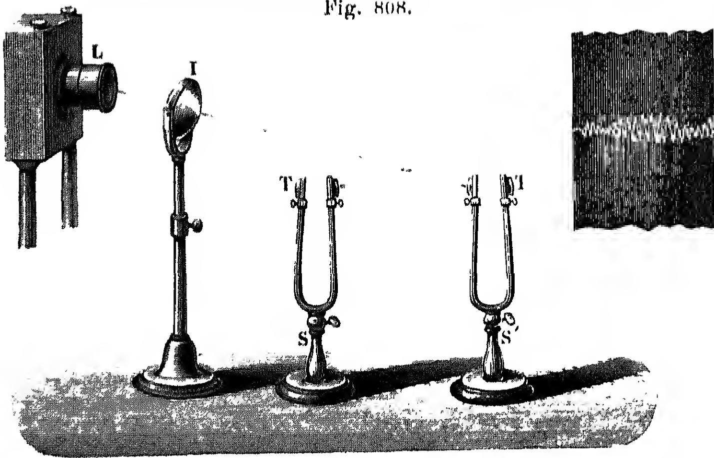
4 : 5

5 : 8

24 : 25

80 : 81

Fig. 808.



unter Hinweis auf die frühere Figur 798, S. 728, keiner weiteren Erklärung bedarf.

Auch die optische Methode kann benutzt werden, um ähnlich wie bei der Zusammensetzung rechtwinkelig aufeinander stattfindender Schwingungen diesmal die parallel stattfindenden Schwingungen zu kombinieren.

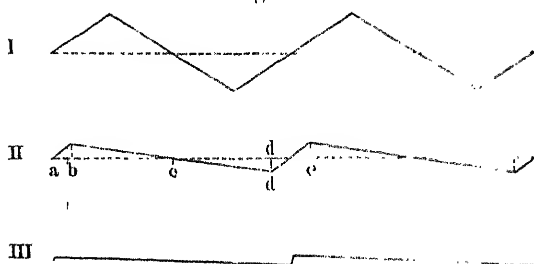
Die Fig. 808 zeigt die hierzu dienliche Versuchsanordnung. Das durch eine Öffnung L der Lampe ausgehende Strahlenbündel wird durch die Konvexlinse J etwas konvergent gemacht, so daß auf einem entfernten Schirme ein scharfes Bild der Öffnung entsteht. Bevor das Strahlenbündel dahin gelangt, wird es in der ersichtlichen Weise von den Spiegeln der beiden Stimmgabeln T und T' reflektiert. Wird nur eine Gabel zum Schwingen gebracht, so wird der Lichtpunkt zu einer vertikalen Lichtlinie verlängert. Dieselbe wird zu einer horizontalen Sinuskurve ausgezogen, wenn man statt des Schirmes einen um eine vertikale Achse rotierenden Spiegel anwendet. Einfacher noch ist es, die Stimmgabel T selbst ein wenig um eine vertikale Achse zu drehen. Schwingt nun auch die zweite Gabel, so wird die Amplitude des schwingenden Lichtpunktes periodisch veränderlich, außer wenn die Gabeln unisono gestimmt sind. Bei dem Ausziehen zur Kurve erhält man die kombinierten Wellen.

§ 245. Genauere Untersuchung der Saitenschwingungen. Ein viel untersuchtes Objekt, welches zur Anwendung zahlreicher, mitunter höchst sinnreicher Methoden Anlaß gegeben hat, sind die Saitenschwingungen.

v. Helmholtz hat, wie oben § 231 beschrieben, mittels des Vibrationsmikroskops die Gesetze der mit dem Bogen gestrichenen Saite untersucht. Die wesentlichen Resultate sind folgende:

1. Die Mitte der Saite schwingt so, wie es die Schwingungskurve Fig. 809 I darstellt. Demgemäß erfolgt der Hin- und Hergang der Saite daselbst mit gleicher und gleichförmiger Geschwindigkeit.

Fig. 809.



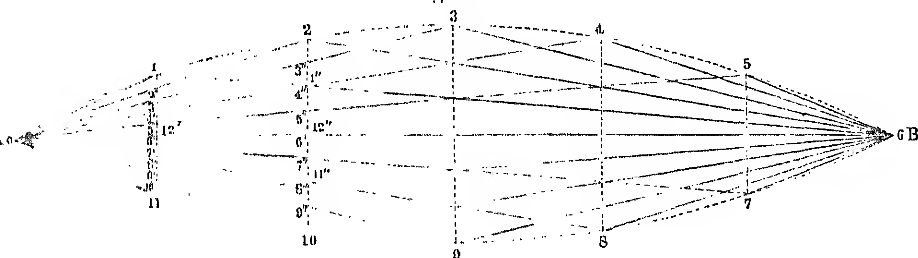
2. Die Punkte der Saite, die nicht in der Mitte liegen, beschreiben Schwingungen, deren Gesetz durch die Kurve Fig. 809 II dargestellt ist. Die Saite folgt nämlich während des Streichens gleichförmig dem Bogen und bewegt sich dann, nachdem sie sich plötzlich losgerissen, mit ebenfalls gleichförmiger, aber größerer Geschwindigkeit zurück. Die Zeit für den ersten Teil der Bewegung bd verhält sich zu der Zeit für die Rückbewegung de wie der längere Abschnitt der Saite zum kürzeren zu beiden Seiten des beobachteten Punktes. Die Kurve II z. B. entspricht einem Punkte, der um $^1/_6$ vom Ende absteht, da $ab:bc = 1:5$ ist. Die Kurve III dagegen entspricht einem Punkte nahe dem Ende der Saite.

3. Die Stelle, wo der Bogen angreift, ist von verhältnismäßig geringem Einfluß auf die Bewegung der Saite. Der Umstand, daß jene Obertöne ausfallen müssen, welche an der gestrichenen Stelle Knoten haben würden, hat jedoch zur Folge, daß die Kurven feine Kräuselungen zeigen, wenn man einen Punkt der Saite beobachtet, der zwischen zwei solchen Knoten liegt.

4. Die Form der schwingenden Saite[1]) muß sich demnach in folgender Weise darstellen lassen:

Es sei $A\,B$, Fig. 810, die Ruhelage der Saite, welche sie während jeder Schwingung zweimal mit allen Punkten gleichzeitig durchschreitet. Die Senkrechte 3 — 9 stellt die (im Verhältnis übertrieben groß gezeichnete

Fig. 810.



doppelte) Amplitude der Saitenmitte dar. Wir teilen diese sowie die Saitenlänge in sechs gleiche Teile und denken uns die ganze Schwingungsdauer in 12 Zeitabschnitte abgeteilt. Dann ist die Form der Saite, wenn sie zur Zeit 0 die Ruhelage nach aufwärts passiert hat, zur Zeit $^1/_{12}$ der Schwingungsdauer gleich der gebrochenen Linie $A\,1\,B$, dann so fort hat sie

zur Zeit $^2/_{12}$ die Form $A\,2\,B$
" " $^3/_{12}$ " " $A\,3\,B$
" " $^4/_{12}$ " " $A\,4\,B$
" " $^5/_{12}$ " " $A\,5\,B$
" " $^6/_{12}$ " " $A\,6\,B$
" " $^7/_{12}$ " " $A\,7\,B$ und so fort.

Man kann sich also vorstellen, daß zwischen A und B der Fußpunkt einer Ordinate mit gleichförmiger Bewegung hin und her gehe, während sich das andere Ende der Ordinate auf der Kurve (Parabelbogen) A, 1, 2, 3 ... nach B und unten über 7, 8, 9 zurück nach A bewege.

Die Saite verbindet dann stets dieses Ordinatenende mit den Enden A und B.

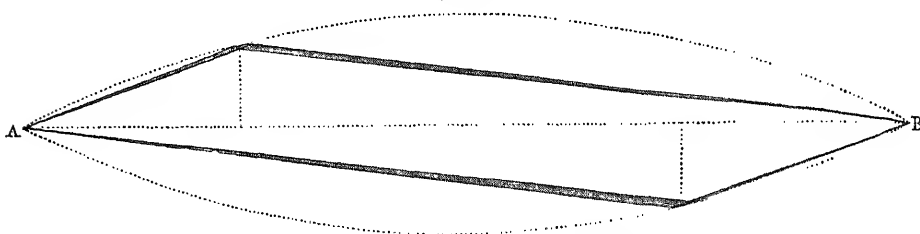
Daß diese Lage der Saite wirklich dem unter 1 und 2 angegebenen Gesetze entspricht, läßt sich leicht aus der Fig. 810 ablesen. Man sieht, daß die Saitenmitte in jedem Zwölftel der Schwingungsdauer genau gleich lange Wege beschreibt. Beachten wir dagegen einen Punkt der Saite, welcher beispielsweise um $^1/_6$ der Saitenlänge von A absteht! Zur Zeit $^1/_{12}$ ist er in 1, zur Zeit $^2/_{12}$ in $2'$, zur Zeit $^3/_{12}$ in $3'$, und so wandert er mit gleichförmiger Geschwindigkeit, welche aber kleiner ist als jene in der Mitte der Saite, in $^{10}/_{12}$ der Schwingungsdauer von 1 bis 11. Von dort aber geht er als Bestandteil der Geraden B 11 im nächsten Zwölftel bis $12'$ und im letzten Zwölftel bis 1. Er macht also in einem Sechstel der Schwingungsdauer nach aufwärts denselben Weg, welchen er in $^5/_6$ dieser Zeit nach abwärts zurück-

[1]) Nicht zu verwechseln mit der „Schwingungsform eines Saitenpunktes“, unter welcher man das graphisch dargestellte Gesetz versteht, nach welchem die Elongationen mit der Zeit sich ändern (Schwingungskurve Fig. 809).

legt. Seine Geschwindigkeiten beim Auf- und Niedergange verhalten sich also wie 1 : 5, nämlich wie die Abstände nach *A* und nach *B*.

Der experimentelle Nachweis dieser Gesetze erfolgt am elegantesten durch die schon oben (§ 228) beschriebene stroboskopische Methode von Mach. Die durch eine elektromagnetisch schwingende Stimmgabel gleicher Tonhöhe zweimal während der Schwingungsdauer beleuchtete Saite erscheint während des Streichens wie Fig. 811. Dabei ist angenommen, daß man, um die

Fig. 811.



Amplitude vergrößert erscheinen zu lassen, den Schatten der Saite schief auf einen Schirm projiziert habe. Bei kleinem Phasenunterschiede vollführt dann die Saite langsam dieselbe Bewegung, welche sie in Wirklichkeit schnell ausführt[1]).

Bei dicken und deshalb steifen Saiten zeigten die Beobachtungsresultate von Neumann[2]) merkliche Abweichungen von der Theorie.

Bei den durch Anschlag oder Zupfen zum Tönen gebrachten Saiten hängt, wie v. Helmholtz nachgewiesen hat, die Zusammensetzung des Klanges sowohl von der Anschlagstelle, als von der Dauer des Anschlages, sowie von der materiellen Beschaffenheit und Breite des Körpers (Hammers, Zitherringes) ab, durch den der Anschlag oder das Zupfen (Reißen) geschieht.

Durch Anschlag an einer bestimmten Stelle der Saite werden nämlich alle jene Obertöne beseitigt, welche daselbst Knoten hätten.

Eine sehr schöne und eingehende Untersuchung der Bewegung gestrichener und gezupfter Saiten verdanken wir O. Krigar-Menzel und A. Raps[3]). Die Autoren ließen die Saite vor einer senkrecht dazu gestellten schmalen Spalte schwingen, beleuchteten dieselbe durch die Spalte hindurch und erzeugten durch eine Linse ein Bild der Erscheinung auf einem photographischen Papier, welches mit konstanter Geschwindigkeit parallel zur Saite bewegt wurde. Sie erhielten so nach dem Hervorrufen und Fixieren sehr schöne Schwingungskurven, hell auf schwarzem Grunde, aus denen die Gesetze dieser Schwingungen direkt abzulesen waren. Diesbezüglich müssen wir auf die Originalarbeit und die derselben beigegebenen Tafeln verweisen.

Nach A. Samojloff lassen sich die Schwingungskurven der Violinsaiten sehr schön dadurch sichtbar machen, daß man am Stege der Violine ein kleines Spiegelchen, dessen Ebene senkrecht auf den Ebenen des Steges und der Violindecke steht, befestigt. Der Steg mit dem „Balken" und dem

---

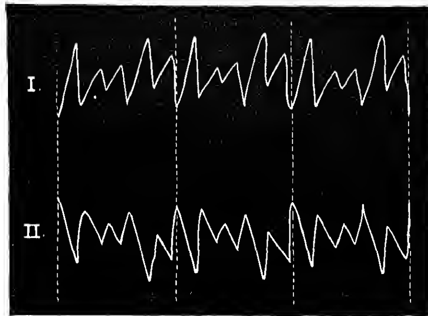
[1]) Quincke hat für die stroboskopische Trommel Zeichnungen gefertigt, welche diese Saitenschwingungen darstellen.

[2]) Wiener Akad. Ber. 61, 2. Abt., 1870, S. 89.

[3]) Sitzungsber. der Berliner Akademie 1891 und 1893.

„Stimmstock" bilden in Verbindung mit der Violindecke ein schwingendes System, das durch die Saite in Mitschwingung gerät. Man läßt nun, wie bereits im § 244, Fig. 808, gezeigt ist, ein schmales, durch eine Linse konvergent gemachtes Lichtbündel zuerst auf das Spiegelchen und dann auf einen rotierenden Spiegel, Fig. 646 oder 648 (S. 614, 617), fallen, und erhält auf dem Schirm die Wellenkurven projiziert. Fig. 812 zeigt je drei Wellenlängen dieser Kurven, von denen I beim Hingang des Bogens, II beim Rückgang erhalten sind. Die Kurve II ist das Spiegelbild von oben nach unten der Kurve I, entspricht also der Umkehrung der Ordinaten. Der Klangcharakter wird dabei (einen guten Violinspieler vorausgesetzt) nicht geändert[1]).

Fig. 812.



Beim Fortepiano ist die Anschlagstelle bei $^1/_7$ bis $^1/_9$ der Saitenlänge, wodurch die Obertöne 7 bis 9 entfallen, also gerade jene noch relativ starken Obertöne, welche zum Durdreiklang nicht passen. Anschlag in der Mitte der Saite verhindert die geradzahligen Obertöne und verursacht deshalb einen hohlen, näselnden Klang. Anschlag sehr nahe am Ende der Saite begünstigt das Hervortreten sehr hoher Obertöne und erzeugt einen leeren, klimpernden Klang. Schlägt man mit hartem, scharfkantigem Hammer, so tritt dies in noch höherem Grade ein, besonders wenn die Berührung mit der Saite nur kurz dauert. Die Theorie ergibt, daß diejenigen Obertöne begünstigt werden, deren halbe Schwingungsdauer nahe gleich ist der Zeit, während welcher der Hammer anliegt, daß dagegen jene verschwinden, deren halbe Schwingungsdauer 3, 5, 7 ... mal so groß ist. Da nun diese Zeit von der Weichheit und Elastizität der Hammerbekleidung wesentlich abhängt, so erklärt sich der große Einfluß der letzteren auf den schönen Klang des Fortepiano. Ältere Instrumente fangen an zu klimpern, weil die Filzbedeckung allmählich härter wird. Ausführlicheres hierüber in v. Helmholtz' Tonempfindungen.

§ 246. Schwebungen oder Stöße, Königs Stoßtöne. Wenn zwei einander sehr nahe stehende, aber doch nicht ganz isochrone Töne unser Ohr treffen, so vernehmen wir ein periodisch abwechselndes Anschwellen und Nachlassen des Tones, welches man das Schweben der Töne nennt. Scheibler hat für diese Erscheinung die Bezeichnung „Stöße" (*battement*) eingeführt.

Man hört diese Stöße sehr deutlich, wenn man gleichzeitig zwei Orgelpfeifen tönen läßt, welche sehr nahe unisono gestimmt sind. Auch mit zwei Stimmgabeln, welche einer reinen Konsonanz sehr nahe stehen, lassen sich die Stöße deutlich wahrnehmen. Besonders geeignet zur Nachweisung der Stöße sind solche Stimmgabeln, welche in der Fig. 667, S. 648 dargestellten Weise auf Resonanzkästchen aufgesetzt sind. Hat man zwei solcher Stimmgabeln, welche vollkommen unisono sind, nebeneinander gestellt, so braucht

[1]) Vgl. damit S. Hermanns Versuche, § 254.

man nur die eine mit etwas Wachs zu beschweren, um die Stöße sehr deutlich hörbar zu machen, wenn beide Stimmgabeln durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen gleichzeitig zum Tönen gebracht werden.

Der Grund dieser Erscheinung ist leicht einzusehen. Wenn in einem bestimmten Momente durch beide Töne gleichzeitig eine Verdichtung hervorgebracht wird, so wird dies Zusammenfallen bald aufhören, und nach einiger Zeit wird gleichzeitig eine Verdünnung der einen Tonwelle mit einer Verdichtung der anderen stattfinden. Wenn aber die Verdichtungen der einen Welle gerade mit denen der anderen zusammenfallen, so verstärken sie sich gegenseitig; sie heben sich aber gegenseitig auf, wenn die Verdichtungen der einen mit den Verdünnungen der anderen zusammentreffen.

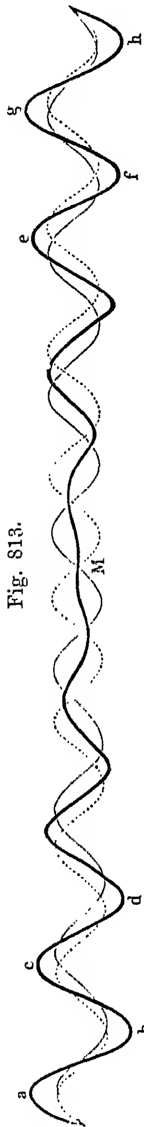


Fig. 813.

Wie bald Verdichtung mit Verdichtung und Verdünnung mit Verdünnung und dann wieder Verdichtung mit Verdünnung zusammentreffen, wenn zwei nicht ganz isochrone Töne zusammenwirken, kann man sich durch zwei nicht ganz isochron schwingende Pendel recht anschaulich machen; am deutlichsten ergibt sich aber das abwechselnde Anschwellen und Abnehmen des Tones durch graphische Darstellung. In Fig. 813 sollen die beiden schwach gezogenen Kurven die als transversal gezeichneten Wellen der beiden nicht gleich hohen Töne darstellen. Summiert man die Ordinaten der beiden Kurven, so erhält man für jeden Moment die Größe der Amplituden, mit welchen beide Wellen zusammen das Ohr affizieren; auf diese Weise ist die stark gezogene Kurve konstruiert; bei a, b, c, f, g und h werden durch das Zusammenwirken beider Wellen größere Amplituden, also ein Anschwellen des Tones, hervorgebracht.

Auch dies läßt sich mittels des vom Verfasser konstruierten Apparates, Fig. 624 a demonstrieren, indem man eine demselben beigegebene Wellenschablone einschiebt, welche auf die ganze Länge etwa $13^1/_2$ Wellen enthält. Da die Anzahl der auf den Stäbchen aufgetragenen Wellen 12 beträgt, so entsprechen die beiden Wellen dem Intervall $12:13{,}5 = 8:9$, und man erhält eine der Fig. 813 ähnliche Kurve, deren Maxima und Minima sich rasch verschieben, wenn man den Gangunterschied allmählich ändert.

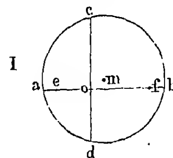
Schon Sauveur hat die Stöße angewandt, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu ermitteln. Er zählte nämlich die Stöße, welche zwei tiefe Töne miteinander geben, von denen der eine um einen kleinen halben Ton höher war als der andere. Macht der eine dieser Töne $n = 24\,m$ Schwingungen in der Sekunde, so ist $25\,m$ die Schwingungszahl des anderen; und wenn p die beobachtete Anzahl der Stöße ist, so ergibt sich

$$25\,m - 24\,m = p \text{ oder } m = p,\ n = 24\,p.$$

Nehmen wir z. B. an, man habe beobachtet, daß die Töne f^{-1} (F) und fis^{-1} (Fis) in 10 Sekunden 36 Stöße miteinander machen, so ist $p = m = 3{,}6$,

Richtet man nun das Fernrohr so, daß irgend ein scharf sichtbarer Punkt genau im Durchkreuzungspunkte der Fäden erscheint, so heißt man gerade Verbindungslinie dieser beiden Punkte die **Visierlinie oder** Kollimationslinie des Fernrohrs (optische Achse). Dagegen heißt Gerade, die man sich durch die Mittelpunkte der beiden Ringe, mit welch das Fernrohr aufliegt, gezogen denkt, die **mechanische Achse** des Fe rohrs. Die nachfolgenden Operationen erfordern, daß die Visierlinie mit letzteren Achse zusammenfalle. Es sei in Fig. 59 I der Kreis das Gesich feld des Fernrohrs, *ab* der Horizontal-, *cd* der Vertikalfaden, *o* ihr Dur kreuzungspunkt oder die Projektion der Visierlinie, *m* die Projektion mechanischen Achse, welcher Punkt natürlich im Fernrohr nicht sichtbar i dreht man nun das Fernrohr in seinen Lagern, so beschreibt der Punk einen Kreis um den Punkt *m*, folglich verläßt der Durchkreuzungspunk den anvisierten Punkt *p*, ausgenommen, wenn die Visierlinie und die mech nische Achse zusammenfallen. Um dies zu erreichen, stellt man den Ho zontalfaden *ab* auf zwei liebige Punkte *e* und *f*, man sich auf einer weiß Wand in passendem Abstan angebracht hat, scharf e dreht sodann das Fernrohr 180° in seinen Lagern, also lange, bis der Faden *ab* der Lage *ba*, Fig. 59 II, pa allel mit der früheren La erscheint. Hierauf liest m die Stellung der Schraube ab, dreht dieselbe so lang bis der Faden *ba* wieder dur die Punkte *e* und *f* hindurc geht, liest wieder ab und dre um die Hälfte der Ablesung differenz wiederum zurück. Der Horizontalfaden muß dann durch d mechanische Achse gehen. Auf jeden Fall wird das Verfahren wiederho bis dies erreicht ist, und dann die Stellung der Schraube *p*, welche dies Stellung entspricht, ein für allemal notiert.

Fig. 59.



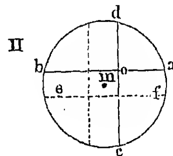
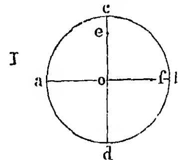
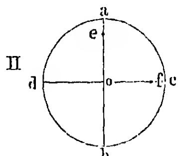


Fig. 60.





Dasselbe Verfahren wird nun mit dem Vertikalfaden durchgeführt, wob man sich der zu seiner Verschiebung dienenden Korrektionsschrauben bedie Zum Schlusse darf der Durchkreuzungspunkt *o* den anvisierten Punkt nicht verlassen, wenn das Fernrohr in seinen Lagern gedreht wird.

2. Prüfung der Rechtwinkeligkeit des Fadenkreuzes.

Man visiert auf drei Punkte *e*, *p* und *f*, welche so gezeichnet sind, d sie bei *p* einen rechten Winkel bilden. Es muß dann, wenn *o* auf *p* gericht wird, beim Drehen einmal wie in Fig. 60 I bei horizontaler Lage des Fade *ab*, dann nochmals wie in Fig. 60 II bei vertikaler Lage desselben Fade gelingen, die beiden Punkte *e* und *f* durch die Fäden zu bedecken. Zei sich ein Fehler, so muß ein neues Fadenkreuz aufgespannt werden.

also die Schwingungszahl n von f^{-1} gleich $24.3,6 = 86,4$. Demnach wäre die Schwingungszahl von c^{-1} gleich 64,8; es wären ferner 259,2 und 432 die Schwingungszahlen der Töne c^1 und a^1.

In anderer Weise hat Scheibler die Stöße benutzt, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen. Er stellte zwei Stimmgabeln her, von denen die eine genau eine Oktave tiefer war als die andere, so daß also $2n$ die Schwingungszahl der letzteren war, wenn man mit n die Schwingungszahl der ersteren bezeichnet. Alsdann verfertigte er $p - 1$ weitere Stimmgabeln, deren Töne zwischen jenen lagen, und zwar so, daß jede folgende mit der vorhergehenden 4 Stöße in der Sekunde machte. Daraus ergibt sich nun:

$$2n = n + 4p \text{ oder } n = 4p.$$

Beträgt z. B. die Zahl der Stimmgabeln, welche man zwischen a^0 und a^1 einschalten muß, wenn jede folgende mit der vorhergehenden 4 Stöße geben soll, 54, so ist $p = 55$, $n = 4.55 = 220$, also die Schwingungszahl von $a^1 = 440$.

Die Ausführbarkeit dieser allerdings etwas mühsamen Methode beruht darauf, daß das Ohr für die Reinheit der Oktaven ganz besonders empfindlich ist.

Die Scheiblersche Methode wird übrigens in neuerer Zeit in Verbindung mit der optischen Methode gebraucht und ist dann von der subjektiven Beurteilung der Reinheit des Oktavenintervalls unabhängig.

Eine andere Anwendung der Stöße ist die zur Demonstration des Dopplerschen Prinzips, das wir im § 227 vorgetragen haben.

Stellt man zwei Stimmgabeln mit Resonanzkästen, welche genau unisono gestimmt sind, in einiger Entfernung voneinander auf und bewegt sich, während sie beide tönen, von der einen Gabel gegen die andere, so hört man sofort Stöße, da scheinbar die Tonhöhe der Gabel, der man sich nähert, ebensoviel steigt, als die andere sinkt. Bleibt der Beobachter stehen, und wird dagegen die eine Gabel demselben genähert oder entfernt, so treten ebenfalls Schwebungen auf, deren Anzahl aber, wie leicht erklärlich, nur halb so groß ist wie im vorigen Falle.

Nimmt man eine Stimmgabel mit dicken Zinken, welche einen recht kräftigen und hohen Ton (über 2000 Schwingungen per Sekunde) gibt, und bewegt dieselbe, nahe der Zimmerwand stehend, senkrecht gegen dieselbe hin und zurück, so hört man ebenfalls sehr deutliche Schwebungen zwischen dem direkten und dem reflektierten Tone.

Um die Schwebungen dem Auge sichtbar zu machen, kann man die oben beschriebene optische Methode mittels der Spiegel tragenden Stimmgabeln anwenden.

Auch mittels zweier nahe gleich gestimmter Orgelpfeifen lassen sich die Schwebungen sichtbar darstellen, indem man ein und denselben Gasstrom nacheinander durch die manometrischen Kapseln beider Pfeifen zu einem gemeinsamen Brenner führt (siehe § 214). Im rotierenden Spiegel zeigt sich dann eine Reihe Flammenbilder von ab- und zunehmender Höhe.

Je näher die beiden Töne einander liegen, desto langsamer folgen die Stöße, so daß man sie bequem zählen kann. Macht der eine Ton in jeder Sekunde 3, 4, 5 usw. Schwingungen mehr als der andere, so werden 3, 4, 5

Stöße in der Sekunde entstehen; die Anzahl der Stöße ist gleich de der Schwingungen, welche der eine Ton in jeder Sekunde mehr m der andere. Wenn aber die Töne mehr und mehr ungleich we werden die Stöße schneller und schneller, bis sie endlich nicht meh trennte Eindrücke wahrgenommen werden können.

Solange die Schwebungen (Stöße) langsam genug sind, um ohne rigkeit gezählt zu werden, machen sie auf das Ohr durchaus kein genehmen Eindruck. Wenn aber die Differenz der beiden Töne bis Halbton wächst, so wächst die Zahl der Schwebungen bis zu 20 od der Sekunde; es bleibt dann dem Ohre immer noch der Eindruck g Tonstöße, wenn man sie auch nicht mehr einzeln wahrnehmen od kann, aber der Gesamteindruck wird wirr. Wir werden weiter unte wie v. Helmholtz auf diesem Umstande eine Theorie der Konson Dissonanz der Intervalle aufgebaut hat.

R. König, der leider vor einigen Jahren in Paris verstorbene I ausgezeichneter akustischer Apparate, hat in seiner Abhandlung „ Zusammenklang zweier Töne[1]) Beobachtungen veröffentlicht, aus den Schluß zog, daß Stöße nicht nur dann entstehen, wenn zwei T einander nahe im Einklang sind, sondern auch dann, wenn sie mi nahe ein harmonisches Intervall bilden, d. h. wenn die Schwingung einen Tones nahe ein ganzes Vielfaches der Schwingungszahl des an König experimentierte mit einer Reihe von 56 Stimmgabeln, von ersten fünf 130 kg wogen. Er hatte so Töne von 64 bis zu 4096 gungen zur Verfügung, von denen die tiefsten noch durch Resona verstärkt wurden.

Läßt man zu dem Tone 64 einen ebensolchen ertönen, dessen gungszahl man allmählich erhöht, so entstehen zunächst die gew Schwebungen oder Stöße, deren Zahl m gleich der Differenz n' – Schwingungszahlen der primären Töne ist. Sobald $n' = 78$ gew gehen die Stöße, deren Zahl nun $78 - 64 = 14$ geworden, in ein über, welches bis $n' = 86$ (22 Stöße) immer schneller wird, oh Charakter zu verlieren. Darauf folgt ein lautes verworrenes „ welches bei $n' = 108$ (44 Stöße) wieder in ein Rollen übergeht, langsamer wird, bis man wieder die einzelnen Stöße zählen kann, nä $n' = 118$ 10 Stöße, bei $n' = 119$ 9 Stöße usf., bis bei $n' = 128$ gänzlich verschwinden.

König nennt diese letzteren Stöße die oberen Stöße, die früh gegen untere Stöße. Bezeichnen wir die Anzahl der letzteren mi der oberen mit m', so ist die Anzahl der unteren Stöße

$$m = n' - n,$$

die Anzahl der oberen Stöße

$$m' = 2n - n'.$$

Allein damit sind noch nicht alle Stöße erschöpft, welche der Gru geben kann; denn geht man nun mit n' über die Oktave 128 hinaus, wiederum Stöße auf, welche König wiederum untere nennt. Bei n (12 Stöße) beginnt wieder ein Rollen, bei $n' = 148$ (20 Stöße) ein

[1]) Pogg. Ann. 157, 177 (1876).

bei $n' = 166$ erscheint eine Rauhigkeit des Tones, darauf wieder ein Rollen, das sich bald verlangsamt, bei $n' = 180$ kann man wieder 12 obere Stöße zählen, bei $n' = 186$ 6 Stöße, bei $n' = 190$ 2 Stöße, bei $n' = 192 = 3 \times 64$ verschwinden die Stöße.

Zwischen $n' = 128$ und 192 gilt also für die Zahl der unteren Stöße

$$m' = n' - 2n,$$

für die Zahl der oberen Stöße

$$m = 3n - n'.$$

Die unteren Stöße sind immer stärker als die oberen und deshalb innerhalb eines weiteren Gebietes bemerkbar.

Läßt man n' noch weiter steigen, so wiederholen sich diese Erscheinungen, doch werden die Stöße immer weniger bemerkbar. In der Periode von $n' = 7n$ bis $n' = 8n$ waren noch 4 Stöße deutlich zu hören, ja selbst bei $n' = 9n$ und $n' = 10n$ konnten noch einige wahrgenommen werden. Bedeutet h eine ganze positive Zahl, so hat man für die Zahl der unteren und oberen Stöße die Gleichungen:

Zahl der unteren Stöße . . . . $m = n' - hn$

" " oberen " . . . . $m' = (h + 1)n - n'$.

Die Zahl m der unteren Stöße ist also immer gleich dem positiven Reste der Division $n' : n$, die Zahl m' gleich dem negativen Reste.

Wiederholt man die Versuche mit einem höheren Grundton als $n = 64$, so gelten dieselben Gesetze, aber die Stöße werden so rasch, daß sie nicht mehr bei so weiten Intervallen zu beobachten sind. So z. B. sind bei $n = 512$ die unteren und oberen Stöße nur ganz in der Nähe des Grundtones und der harmonischen Obertöne als Stöße wahrzunehmen. Dagegen gehen sie nach König infolge ihrer großen Zahl in Töne über, welche er Stoßtöne nennt. Bei dem Grundton $n = 128$ ist die größte Zahl der Stöße in der Mitte jeder Periode gleich 64, und es wird auch wirklich ein schwacher Ton von 64 Schwingungen gehört. Beim Grundton $n = 256$ hört man schon, sobald n' die Terz erreicht (64 Stöße), einen schwachen Ton 64, welcher bis zum Ton 128 ansteigt, sobald n' die Quint erreicht hat. Von $n' = 384 - 448$ steigt der Stoßton von 128 bis 192 und erreicht eine auffallende Stärke.

Der obere Stoßton läßt sich schon bei 192 bis 128 Stößen mittels Hilfsgabeln, mit denen er selbst wieder Stöße gibt, nachweisen.

Am geeignetsten fand König zum Studium der Stoßtöne den Grundton $n = 1024$.

Fassen wir das Mitgeteilte zusammen: So oft zu einem Tone n ein höherer n' angestimmt wird, können nach König im allgemeinen zwei Stoßtöne m und m' entstehen. Um ihre Zahlen zu berechnen, sucht man diejenigen beiden harmonischen Töne von $n = hn$ und $(h + 1)n$, zwischen denen n' liegt. Die Differenz $n' - hn$ gibt den unteren, $(h + 1)n - n'$ den oberen Stoßton. Fällt diese Differenz aber kleiner als 64 aus, so entsteht nur eine Rauhigkeit, ein Rasseln oder ein Rollen, wird die Differenz klein genug, so hört man statt des Stoßtones die einzelnen Stöße.

Aber damit ist das Gebiet noch nicht erschöpft, denn nach König verhalten sich zwei solche Stoßtöne zueinander wie zwei primäre Töne und

geben miteinander Stöße und Stoßtöne zweiter Ordnung oder sekundäre Stöße und Stoßtöne.

Dazu sind nicht mehr als zwei primäre Töne erforderlich. Zum Beispiel lasse man den Ton $n = 256$ und seine Quint $n' = 384$ zusammenwirken, dann ist

der untere Stoßton . . . . $m = n' - n = 384 - 256 = 128$
„ obere „ . . . . $m' = 2n - n' = 512 - 384 = 128$

Wir brauchen also m und m', die jetzt im unisono sind, nur ein wenig zu verstimmen, damit sie Stöße geben. Nehmen wir also zu $n = 256$ ein $n' = 385$, so wird

$$m = 385 - 256 = 129$$
$$m' = 512 - 385 = 127$$
$$m - m' = 2$$

Es erfolgen demnach zwei sekundäre Stöße pro Sekunde. Man findet so allgemein, daß, so oft der höhere Ton n' von der Reinheit der Intervalle um eine Schwingung abweicht, bei den Intervallen $^2/_3$, $^2/_5$, $^2/_7$ . . . je zwei, bei den Intervallen $^3/_4$, $^3/_7$ . . . und $^3/_5$, $^3/_8$ . . . je drei, bei den Intervallen $^4/_5$, $^4/_9$ . . . und $^4/_7$, $^4/_{11}$ . . . je vier Stöße entstehen.

Wird die Anzahl dieser sekundären Stöße hinlänglich groß, so bilden sie nach König einen sekundären Stoßton. Dies wurde in zwei Fällen beobachtet, so z. B. wenn der Ton 2048 mit dem Tone 2816 zusammenklingt. Man hört laut $m = 768$ und $m' = 1280$ und noch deutlich $m' - m = 512$.

Auf einen Einwand von H. v. Helmholtz, daß die Stöße der harmonischen Intervalle darauf zurückzuführen seien, daß der tiefere Ton n einen Oberton von nahe gleicher Höhe mit dem höheren Tone n' in seinem Klange enthalte, und daß so der höhere primäre Ton mit dem nahe gleich hohen Oberton des anderen primären Tones die Stöße verursache, hat König[1]) erwidert, daß seine Stimmgabeln die betreffenden Obertöne gar nicht hören ließen. Einem anderen Einwand, daß die betreffenden Obertöne erst im Ohr durch Einwirkung der starken primären Töne entstehen könnten, begegnete König mit dem Hinweise, daß die Stöße auch bei schwachen Tönen auftreten, daß ferner der Oberton, welcher die Stöße veranlassen sollte, gehört werden müßte, da der Ton einer Hilfsgabel, welcher an Stelle des Obertones die Stöße in derselben Stärke hervorruft, sehr deutlich gehört werde. Wir müssen bezüglich der weiteren Experimente von König auf die zitierte Originalabhandlung verweisen[2]).

Die Fig. 813 ergibt, daß durch Kombination zweier Sinuswellen, welche Tönen von n und n' Schwingungen pro Sekunde entsprechen, eine Kurve mit periodisch an- und abschwellender Amplitude entsteht, welcher ein ebensolches periodisches An- und Abschwellen der Tonstärke entspricht. Die Größe der Periode ist $n - n'$. Daraus folgt, daß umgekehrt ein Klang, bei welchem die Stärke sich nach demselben Gesetze periodisch ändert, vom Ohr als Zu-

[1]) „Über den Ursprung der Stöße und Stoßtöne bei harmonischem Intervall" Wiedem. Ann. 12, 335 (1881).

[2]) Dieselbe enthält auch die Beschreibung der „Wellensirene", bei welcher statt der Löcherreihen wellenförmige Scheibenränder vor radial gestellten spaltförmigen Blaseöffnungen vorbeigeführt werden.

sammenklingen zweier Töne wahrgenommen werden muß. Es läßt sich dies nach A. u. L. Weinhold[1]) auf folgende Weise experimentell bestätigen. Man befestigt auf der Achse der Schwungmaschine den Stiel einer Stimmgabel von 435 Schwingungen und gibt dann 20 Umdrehungen pro Sekunde. Nach § 239 erhält ein seitwärts stehendes Ohr bei jeder Umdrehung 4 Maxima und Minima zu hören, also 80 Maxima pro Sekunde. Eine solche Zahl von Schwebungen entsteht durch zwei Töne von 435 — 40 = 395 und 435 + 40 = 475 Schwingungen; diese zwei Töne, die nahezu im Intervall einer kleinen Terz 5 : 6 zueinander stehen, werden in der Tat gehört und lassen sich insbesondere auch durch Resonatoren nachweisen. Die Autoren vergleichen diese Erscheinung mit dem Zeemanschen Phänomen (Zerlegung der Natriumlinie in zwei durch Einwirkung eines magnetischen Feldes).

§ 247. Die mehrstimmigen Sirenen von Dove und v. Helmholtz. Zur Anstellung von Interferenzversuchen verschiedener Art sind von besonderem Werte die mehrstimmige Sirene von Dove[2]) und die mehrstimmige Doppelsirene von v. Helmholtz[3]).

Nachdem schon früher Savart, Opelt und Seebeck mehrstimmige Sirenen teils durch Anbringung mehrerer Räder auf einer Achse, teils mehrerer Löcherreihen auf einer Scheibe konstruiert hatten, übertrug Dove

Fig. 814.

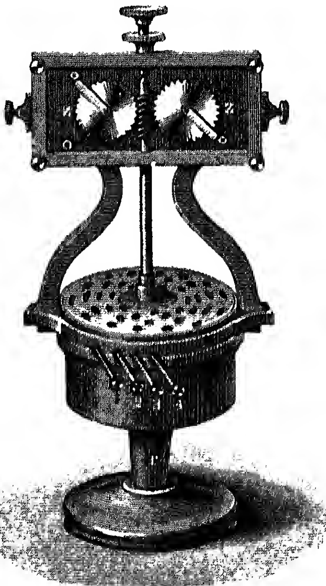
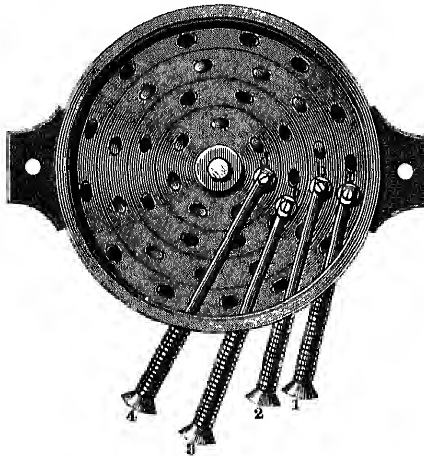


Fig. 815.



diese Erweiterung auf die Sirene von Cagniard la Tour (§ 225). Die Dovesche Sirene ist in Fig. 814 abgebildet, Fig. 815 zeigt die innere Einrichtung der konzentrischen Ringe mit den verschiedenen Löcherreihen.

Die zum Rotieren bestimmte Scheibe, sowie die darunter befindliche fixe Platte, welche den Deckel des Windkastens bildet, haben auf vier kon-

---

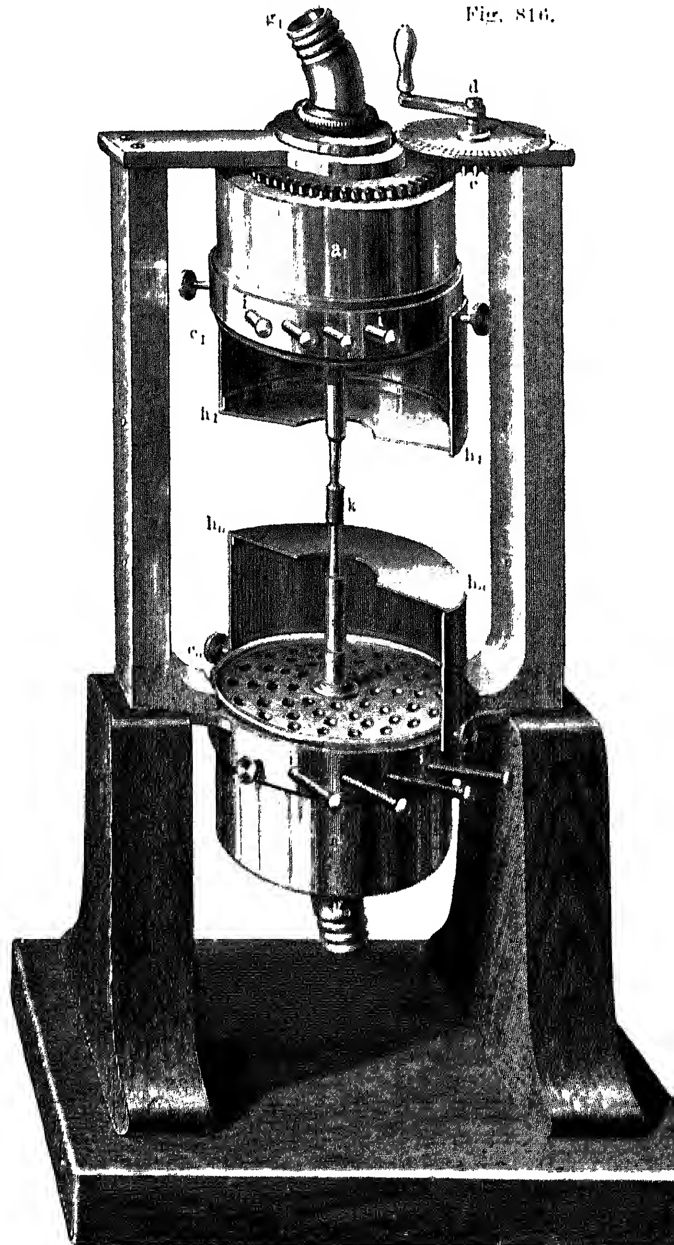
[1]) Ein akustisches Analogon zum Zeemannschen Phänomen; Zeitschr. für phys. u. chem. Unterr. 17, 92 (1904).

[2]) Poggend. Ann. 82 (1851).

[3]) Tonempfindungen, S. 241, 4. Aufl., S. 269.

zentrischen Kreisen von innen nach außen 8, 10, 12 und 16 Löc
wie bei der Sirene von Cagniard la Tour schief gebohrt sin
daß sich die Bohrungen rechtwinkelig treffen. Unterhalb des fi
befinden sich vier konzentrische Ringe, Fig. 815 *a*, *b*, *c*, *d*, welch

Fig. 816.



einander schließen und mittels daran gekuppelter Messingstifte i
ihrer Ebene drehbar sind. Die Führung für den innersten Ring
bildet eine am Deckel befestigte Scheibe, die Führung für den

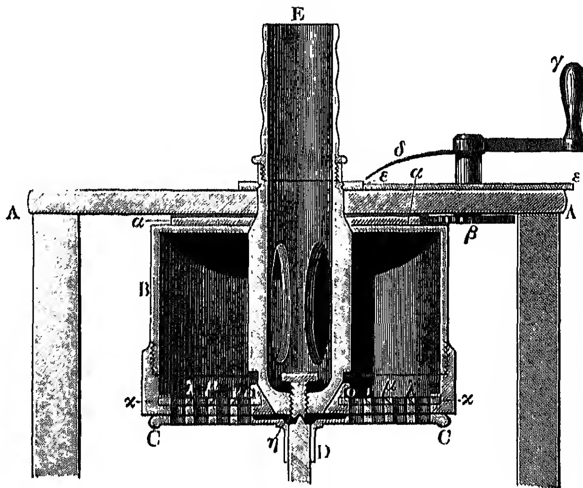
Ring nach außen bildet der feste Rand des Deckels. Die Bohrung dieser vier Ringe stimmt in Zahl und Richtung der Löcher genau mit jener des darüber befindlichen Deckels überein.

Die Messingstifte 1, 2, 3, 4 sind außerhalb mit Spiralfedern und inwendig mit Anschlagzapfen versehen, welche bewirken, daß dieselben für gewöhnlich eine solche Lage annehmen, daß dadurch die zugehörige Löcherreihe verschlossen bleibt. Drückt man aber auf einen Stift, so wird dadurch der zugehörige Ring so weit gedreht, daß seine Löcherreihe geöffnet wird.

Man kann daher nach Belieben einen oder mehrere der vier Töne der Sirene allein oder zugleich anstimmen.

Die Doppelsirene von v. Helmholtz, Fig. 816, ist durch Zusammensetzung zweier Dovescher Sirenen a_0 und a_1 entstanden, welche die rotierende Achse k gemeinsam haben und einander die Deckplatten zukehren. Das Zählwerk (in der Figur weggelassen) ist an die Schraube bei k anzusetzen; der Wind wird bei g_0 und g_1 zugeführt. Außerdem ist aber noch

Fig. 817.



eine Einrichtung getroffen, um den oberen Windkasten a_1 gegen den unteren um seine Achse zu drehen. Zu dem Ende ist er mit einem Zahnrade versehen, in welches das kleinere, mit einer Kurbel d versehene Zahnrad e eingreift. Die Achse des Kastens a_1, um die es sich dreht, ist eine Verlängerung des oberen Windrohres g. Fig. 817 zeigt einen Vertikalschnitt durch den oberen Kasten, aus welchem die innere Einrichtung zu ersehen ist. Das Windrohr E ist fest in den Querbalken des Gestelles AA eingefügt und verlängert sich nach innen in einen hohlen Zylinder mit konisch zugeschnittenen Flächen an den Enden, auf denen entsprechende konische Aushöhlungen im Boden und Deckel des Kastens gleiten, so daß sich der letztere frei um das Windrohr drehen kann. α zeigt den Querschnitt des Zahnrades, welches am Kasten festsitzt, β das kleinere Zahnrad, γ die Kurbel, δ einen Zeiger, der an einer Randteilung ε die Drehungswinkel ablesen läßt.

Die rotierende Achse, deren oberes Ende D in Fig. 817 sichtbar ist, läuft auf feinen Spitzen in kegelförmigen Pfannen, deren obere mittels der Schraube η etwas verstellbar ist. CC ist die an die Achse D befestigte,

rotierende Scheibe, $\varkappa\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\nu$, νo sind die vier konzentrischen Ringe, welche mit schräg abgeschnittenen Rändern wie die Ringe einer Herdplatte übereinander greifen. Die übrige Einrichtung ist wie bei der Doveschen Sirene. Die untere rotierende Scheibe hat vier Reihen mit 8, 10, 12, 18, die obere mit 9, 12, 15, 16 Löchern. Bezeichnen wir den Ton, der bei Öffnung der acht Löcher entsteht, mit *c*, so gibt die untere Scheibe die Töne *c*, *e*, *g*, *d'*, die obere Scheibe die Töne *d*, *g*, *h*, *c'*.

Man kann demnach die Intervalle: Unisono, Oktave, Quinte, Quart, große Terz, kleine Terz, ganzer Ton, halber Ton hervorbringen, und zwar die Mehrzahl derselben in doppelter Weise, nämlich entweder an einer der Scheiben allein oder derart, daß der eine Ton an der einen, der andere Ton an der anderen Scheibe entsteht.

Mit diesem Instrumente läßt sich eine große Anzahl wichtiger Experimente anstellen, die sich zum Teil auf schon Vorgetragenes beziehen, zum Teil erst im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Um den Klang der Sirene von den darin vorhandenen Obertönen annähernd zu befreien, werden die Resonanzkästen $h_0 h_0$ und $h_1 h_1$, Fig. 816, aus je zwei Hälften bestehend, aufgesetzt. Dies hat zur Folge, daß der Grundton der Sirene, sobald er die Höhe des Eigentones dieser Resonanzkästen erreicht, voll, stark und weich ertönt und sich zu Interferenzversuchen besser eignet.

Stehen beide Windkästen so, daß die Impulse der gleichen Töne gleichzeitig entstehen, also die Phasendifferenz sowohl der Grundtöne als ihrer Obertöne genau gleich Null wird, so werden alle diese Töne verstärkt. Dreht man dann aber die Kurbel um 45°, was eine Drehung des Kastens um $^1/_{24}$ der Peripherie zur Folge hat, so wird beim beiderseitigen Anblasen der Zwölflöcherreihe eine Phasendifferenz $= ^1/_2$ stattfinden; die beiden Grundtöne vernichten sich dann. Die Phasendifferenz der beiderseitigen ersten Obertöne (Oktaven) beträgt aber zwei halbe Schwingungen oder eine ganze; diese Obertöne verstärken sich daher so wie alle anderen geradzahligen Obertöne, während alle ungeradzahligen ausgelöscht werden. Drehung der Kurbel um noch einmal 45°, also im ganzen um 90°, stellt den ursprünglichen Zustand wieder her. Dreht man die Kurbel einmal ganz herum, so wird viermal der Grundton mit den geradzahligen Obertönen verstärkt, dazwischen viermal geschwächt und statt dessen die Oktave und die übrigen ungeradzahligen Obertöne verstärkt. Der erste Oberton (die Oktave) für sich allein (etwa mit Resonator) beobachtet, wird achtmal verstärkt und wieder geschwächt, die Duodezime zwölfmal usf.

Um die Erscheinung der Stöße oder Schwebungen zu produzieren, muß man den einen Ton ein wenig verstimmen. Man erreicht dies einfach, indem man die Kurbel langsam, aber konstant dreht. Ist dabei die Rotationsrichtung des oberen Windkastens übereinstimmend mit der rotierenden Scheibe, so wird der Ton vertieft, bei entgegengesetzter Richtung erhöht. So oft die Kurbel um 90° gedreht wird, sinkt oder steigt die Anzahl der Schwingungen um eine, weil die zugehörige Drehung des Kastens dem zwölften Teile der Peripherie, also dem Abstand zweier Löcher entspricht. Es müssen demnach während jeder Umdrehung der Kurbel vier Schwebungen entstehen, ganz im Einklang mit der Regel, daß die Anzahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahlen.

Die subjektive Tonstärke wächst mit der Anzahl der Schwingungen oder der Tonhöhe, wenn auch der Aufwand an lebendiger Kraft zur Hervorbringung der Töne gleich groß ist. Dies zeigt sich an der Sirene sehr auffallend. Unterhält man nämlich den Luftstrom ganz konstant, so ist der Ton anfangs, solange er tief ist, ziemlich schwach, nimmt mit der Höhe immer mehr an Intensität zu und wird bei etwa 880 Schwingungen unerträglich stark. Dabei ist die Zunahme am Anfang am raschesten. Daraus folgt, daß bei tiefer Tonlage in zusammengesetzten Klängen die Obertöne für unser Ohr überwiegen können. Auch dies läßt sich an der Doppelsirene (mit den Zwölflöcherreihen) leicht zeigen, da man durch die Schwebungen stets feststellen kann, welchen Ton man hört. Man weiß nämlich, daß eine Kurbelumdrehung 4 Schwebungen des Grundtones, 8 Schwebungen des ersten, 12 Schwebungen des zweiten Obertones usw. verursacht. Läßt man nun die Scheiben langsamer als gewöhnlich laufen, indem man sie durch eine mit Öl benetzte Stahlfeder bremst, so hört man bei steigender Geschwindigkeit zuerst 12, dann 8, dann erst 4 Schwebungen während einer Kurbeldrehung. Trotzdem bemerkt man am Klange nicht, daß im Anfang der Grundton fehlt. Es zeigt dies, wie leicht man sich bei der Ermittelung der unteren Tongrenze irren kann, wenn man nicht die Obertöne ausschließt oder die Probe mit den Schwebungen vornimmt.

Aber auch die Stöße, welche bei größeren Intervallen durch die Obertöne auftreten, lassen sich mit der Doppelsirene demonstrieren. Man läßt z. B. an der oberen Scheibe 12, an der unteren 18 Löcher wirken, das Intervall ist 2 : 3, also Quinte. Dieselbe ertönt rein und ohne Stöße, solange man die Kurbel unberührt läßt, dreht man sie aber, so gibt jede Umdrehung derselben 12 Stöße, woraus folgt, daß dieselben durch Interferenz des zweiten Obertones des tieferen mit dem ersten Oberton des höheren Tones entstehen. Angenommen, der Ton der Zwölflöcherreihe betrage 220, der der Achtzehnlöcherreihe also 330 Schwingungen. Der zweite Oberton des ersten beträgt daher 660, der erste Oberton des zweiten ebenfalls 660 Schwingungen, welche zusammen keine Stöße geben können. Erhöht man aber den Ton 220 durch eine Drehung der Kurbel pro Sekunde auf 224, so wird sein zweiter Oberton $3 \times 224 = 672$, welcher mit dem Ton 660 eine Anzahl von $672 - 660 = 12$ Schwebungen geben muß.

§ 248. Kombinationstöne. Wenn zwei musikalische Töne von verschiedener Höhe gleichzeitig, kräftig und gleichmäßig anhaltend erklingen, so hört man häufig noch andere Töne mit, deren Tonhöhe von dem Intervall der beiden primären Töne abhängt. Diese unter dem Namen der Kombinationstöne bekannten Töne sind 1740 zuerst von Sorge entdeckt und später durch Tartini, nach welchem sie auch die Tartinischen Töne genannt werden, allgemeiner bekannt geworden.

Die Schwingungszahl eines Kombinationstones ist gleich der Anzahl von Stößen, welche die beiden primären Töne miteinander geben, sie ist also gleich der Differenz des Schwingungszahlen der primären Töne, weshalb v. Helmholtz sie auch Differenztöne nennt.

So hört man die nächst tiefere Oktav eines Tones mit, wenn gleichzeitig noch seine Quinte erklingt.

tiefere Duodezime des Grundtones mit.

Grundton und große Terz geben einen Kombinationston, welcher um zwei Oktaven tiefer ist als der Grundton usw. Es geben also:

c^2 und g^2 den Kombinationston c^1
c^2 „ f^2 „ „ f^0
c^2 „ e^2 „ „ c^0.

Thomas Young versuchte die Kombinationstöne auf die bereits im vorigen Paragraphen besprochenen Schwebungen zurückzuführen, indem er annahm, daß der Gesamteindruck der Stöße, welche zu schnell sind, um einzeln unterschieden zu werden, als ein eigener Ton hörbar werde. In der Tat stimmt die Schwingungszahl des Differenztones mit der Zahl der Stöße überein.

Diese Erklärung der Kombinationstöne ist aber, wie v. Helmholtz in seinem mehrmals angeführten Werke gezeigt hat, nicht haltbar. Zunächst haben wir bereits im vorigen Paragraphen erfahren, daß unter Umständen eine namhafte Anzahl von Stößen in der Sekunde erfolgen kann, welche nicht als Kombinationston wahrgenommen werden, sondern nur die Dissonanz der beiden gleichzeitig erklingenden Töne zur Folge haben. Dann aber ist die Vernehmbarkeit der Kombinationstöne auch nicht allein von dem Intervall und der Stärke der beiden primären Töne, sondern wesentlich auch von ihrer Entstehungsweise abhängig. Die Bedingung für ihre Erzeugung ist, daß dieselbe Luftmasse von beiden Tönen in heftige Erschütterung versetzt wird. Dies geschieht am stärksten in Doves mehrstimmiger Sirene oder in der v. Helmholtzschen Sirene, und zwar in letzterer dann, wenn die primären Töne beide an derselben Scheibe hervorgerufen werden. Die Luft im Windkasten ist verdichtet, so oft die Löcher geschlossen sind; wenn sie geöffnet werden, stürzt ein großer Teil derselben ins Freie, es tritt eine beträchtliche Druckverminderung ein. So gerät die Luft im Windkasten in heftige Schwingungen. Werden zwei Löcherreihen angeblasen, so entstehen solche Schwingungen in der Luftmasse des Windkastens beiden Tönen entsprechend, und durch jede Reihe von Öffnungen wird nicht ein gleichmäßig zufließender Luftstrom entleert, sondern ein Luftstrom, welcher durch den anderen Ton schon in Schwingungen versetzt ist. Die Kombinationstöne, welche unter diesen Umständen sehr stark sind, existieren hier schon objektiv in der Luftmasse.

Ähnlich wie bei der Sirene sind die Verhältnisse bei der Physharmonika und dem im nächsten Paragraphen zu besprechenden Obertöne-Apparat von Appun; auch hier sind die Kombinationstöne objektiv vorhanden und sehr deutlich, wenn auch nicht so stark wie bei der Sirene.

Wenn dagegen die Erregungsstellen der beiden Töne ganz voneinander getrennt sind und keinen mechanischen Zusammenhang miteinander haben, wenn also z. B. zwei Singstimmen oder zwei Violinen die Töne angeben, so sind die Kombinationstöne äußerst schwach und nur durch sehr geübte Ohren wahrnehmbar.

Außer den eben besprochenen Differenztönen gibt es, wie v. Helmholtz zuerst theoretisch abgeleitet und dann experimentell nachgewiesen hat, noch eine zweite Art von Kombinationstönen, welche er Summations-

B. Vertikalstellung der Umdrehungsachse des Maßstabes.

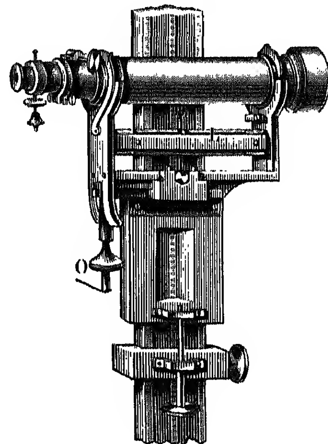
Man setzt auf das Fernrohr die Libelle L auf und bringt dieselbe durch Drehung der Schraube o zum Einspielen. Dreht man hierauf den Maßstab mit dem Hohlkörper um die Säule herum, so kann die Libelle nur dann überall einspielen, wenn die Drehungsachse vertikal steht. Man erreicht dies, indem man systematisch an den drei Fußschrauben so lange dreht, bis die Luftblase der Libelle beim Ringsumdrehen ihre Stellung nicht ändert. Bei dieser auch anderweitig sehr häufigen Operation ist es am zweckmäßigsten, die Libelle abwechselnd so zu stellen, daß sie einmal zu der Verbindungslinie zweier Fußschrauben parallel steht, dann auf dieser Verbindungslinie senkrecht steht. Hierbei bleibt dann stets die außerhalb der Libellenrichtung stehende Fußschraube unberührt.

Hat man ferner nach einer dieser Richtungen die Libelle zum Einspielen gebracht und dreht dann um 180°, so korrigiert man die Hälfte der dann eintretenden Abweichungen an der Schraube o, die andere Hälfte an den Fußschrauben. Schließlich muß sich die einspielende Libelle ringsum drehen lassen, ohne ihren Stand zu ändern; dann steht auch die Umdrehungsachse vertikal.

C. Horizontalstellung der Fernrohrachse.

Diese Operation ist in verschiedener Weise auszuführen, je nachdem die Libelle wie in Fig. 58 a auf die Ringe des Fernrohrs frei auf- und umzusetzen ist, oder wie in Fig. 61 mit den Trägern des Fernrohrs fest verbunden ist.

Fig. 61.



Im ersten Falle ist folgendermaßen zu verfahren: Man setzt die Libelle auf und bringt sie mittels Schraube o zum Einspielen; dann sind entweder Fernrohr und Libelle richtig gestellt oder beide haben die gleiche Winkelabweichung nach entgegengesetzter Richtung. Fig. 62 mag dies klar machen. In I ist das Fernrohr geneigt, seine mechanische und optische Achse, sowie die Verbindungslinie mn bilden mit dem Horizont einen Winkel α; denselben Winkel bildet die mit mn zusammenfallende Verbindungslinie der unteren Fußenden der Libellenfassung, welche auf den Ringen r und r' aufruhen, mit der die Mitte der Luftblase tangierenden Horizontalrichtung hh', doch liegt der Scheitel dieses Winkels nach der entgegengesetzten Seite. Das Einspielen der Libelle ist also nur ermöglicht, indem die Stellung der Libellenröhre in ihrer Fassung fehlerhaft ist. Setzt man nun die Libelle umgekehrt auf (Fig. 62 II), so müssen sich die Fehler in den Stellungen des Fernrohrs und der Libellenröhre **summieren** statt **kompensieren**; die Abweichung der

töne nannte und deren Schwingungszahl der Summe der Schwingungszahlen der kombinierenden Töne entspricht. Die Summationstöne, welche übrigens

Fig. 818.

nur bei scharfen Klängen mit starken Obertönen vorkommen, sind ungleich schwieriger wahrnehmbar als die Differenztöne; ihre Beobachtung am Obertöneapparat läßt sich aber mit Anwendung der weiter unten zu besprechenden Resonatoren sehr erleichtern [1]).

Die Erklärung, welche v. Helmholtz von den Kombinationstönen gegeben hat, können wir hier nur kurz andeuten. Die Annahme, daß die resultierende Bewegung mehrerer Schwingungen gleich der Summe der Teilbewegungen sei, gilt nur unter der Bedingung, daß auch für die resultierende Bewegung die Kraft, mit welcher die schwingenden Teilchen gegen die Ruhelage getrieben werden, dem Abstand von letzterer proportional sei; dies gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Bei der Kombination starker Töne kommen aber große Amplituden vor. Indem nun v. Helmholtz die Rechnung unter der Annahme durchführte, daß bei letzteren die zurücktreibende Kraft nicht einfach proportional dem Abstande, sondern auch noch vom Quadrat des letzteren abhängig sei, erhielt er für die resultierende Bewegung Ausdrücke, welche die Entstehung sowohl der Differenz- als der Summationstöne erklären.

Zum Schluß wollen wir noch eine von E. Mach [2]) angegebene graphische Darstellung mitteilen, welche die beim Zusammenklang zweier Töne zu erhaltenden Kombinationstöne recht einfach übersehen läßt. In Fig. 818 ist eine Klaviatur und darüber ein Liniennetz mit zwei ganz ausgezogenen Geraden *gg* und *ii* und zwei Kurven *dd* und *ss* gezeichnet. Die Klaviatur denke man sich beweglich, so daß man die ganze Tastenreihe sowohl in horizontaler Richtung als auch in der Richtung *gg* parallel zu sich selber verschieben kann. Die beiden Geraden *gg* und *ii* werden dann stets am oberen Rande der Tastenreihe zwei mehr oder weniger voneinander abstehende Tasten markieren. Die gestrichelte Kurve *dd* markiert dann gleichzeitig den Differenzton, die punktierte Kurve *ss* den Summationston, der durch die den markierten Tasten entsprechenden Töne (einer Physharmonika) zu erhalten ist. Eine Erklärung der Tafel, sowie ihres Gebrauches, um für irgend zwei gegebene Töne ihre Kombinationstöne zu finden, erscheint nach diesen Bemerkungen nicht weiter nötig.

Eine von Dvořák [3]) zuerst beobachtete und als Variationston bezeichnete Art von Kombinationston entsteht, wenn man in einem Zimmer einen Ton erzeugt, welcher allmählich in die Höhe steigt oder in die Tiefe sinkt. Im Freien ist derselbe nicht zu erhalten. Daraus folgt, daß derselbe durch Kombination der direkten Schallwellen mit den von den Zimmerwänden reflektierten entsteht [4]).

§ 249. Theorie der Konsonanz und Dissonanz. Im § 217 wurde die Tatsache erörtert, daß gewisse Tonintervalle in der melodischen und noch mehr in der harmonischen Verbindung im menschlichen Ohr eine angenehme oder unangenehme Empfindung erregen, die man mit Konsonanz und Disso-

[1]) O. Lummer hat dieselben mittels des von ihm konstruierten Mikrophonresonators auch bei getrennten Tonquellen nachgewiesen (Verhandl. d. phys. Ges. 1886, S. 66).

[2]) Einleitung in die v. Helmholtzsche Musiktheorie. Graz 1867, S. 58.

[3]) Dvořák, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 70 (1874).

[4]) Haberditzel, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 77 (1878).

nanz bezeichnet hat. Schon Pythagoras suchte diese Tatsache mit dem Zahlenverhältnis der Saitenlängen in eine mystische Verbindung zu bringen. Euklides definierte die Konsonanz zweier Töne als die Fähigkeit, sich zu mischen, die Dissonanz als die Unfähigkeit, sich zu mischen, wodurch eine rauhe Gesamtwirkung entstehe.

Leibniz suchte die Ursache der Konsonanz sich zu erklären, indem er sich vorstellte, daß die Seele unbewußt die Schwingungszahlen zähle und an den einfachen Zahlenverhältnissen eine geheime (unbewußte) Freude empfinde. Einer ähnlichen Vorstellung gab sich sogar noch Euler hin. Einen wesentlichen Schritt zu einer wirklichen Erklärung machten erst Rameau und d'Alembert, welche beobachtet hatten, daß der Grundton meistens von den Obertönen Oktave, Duodezime und Terz der Oktave begleitet sei, und deshalb die Hinzufügung derselben Töne zu einem Grundton als naturgemäß ansahen. Smith Robert endlich führte zuerst (1749) die Erklärung der Konsonanz und Dissonanz auf die Schwebungen der Obertöne zurück. Da aber sein Buch nicht beachtet, und vergessen worden war, so erscheint v. Helmholtz, der dieselbe Theorie unabhängig fand, als der Begründer der heute geltenden Theorie der Harmonie.

Im § 246 haben wir auseinandergesetzt, daß die Schwebungen oder Stöße zweier Töne von nahe gleicher Tonhöhe einen sehr unangenehmen Eindruck in unserem Gehör verursachen, sobald deren Zahl etwa 30 bis 40 pro Sekunde erreicht. Das fortwährende Intermittieren eines Tones ist nämlich für den Gehörnerven dasselbe, was ein flackerndes Licht für den Gesichtsnerven ist; er bringt wie dieses einen viel anstrengenderen, ermüdenderen Eindruck hervor als ein gleichmäßig andauernder Ton von selbst größerer Stärke. Dem Ton h^1 kommen 495, dem Ton c^2 528 Schwingungen ($a^1 = 440$) zu. Die Differenz beträgt 33, und dies ist auch die Anzahl der Stöße pro Sekunde, welche demnach erklärt, warum das Intervall $h^1 c^2$ eine so starke Dissonanz gibt. Vergrößern wir das Intervall bis auf eine kleine Terz, indem wir den Ton h^1 bis auf a^1 erniedrigen, so wird die Anzahl der Stöße $528 - 440 = 88$. Diese erfolgen nun schon so rasch, daß sie nicht mehr imstande sind, einen unangenehmen intermittierenden Eindruck zu machen. Es ist deshalb auch keine Dissonanz mehr zu bemerken.

Indes ist die Steigerung der Anzahl der Stöße nicht allein maßgebend, sondern auch die Größe des Intervalles. Wir haben durch den Übergang von $h^1 c^2$ auf $a^1 c^2$ nicht allein die Stoßanzahl, sondern auch die Breite des Intervalles vergrößert. Wir können aber auch unter Beibehaltung der Intervallbreite von $h^1 c^2$ die Anzahl der Stöße vermehren, indem wir die beiden Töne um eine Oktave erhöhen. Das Intervall $h^2 c^3$ gibt 66, das Intervall $h^3 c^4$ 132 Schwebungen, welche eher noch unangenehmer empfunden werden wie die 33 Schwebungen von $h^1 c^2$.

Behalten wir die Anzahl der Schwebungen gleich 33 bei, so finden wir, daß folgende Intervalle diese Anzahl hervorrufen:

der Halbton	$h^1 c^2$
die Ganztöne	$c^1 d^1$ und $d^1 e^1$
„ kleine Terz	$e^0 g^0$
„ große Terz	$c^0 e^0$
„ Quarte	$g^{-1} c^0$
„ Quinte	$c^{-1} g^{-1}$

Hinge nun die Dissonanz von der Stoßanzahl allein ab, so müßten die obigen Intervalle sämtlich Dissonanz geben, was aber nur bei den beiden ersten der Fall ist.

v. Helmholtz erklärt diesen Einfluß des Intervalles durch die Annahme, daß zwei Töne nur dann merklich empfundene Schwebungen geben können, wenn sie nahe genug aneinander liegen, um im Ohre die nämlichen Nervenfasern zu affizieren.

Damit zwei einfache Töne miteinander Dissonanz geben, müssen dieselben also einmal zueinander in einem Intervall stehen, welches nicht über einen Ton hinausgeht, und außerdem miteinander 30 bis 40 Schwebungen geben. Innerhalb der in der Musik am meisten gebrauchten Oktaven entsprechen diesen Bedingungen insbesondere sämtliche Halbtonintervalle.

Bei den mit Obertönen ausgerüsteten Klängen kommen nun aber auch die Schwebungen zwischen den Obertönen und den Grundtönen, sowie die der Obertöne unter sich mit in Betracht. Dabei sind ganz besonders die unteren Obertöne (bis etwa zum sechsten) maßgebend, weil sie durch ihre Intensität hervorragen. Konsonanz werden also diejenigen Intervalle geben, deren Grundtöne keine oder nur wenige oder doch nur schwache Obertöne von solcher Höhe enthalten, daß dieselben nur einen halben Ton voneinander abstehen. Um zu übersehen, welche Intervalle aus diesem Grunde konsonant oder dissonant werden, bedienen wir uns wiederum der von E. Mach angewendeten Darstellungsmethode, welche wir in § 242 kennen lernten. In Fig. 819 ist eine Klaviatur abgebildet; darüber seien zwei Stäbe verschiebbar, auf denen die Lage der Partialtöne durch dunkle Felder dargestellt ist. Die eingeschriebenen Zahlen entsprechen den Ordnungszahlen der Partialtöne. Beläßt man nun das untere Stäbchen immer an derselben Stelle, so daß sein erster Partialton (Grundton) mit *c* zusammenfällt, und schiebt hierauf nach und nach das obere Stäbchen immer weiter nach rechts, so daß sein erster Partialton (Grundton) nach und nach auf alle Töne der chromatischen Skala zu liegen kommt, so sieht man sofort, welche relative Lage die übrigen Partialtöne zueinander einnehmen. Man kann demnach vorausbestimmen, ob das Anschlagen der Taste *c* mit irgend einer anderen Taste eine Konsonanz oder Dissonanz hervorbringen wird.

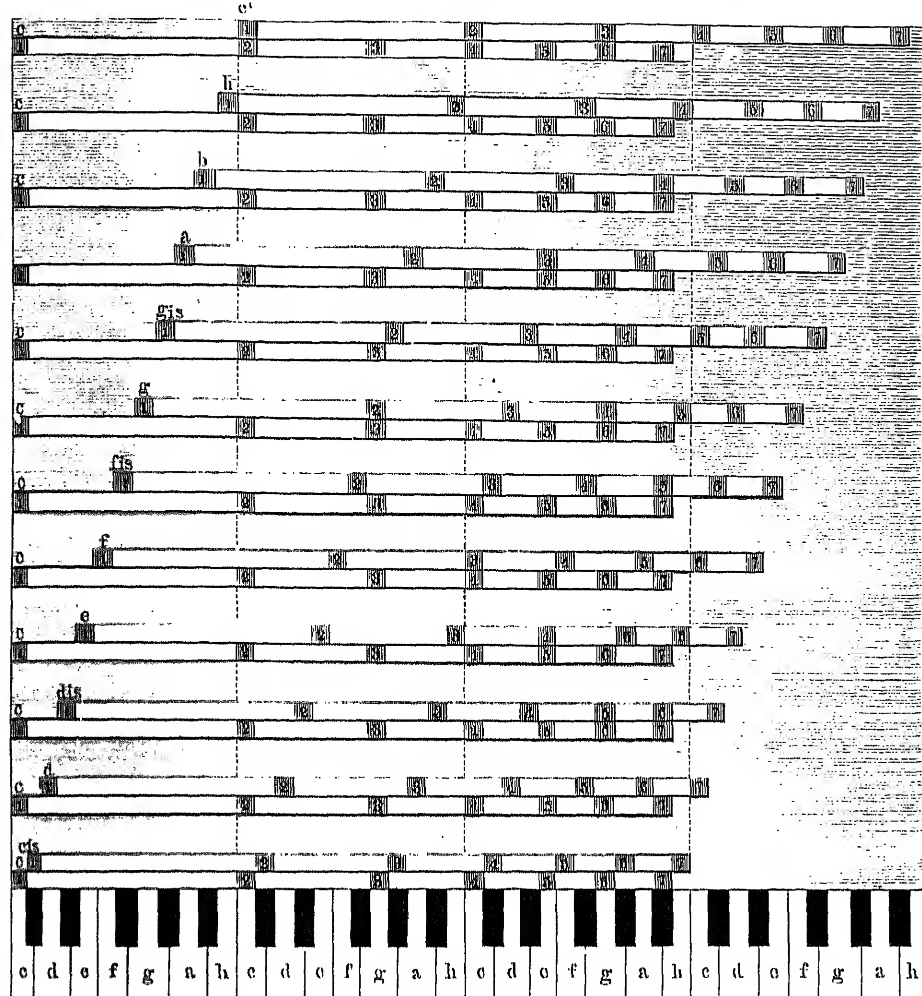
So z. B. ersieht man, daß, wenn das untere Stäbchen auf *c* und das obere auf dessen Oktav gestellt wird (in der Fig. 819 ist dieser Fall an oberster Stelle gezeichnet), jeder der sieben ersten Partialtöne des höheren Tones mit einem solchen des tieferen zusammenfällt. (Man hat sich das untere Stäbchen bis zum 14. Partialton verlängert zu denken.) Die Oktave ist deshalb ein absolut konsonantes Intervall.

Ganz im Gegensatz dazu sehen wir, daß beim Intervall *c cis* (zu unterst gezeichnet) alle Partialtöne des einen Tones mit allen gleich bezifferten des anderen in den Abstand eines halben Tones zu stehen kommen, was eine besonders starke Dissonanz geben muß.

Betrachten wir die Stellung für das Intervall *cg* (Quinte), so sehen wir zunächst den ersten Partialton des höheren Tones so weit abstehend vom zweiten des tieferen und diesen wiederum so weit abstehend vom zweiten des höheren, daß hieraus keine störenden Schwebungen entstehen können. Der zweite oben und der dritte unten fallen ganz zusammen, ebenso der vierte oben mit dem sechsten unten. Nur der dritte oben steht mit dem

vierten und fünften unten im Ganztonintervall. Dasselbe gibt aber überhaupt weniger Dissonanz als das Halbtonintervall, und außerdem haben diese Partialtöne nur mehr geringe Intensität. Die Quinte muß daher ebenfalls

Fig. 819.



eine ziemlich vollkommene Konsonanz geben, wenn auch nicht eine so vollständige wie die Oktave.

In dieser Weise fortschließend, führt uns das Schema der Fig. 819 zur Aufstellung nachfolgender Rangesordnung der Intervalle in bezug auf den Grad ihrer Konsonanz, wobei wir auch noch die Duodezime und Doppeloktave eingereiht haben (S. 760):

Die kleine Septime würde zwar für sich allein eher eine bessere Konsonanz geben als die kleine Sext, aber im Akkord verursacht sie lauter Dissonanzen und wird deshalb in der heutigen Musik nicht zu den Konsonanzen gerechnet.

1.	Oktave	Absolute Konsonanzen
2.	Duodezime	
3.	Doppeloktave	
4.	Quinte	Vollkommene Konsonanzen
5.	Quarte	
6.	Große Sext	Mittlere Konsonanzen
7.	Große Terz	
8.	Kleine Terz	Unvollkommene Konsonanzen
9.	Kleine Sext	
10.	Kleine Septime	
11.	Große Sekunde	Dissonanzen
12.	Kleine Sekunde	
13.	Große Septime	

Wie das Schema erkennen läßt, fallen gerade in die Nachbarschaft jener Töne, welche die beste Konsonanz geben, solche, welche die stärkste Dissonanz geben.

Außer den Obertönen haben aber auch die Kombinationstöne Einfluß auf die Konsonanz. Wir müssen es uns aber versagen, dies hier näher auszuführen, und verweisen diesbezüglich auf v. Helmholtz' „Tonempfindungen", S. 325.

Ist diese Theorie der Konsonanz richtig, so dürfen einfache Töne, welche nicht so nahe aneinander stehen, daß sie Schwebungen geben, keine eigentlichen Dissonanzen hervorbringen. Dies ist nach v. Helmholtz auch der Fall; er fand, daß zwei gedeckte Orgelpfeifen, welche auf die große Terz gestimmt sind, allmählich bis zur kleinen Terz verstimmt werden können, ohne daß eine Störung des Wohlklanges eintritt. Daß König bei seinen Stimmgabelversuchen zu anderen Resultaten gekommen ist, haben wir oben (§ 246) mitgeteilt.

Mehrere Physiker[1]) haben darauf hingewiesen, daß nach obiger Theorie die Konsonanz nur auf negative Momente basiert sei und noch einer Vervollständigung bedürfe durch Aufsuchung des jedem Intervalle charakteristischen positiven Momentes[2]).

§ 250. Schwingungsform und Klangfarbe. Im § 200 haben wir auseinandergesetzt, daß die Töne, richtiger die Klänge, in dreierlei Weise voneinander verschieden sein können. Erstens durch verschiedene Tonhöhe, welche durch die Schwingungszahl des Grundtons bestimmt ist; zweitens durch die Tonstärke, welche von der Amplitude der Schwingungen abhängt, drittens durch die Klangfarbe. Was unter der letzteren zu verstehen ist, können wir uns folgendermaßen klar legen. Wenn wir nacheinander den Ton der Normalstimmgabel a^1 mit 435 einfachen Schwingungen, dann die Taste für a^1 auf dem Klavier anstimmen und dann etwa noch dieselbe Note singen oder auf einer Trompete erklingen lassen, wenn wir ferner diese

---

[1]) E. Mach, Zur Theorie des Gehörorgans. Wiener Akad. Ber. 1863. — A. v. Oettingen, Harmoniesystem in dualer Entwickelung, S. 30.

[2]) Vgl. auch: E. Mach, „Zur Analyse der Tonempfindungen". Wiener Akad. Ber. 92, 2. Abt. (1885).

sämtlichen Tonquellen in ihrer Stärke so modifizieren, daß keine die andere überwiegt, so sind wir dennoch sofort imstande, diese Klänge voneinander zu unterscheiden. Sie haben einen wesentlich verschiedenen Charakter oder, wie man zu sagen pflegt, eine verschiedene Klangfarbe. In der Optik werden wir zeigen, daß die Farben sich durch die Höhe der Schwingungszahlen des Lichtes unterscheiden. Demnach entspricht die Verschiedenheit der Farben der Verschiedenheit der Tonhöhe und erscheint deshalb die Bezeichnung Klangfarbe zur Charakteristik verschiedener gleich hoher Klänge nicht glücklich gewählt.

Was ist nun der physikalische Grund für die Verschiedenheit der Klangfarbe? Wir haben die Antwort darauf an mehreren Orten angedeutet. Es ist das Mitvorhandensein von Obertönen neben dem Grundton, wobei die Intensitäten dieser Obertöne in der mannigfaltigsten Weise auftreten können und demnach die Klangfarbe modifizieren. Wenn nämlich ein geübtes Ohr genau und aufmerksam einen Klang untersucht, welcher von einem tönenden Körper herrührt, dessen Oszillationen nicht dem Gesetze der Pendelschwingungen folgen, so ergibt sich die merkwürdige Tatsache, daß dasselbe außer dem Grundton noch eine Reihe von Obertönen dieses Grundtones mithört; kurz, das Ohr zerlegt einen solchen Klang in eine Reihe von Partialtönen, deren tiefster, nach dessen Tonhöhe wir die Tonhöhe des ganzen Klanges beurteilen, in der Regel auch der stärkste ist; oder mit anderen Worten: das menschliche Ohr empfindet nach einem zuerst von G. S. Ohm aufgestellten Satze nur eine pendelartige Schwingung der Luft als einfachen Ton, und es zerlegt jede andere periodische Luftbewegung in eine Reihe von pendelartigen Schwingungen, welche als eine Reihe einfacher Töne empfunden werden.

Da aber nun die Anwesenheit der Obertöne und ihre Intensität wesentlich von der Schwingungsform abhängt, so könnte man veranlaßt sein, direkt diese Schwingungsform als maßgebend für die Klangfarbe zu betrachten. Sicherlich wird dieselbe Schwingungsform immer dieselbe Klangfarbe zur Folge haben; ob aber auch umgekehrt dieselbe Klangfarbe immer durch dieselbe Schwingungsform entsteht, hängt davon ab, ob die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen der Obertöne einen Einfluß auf die Klangfarbe hat. Da das Ohr die zusammengesetzten Schwingungen in einzelne Schwingungen nach dem Pendelgesetz auflöst und gewissermaßen getrennt wahrnimmt, so ist es jedenfalls denkbar, daß die Phasendifferenz ohne Einfluß auf die wahrgenommene Klangfarbe ist.

Nach H. v. Helmholtz ist dies auch in Wirklichkeit so der Fall. Er schloß dies aus Versuchen mit seinem Vokalapparat, den wir weiter unten beschreiben werden.

Nach R. König[1]) dagegen wäre die Phasendifferenz ebenfalls von merklichem Einflusse. Um dies zu zeigen, konstruierte König eine Wellensirene mit mehreren den Obertönen entsprechenden Scheiben, welche so eingerichtet war, daß die relativen Intensitäten der Obertöne, sowie die Phasendifferenzen derselben, letztere um $^1/_4$, $^1/_2$ und $^3/_4$ geändert werden konnten. Eine andere Versuchsreihe wurde mit einer Wellensirene angestellt, deren Wellen selbst den zusammengesetzten Schwingungskurven glichen, wobei die den ver-

---

[1]) Bemerkungen über die Klangfarbe. Wiedem. Ann. 14, 374.

schiedenen Phasendifferenzen entsprechenden Kurven nebeneinander in bezug auf ihre Klangfarbe verglichen werden konnten. Indem wir in bezug auf die Ausführung dieser interessanten Experimente und der dazu gebrauchten sinnreichen Apparate auf die zitierte Originalabhandlung verweisen, führen wir hier das Resultat an, welches König aus seinen Versuchen gezogen hat. Er fand, daß die Komposition einer Anzahl harmonischer Töne, welche sowohl der geradzahligen als der ungeradzahligen Reihe angehören, ganz unabhängig von der relativen Intensität dieser Töne immer den stärksten und schärfsten Klang bei der Phasenkoinzidenz von $^1/_4$ ihrer Wellenlängen erzeuge, dagegen den schwächsten und sanftesten bei der Phasenkoinzidenz von $^3/_4$ ihrer Wellenlängen. Die Klänge bei den Phasendifferenzen 0 und $^1/_2$ stehen sowohl, was ihre Intensität als auch was ihre Schärfe anlangt, immer zwischen beiden.

Bei der Komposition von nur ungeradzahligen Obertönen erhält man bei den Phasendifferenzen $^1/_4$ und $^3/_4$ (wobei die Schwingungskurve gleiche Form hat) einen gleichen Klang, ebenso bei den Phasendifferenzen 0 und $^1/_2$, doch ist der Klang im letzteren Falle weniger stark und scharf als im ersten Falle.

Groß ist übrigens der Einfluß der Phasendifferenz auf keinen Fall. König vergleicht die dadurch hervorgerufenen Unterschiede mit dem Unterschiede im Klange verschiedener Instrumente gleicher Gattung oder mit dem Unterschied gleicher Vokale, welche von verschiedenen Stimmen gesungen werden.

Sollten sich die Königschen Versuche bestätigen und vor dem Einwande sicher sein, daß die angewendeten Töne selbst nicht frei von Obertönen waren, so würde daraus folgen, daß die ursprüngliche Ansicht die richtige sei, welcher gemäß die Klangfarbe von der Schwingungsform also nicht bloß von der Ordnungszahl und relativen Intensität der vorhandenen Obertöne, sondern auch von der Phasendifferenz abhängt[1]).

§ 251. Klanganalyse, Resonatoren. In seinem mehrfach zitierten Werke über die Lehre von den Tonempfindungen hat v. Helmholtz verschiedene Methoden beschrieben, mit Hilfe deren man die Klänge der meisten musikalischen Instrumente in ihre Partialtöne zerlegen oder, mit anderen Worten, mit Hilfe deren man die in einem musikalischen Klang enthaltenen Obertöne auch einem ungeübten Ohre wahrnehmbar machen kann.

Zunächst ist zu bemerken, daß man in der Regel den 3ten, den 5ten, den 7ten usw., also die ungeradzahligen Partialtöne, leichter hört als die geradzahligen, also leichter als den 2ten, den 4ten usw. So hört man die den Grundton c^0 begleitenden Partialtöne g^1 und e^2 leichter als c^1 und c^2.

Will man anfangen, Obertöne zu beobachten, so lasse man unmittelbar vor dem Klange, welcher analysiert werden soll, ganz schwach diejenige Note erklingen, welche man aufsuchen will. Sehr geeignet sind zu diesen Versuchen das Klavier und die Physharmonika, welche beide ziemlich starke Obertöne geben.

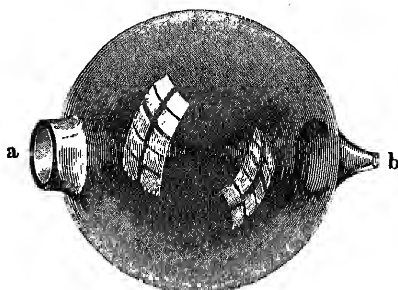
Man schlage z. B. auf einem Klavier zuerst g^1 an, und indem man die Taste verläßt, so daß deren Saiten nicht mehr fortklingen können, gleich darauf kräftig die Note c^0, so wird man den Ton g^1 noch aus dem Klange c^0

[1]) Es ist dies keine physikalische, sondern eine physiologische Frage, weshalb wir hier auf dieselbe nicht weiter eingehen. Man vergleiche die Untersuchungen von L. Hermann in Pflügers Archiv 56, 467, sowie die Bemerkungen am Schlusse des § 254.

heraushören, und zwar besonders während des Verklingens desselben. Ebenso, wenn man zuerst den fünften Partialton e^2 und dann c^0 anschlägt. Der 7te und 9te Partialton sind auf den Klavieren neuerer Konstruktion meist schwach oder gar nicht vorhanden.

Noch geeigneter als das eben beschriebene Verfahren am Klavier ist es, an irgend einem Saiteninstrumente, Klavier, Monochord oder Violine, den Ton, welchen man zu hören wünscht, erst als Flageoletton der Saite hervorzubringen, indem man sie anschlägt oder streicht, während man einen Knotenpunkt des entsprechenden Tones auf der Saite mit einem Finger oder mit den Haaren eines Malerpinsels berührt. Will man also den 3ten, den 5ten Partialton hören, so hat man einen Punkt zu berühren, welcher um $^1/_3$, um $^1/_5$ der Saitenlänge vom einen Ende der Saite entfernt ist. Indem man nun die Saite zum Tönen bringt, bald mit Berührung des Knotenpunktes, bald ohne solche Berührung, bekommt man bald den gesuchten Oberton allein als Flageoletton, bald die ganze Klangmasse der Saite zu hören und erkennt daran verhältnismäßig leicht, daß der betreffende Oberton darin enthalten ist.

Fig. 820.



Schwerer als an Saiteninstrumenten und an der Physharmonika sind die Obertöne der meisten Blasinstrumente und der menschlichen Stimme wahrzunehmen.

Das sicherste und bequemste Mittel, um die Wahrnehmung von Obertönen zu vermitteln, sind die von v. Helmholtz angegebenen Resonatoren (Mitklinger). Es sind dies gläserne oder messingene Hohlkugeln von der in Fig. 820 dargestellten Form. Die eine Öffnung a hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere ist trichterartig und so geformt, daß man sie in das Ohr einsetzen kann.

Die in einem solchen Resonator eingeschlossene Luftmasse wird wie die Luftsäule in einer einerseits offenen, andererseits geschlossenen Röhre (siehe § 212) nur dann in den Zustand kräftiger stehender Schwingungen versetzt, wenn durch die Öffnung a die Schallwellen eines bestimmten, den Dimensionen der Kugel entsprechenden Tones einfallen, den wir den Eigenton der Kugel nennen wollen. In der folgenden Tabelle sind die Dimensionen solcher Kugeln angegeben, welche den in der ersten Vertikalreihe angegebenen Eigentönen entsprechen.

Tonhöhe	Durchmesser der Kugel mm	Durchmesser der Öffnung mm	Volumen des Hohlraumes ccm
g^0	154	35,5	1773
c^1	130	30,2	1053
e^1	115	30,0	546
g^1	79	18,5	235
c^2	70	20,5	162

Eine Verengung der Öffnung a hat eine Vertiefung des Eigentones des Resonators zur Folge.

Nach H. v. Helmholtz ergibt sich für die Tonhöhe eines Resonators, wenn dessen Öffnung verhältnismäßig eng ist, die theoretische Formel:

$$n = \frac{C\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt[4]{\pi^3}\,\sqrt{2V}},$$

worin C die Schallgeschwindigkeit, σ die Fläche der kreisförmigen Öffnung und V das Volum des Hohlraumes beträgt.

Setzt man C für mittlere Temperatur = 340 m, so erhält man:

$$n = 57484\sqrt[4]{\frac{\sigma}{V^2}}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{sec}}.$$

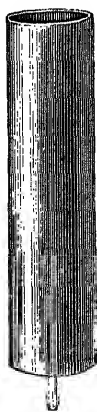
Nach Versuchen von Sondhauß paßt für Kugeln mit nicht ganz kleinen Öffnungen besser dieselbe Formel mit dem Koeffizienten 52400.

Beträgt der Durchmesser der Öffnung zwischen $^1/_4$ und $^1/_5$ vom Durchmesser der Kugel, so ist nach v. Helmholtz' Versuchen jener Koeffizient = 47000 zu setzen.

Die Resonatoren mit enger Öffnung geben eine bedeutendere Verstärkung des Tones, erfordern aber auch eine genauere Übereinstimmung mit der Tonhöhe des zu hörenden Tones.

Weil die aus Glas oder Messingblech verfertigten kugelförmigen Resonatoren, Fig. 820, ziemlich kostspielig sind, hat Schubring mit Erfolg versucht, solche aus zylindrischen Pappröhren ungefähr von der Form Fig. 821 herzustellen, welche noch den Vorteil bieten, daß sich nach § 212 ihr Eigenton sehr einfach berechnen läßt, da die Länge der gedeckten Röhre nahezu $^1/_4$ von der Wellenlänge ihres Eigentones ist. In den Boden, welcher die untere Öffnung der Röhre verschließt, ist ein Glasröhrchen eingesetzt, welches in den Gehörgang des einen Ohres gesteckt wird, während man das andere zuhält. Das Röhrchen kann aber auch ganz wegbleiben, so daß man nur den Boden des Rohres mit seiner zentralen Öffnung auf die Ohrmuschel aufdrückt.

Fig. 821.



Für alle Töne von c^1 aufwärts sind die Röhren oben offen. Der Resonator für c^1 (256 Schwingungen in 1 Sekunde) ist 33 cm lang und 6 cm weit, der für g^1 ist 22 cm lang und 4,6 cm weit usw. Für tiefere Töne würden die zylindrischen Resonatoren unbequemere Dimensionen annehmen, wenn sie oben offen blieben; sie werden kürzer, wenn man sie durch einen Deckel mit zentraler Öffnung schließt. Der Resonator für c^0 (128 Schwingungen) ist 38,5 cm lang und 14 cm weit, während im Deckel, der ihn oben schließt, eine zentrale Öffnung von 4,5 cm Durchmesser angebracht ist.

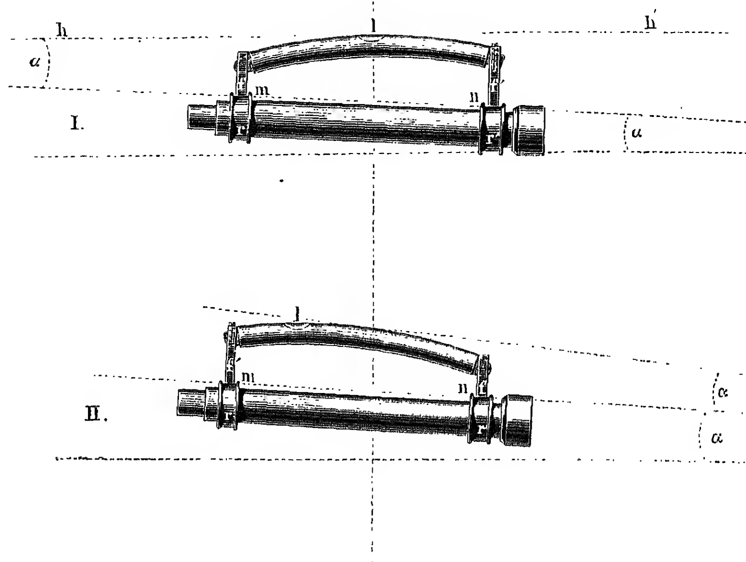
Diese zylindrischen Resonatoren können auch von veränderlicher Stimmung angefertigt werden, indem man zwei Röhren ineinander verschiebbar macht.

Appun in Hanau verfertigt kegelförmige Resonatoren von Zinkblech, dieselben sind für die meisten Verwendungen brauchbar. Sie verstarken aber auch alle harmonischen Obertöne ihres Grundtones.

Schraube o so weit, daß die Libelle wieder einspielt, und macht dann diese Drehung um die Hälfte wieder rückgängig, so steht die Fernrohrachse horizontal. Es ist dann an der Libelle mittels des Adjustierschräubchens bei f' die andere Hälfte des Fehlers zu korrigieren. Dieses Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis eine Umsetzung der Libelle ihren Stand nicht mehr ändert, dann ist sowohl die Libelle richtig adjustiert, als auch die Verbindungslinie der Ringoberflächen, sowie die damit parallelen Richtungen der mechanischen Achse und der Visierlinie horizontal gestellt.

Im zweiten Falle, wenn, wie in Fig. 61, die Libelle L mit den Trägern des Fernrohrs fest verbunden ist, bringt man dieselbe durch Drehung der

Fig. 62.



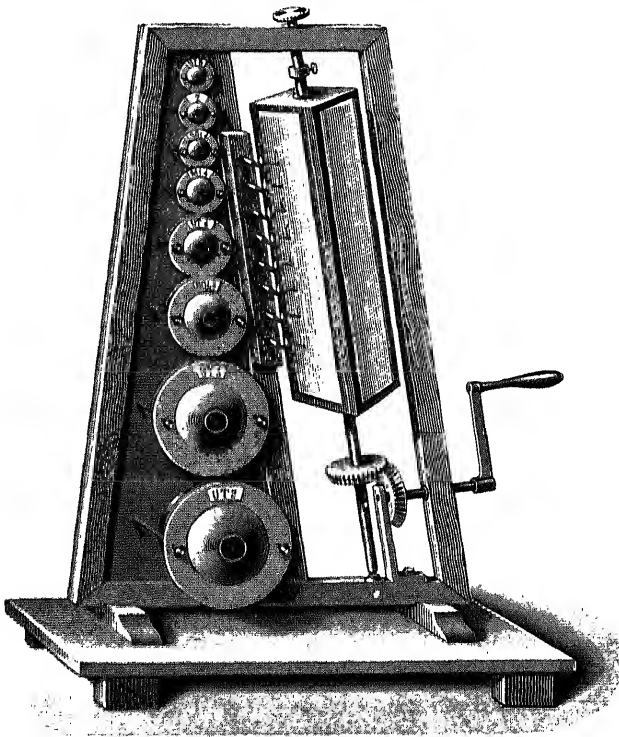
Schraube o zum Einspielen, visiert durch das Fernrohr auf eine weiße Wand und merkt sich dort einen scharfen Punkt, der genau im Durchkreuzungspunkte der Fäden erscheint, also in der mechanischen und optischen Achse liegt. Dann hebt man das Fernrohr aus seinen Lagern, dreht das Instrument um die vertikale Achse um 180°, legt das Fernrohr in der ursprünglichen Lage gegenüber der Wand wieder ein und visiert auf den früheren Punkt, indem man, wenn es nötig ist, mit der Schraube o dreht.

Zeigt dann die Libelle wiederum den früheren horizontalen Stand, so sind Fernrohr und Libelle richtig gestellt. Zeigt jedoch die Libelle eine Abweichung, so korrigiert und mißt man dieselbe mittels der Schraube o und macht dann die Korrektion zur Hälfte rückgängig. Die andere Hälfte korrigiert man durch das Adjustierschräubchen der Libelle selbst. Dieses Verfahren ist zu wiederholen, bis sich keine Abweichung mehr zeigt, dann sind Libelle und Fernrohrachse parallel, also letztere horizontal, wenn erstere einspielt.

Hat man sich das eine Ohr verstopft und setzt man dann an das andere einen solchen Resonator, so hört man die meisten Töne, welche in der Umgebung hervorgebracht werden, viel gedämpfter als sonst; wird dagegen der Eigenton des Resonators angegeben, so schmettert er mit gewaltiger Stärke ins Ohr hinein. Hält man z. B. einen Resonator vor das Ohr, dessen Eigenton g^1 ist, so hört man denselben sehr deutlich, wenn c^0 auf dem Klavier angeschlagen oder auf der Violine gespielt wird, während man diesen Ton gar nicht oder doch nur sehr schwach hört, wenn das c^0 von einer weiten gedeckten Orgelpfeife herrührt. Ebensowenig hört man, den entsprechenden Resonator ans Ohr haltend, den Ton g^1, wenn auf dem Klavier der Ton d^0 angeschlagen wird, weil g^1 kein Oberton von d^0 ist.

Zum Nachweis der Obertöne ist kein musikalisches Instrument geeigneter als eine Zungenpfeife. Eine solche vom Grundton c^0, welche, in einem

Fig. 822.



Kästchen eingeschlossen mit einem Schallbecher versehen, auf eine Windlade aufgesetzt ist, gibt einen ungemein kräftigen, an Obertönen reichen Klang, dessen Teiltöne sich mit den entsprechenden Resonatoren leicht bis zum 16ten und 20sten wahrnehmen lassen.

Ein Apparat, bei welchem die Obertöne nicht mittels des Gehörs, sondern durch das Gesicht wahrgenommen werden können, ist von R. König mit Hilfe der manometrischen Flammen konstruiert worden[1]). Derselbe besteht,

[1]) Die manometrische Kapsel wurde von König 1864 erfunden. Ann. der Physik 146, 161.

wie Fig. 822 zeigt, aus einer Reihe von Resonatoren, deren jeder mit einer manometrischen Kapsel in Verbindung steht.

Sämtliche manometrische Flammen werden durch ein und denselben rotierenden Spiegel beobachtet. Trifft ein Klang, z. B. eines Vokals, die Resonatoren, so wird der Lichtstreif derjenigen Flammen, deren Resonatoren ihren Eigenton in dem Tongemische finden, vom rotierenden Spiegel in einzelne Flammenbilder aufgelöst. Man hat mehrfach versucht, dieses Experiment dahin zu vereinfachen, daß man nur eine einzige manometrische Kapsel mit einer Flamme der Wirkung des Klanges aussetzte. Wirklich

Fig. 823.

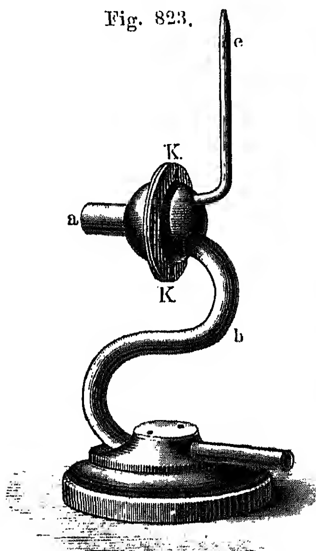
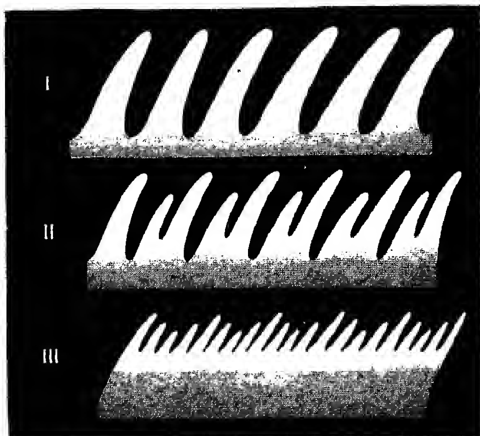


Fig. 824.



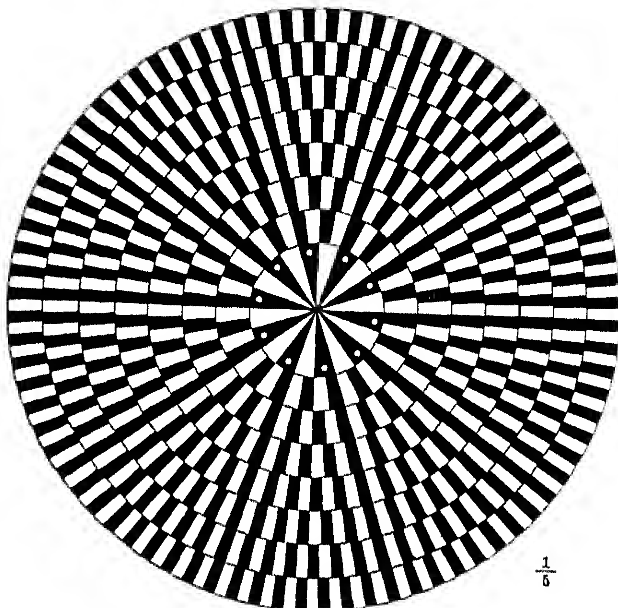
zeigen die erhaltenen Flammenbilder die Zusammensetzung aus den Flammenbildern der Partialtöne, doch ist es noch nicht gelungen, dem Experiment die wünschenswerte Präzision zu geben. Fig. 823 zeigt einen hierzu geeigneten Apparat.

Die Kapsel K ist durch ein dünnes Glimmerblatt (welches einer tierischen Membran wegen der Unveränderlichkeit vorzuziehen ist) in zwei Kammern geteilt, deren eine mit der Gasleitung b und der Ausströmungsspitze c, die andere mit dem Schallzuleitungsrohr a kommuniziert. Letzteres wird mit einem Trichter (Schallbecher) versehen. Die Einschaltung eines Kautschukrohres zwischen a und dem Trichter empfiehlt sich nicht wegen der zu starken Dämpfung des Schalles. Zündet man das bei c ausströmende Gas an und beobachtet die Flamme in einem rotierenden Spiegel, während die Schallwellen eines einfachen Tones durch a eintreten, so erhält man Flammenbilder von der in Fig. 824 I abgebildeten Form; ist der Grundton von seiner Oktave begleitet, so erhält man die Form Fig. 824 II, sind mehrere Obertöne vorhanden, Fig. 824 III. Störend ist bei dieser Methode, daß die Membran sowohl als der Hohlraum vor derselben, ja auch der Schallbecher ihre besonderen Eigentöne haben, welche sie verstärken. Es muß daher jeder solcher Apparat einen speziellen Einfluß auf die erhaltenen Flammenbilder ausüben. Wir kommen auf diese Bilder bei der Vokalanalyse zurück.

Die Verbindung des v. Helmholtzschen Resonators mit der Königschen manometrischen Kapsel leidet an dem Übelstande zu geringer Empfindlichkeit. O. Lummer[1]) hat eine empfindliche objektive Klanganalyse auf die Kombination des Resonators mit einer Kautschukmembran und einem Mikrophon gegründet. Ist die Membran genau auf den Resonator abgestimmt, so gelingt es mittels dieser Anordnung, die objektive Existenz der Summationstöne eines Harmoniums nachzuweisen. Dabei ist es sehr vorteilhaft, daß das mit dem Mikrophon verbundene Telephon in einem anderen Raume sich befinden kann, wo man durch das direkte Hören des Grundtones nicht gestört wird.

In sehr schöner Weise läßt sich die Klanganalyse mit Hilfe der manometrischen Kapsel in Verbindung mit einer stroboskopischen Scheibe nach A. Samojloff[2]) ausführen. Diese Scheibe, Fig. 825, ist aus einem Karton

Fig. 825.



von 40 cm Durchmesser geschnitten und enthält acht konzentrische Ringe bestehend aus abwechselnd schwarzen und weißen Feldern, deren Zahl von der Mitte nach dem Umfange im Verhältnis der Partialtöne 1, 2, 3 ... stehen. Der innerste Ring besitzt 10 schwarze und 10 weiße Felder, der äußerste je 80. In die innerste Reihe der schwarzen Felder ist überdies je ein Loch geschnitten, so daß die Scheibe auch als Lochsirene benutzt werden kann.

Die Beleuchtung der Scheibe geschieht mittels der Flamme des Apparates Fig. 823, jedoch unter Anwendung von Acetylengas statt des gewöhnlichen Leuchtgases, welches letztere zu geringe Lichtstärke hat und den Unterschied

[1]) Verhandlungen der phys. Ges. zu Berlin 1886, S. 66.

[2]) Zwei akustische Demonstrationen: Zeitschrift f. Psychologie u. Physiologie der Sinnesorgane 36, 440.

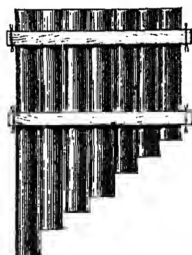
der Helligkeit beim Steigen und Sinken der Flamme weniger deutlich hervortreten läßt[1]).

Man läßt die Scheibe, am besten mittels eines Elektromotors, in gleichmäßige Rotation gelangen und erzeugt durch Anblasen der Lochreihe einen Ton. Dann erzeugt man vor dem Trichter der manometrischen Kapsel einen Klang von derselben Höhe, z. B. die Reihe der Vokale. Jene Ringfelder, welche einem in dem Klange enthaltenen Obertone entsprechen, scheinen dann stillzustehen, während die übrigen eine graue Mischfarbe zeigen. Dieser einfache Apparat ersetzt den kostspieligen von König, Fig. 822, und eignet sich für ein großes Auditorium.

§ 252. Die musikalischen Instrumente und ihre Klangfarbe. Die Methoden der Klanganalyse können auf die verschiedenen musikalischen Instrumente angewendet werden, welche in zwei Hauptabteilungen zerfallen, 1. solche, bei welchen der Ton durch einen Luftstrom erzeugt wird, die Blasinstrumente, und 2. solche, bei welchen der Ton von den Vibrationen eines festen Körpers herrührt.

Die Blasinstrumente selbst zerfallen wieder in zwei Klassen. In die erste Klasse der Blasinstrumente gehören solche röhrenförmige Vorrichtungen, in welchen die eingeschlossene Luftsäule ganz nach den Gesetzen vibriert, welche wir in § 212 und 214 kennen lernten, also die offenen und gedeckten Orgelpfeifen, das Flageolett und die Flöte. Auch die Rohrpfeife, die Syrinx oder Pansflöte der Alten, Fig. 826, gehört in diese Klasse.

Fig. 826.



Während bei der Orgel jeder Pfeife nur ein Grundton entspricht, wird bei der Flöte mit demselben Rohr die ganze Tonreihe der chromatischen Tonleiter dadurch erzeugt, daß man durch Öffnen der entsprechenden Seitenlöcher die Länge der tönenden Luftsäule und die Lage der Schwingungsknoten verändert. Von den Blasinstrumenten, welche mit Zungenwerken versehen sind, haben wir bereits einige in § 236 kennen gelernt, nämlich die Mundharmonika, die Blasbalgharmonika (Physharmonika) und die Zungenwerke der Orgeln.

Die beiden erstgenannten Instrumente haben gar kein Ansatzrohr, während der Schallbecher oder das Ansatzrohr der Orgelzungenwerke nur den Zweck hat, den Ton zu verstärken, ohne daß dadurch die Vibrationsgeschwindigkeit der Zunge wesentlich alteriert wird.

Ganz anders verhält es sich mit solchen Instrumenten, deren Zunge aus sehr leicht beweglichem Material (meist aus dünnen Blättchen von italienischem Rohr) gebildet, sich den Schwingungen der Luftsäule akkommodiert, welche in dem Ansatzrohr zum Tönen gebracht wird. Hierher gehört die Oboe, das Fagott, die Klarinette usw. Das Mundstück der Klarinette wird durch ein vorn schneidenförmig verdünntes, aufschlagendes Rohrblatt gebildet, während das Mundstück des Fagotts und der Oboe aus zwei Rohrblättchen besteht, deren obere schwach gewölbte Enden eine feine Spalte bilden.

[1]) Acetylengas kann man sich leicht in einem Kippschen Entwickler aus Calciumcarbid und Wasser erzeugen und in einem kleineren Glasgasometer ansammeln.

Bei der Posaune, dem Horn und der Trompete treten die Lippen des Musikers an die Stelle der beiden Rohrblätter des Oboemundstücks. Das kessel- oder trichterförmige Mundstück des Instrumentes wird so gegen den Mund gepreßt, daß die vorderen häutigen Teile der Lippen nur noch einen engen Spalt für den Durchgang der Luft lassen. Die Ränder der Lippen geraten beim Anblasen selbst in Oszillationen, durch welche ein stoßweises Hervorquellen der Anblaseluft bewirkt wird.

Das mehr oder weniger gebogene oder gewundene Rohr dieser Instrumente ist, den Schallbecher abgerechnet, sehr eng im Verhältnis zu seiner Länge, so daß es nie seinen Grundton, sondern nur eine Reihe von Obertönen desselben geben kann.

Bezeichnen wir die Schwingungszahl des Grundtones mit 1, so sind die Schwingungszahlen für seine Obertöne

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \text{ usw.}$$

Für ein dreifüßiges offenes Rohr ist der Grundton b^{-1}, seine Obertöne sind also

$$b^0,\ f^1,\ b^1,\ d^2,\ f^2,\ gis^2,\ b^2,\ c^3,\ d^3.$$

Eine dreifüßige Trompete gibt aber als ihren tiefsten Ton f^1, also den zweiten Oberton, die Duodezime des ihrer Länge entsprechenden Grundtones. Auf diesen Ton folgen dann bei unveränderter Länge des Rohres, bei entsprechend verstärktem Anblasen, die weiteren Töne b^1, d^2, f^2 usw., welche den Namen der Naturtöne führen. Erst vom achten Oberton an befolgen dieselben die Tonreihe der diatonischen Tonleiter. Um die größeren Intervalle der tieferen Naturtöne auszufüllen und auch für diese tieferen Tonlagen die nötigen Zwischentöne zu erhalten, hat man an diesen Instrumenten verschiedene Vorrichtungen (Züge, Klappen usw.) angebracht, durch welche man die Länge des Rohres entsprechend abändern kann. Auch durch teilweises Verschließen der erweiterten Mündung durch Einführen der Faust sucht man die gewünschte Erniedrigung der Tonhöhe zu erreichen.

Die Töne gespannter Saiten finden in der Musik eine ebenso vielfache als mannigfache Anwendung. Die Oberfläche der Saiten ist aber viel zu gering, als daß sie selbst bei den lebhaftesten Vibrationen kräftige Schallwellen in der Luft erzeugen könnten, es ist deshalb nötig, die Vibrationen der Saite auf einen leicht beweglichen festen Körper von größerer Oberfläche zu übertragen, weshalb denn auch der Resonanzboden, wenn auch in sehr verschiedener Gestalt, bei allen Saiteninstrumenten in Anwendung gebracht wird.

Die wesentlichsten Unterschiede unter den Saiteninstrumenten sind durch die Art und Weise bedingt, wie die Saiten in Oszillationen versetzt werden; bei dem Klavier geschieht dies durch Anschlag, bei der Guitarre und der Harfe durch Zupfen, bei der Violine, dem Violoncello und der Baßgeige geschieht es durch Streichen mit dem Fiedelbogen, weshalb diese letzteren Instrumente auch Streichinstrumente genannt werden.

Metallene Platten und Glocken haben für sich selbst schon eine hinlängliche Oberfläche, um kräftige Schallwellen in der Luft zu erzeugen. Als selbständige musikalische Instrumente werden sie aber kaum gebraucht, während sie im Orchester verbunden mit anderen Instrumenten von trefflicher Wirkung sind.

Über die Zusammensetzung der Klänge der verschiedenen Instrumente ist das Wissenswerteste folgendes:

Einfache Töne, also Klänge ohne Obertöne, werden am einfachsten hervorgebracht, wenn man eine angeschlagene Stimmgabel vor die Mündung einer Resonanzröhre von entsprechender Länge hält. Diese Töne sind ungemein weich und frei von allem Scharfen und Rauhen.

Die Klänge der Flöte stehen den einfachen Tönen ziemlich nahe, indem sie nur wenige und schwache Obertöne haben.

Weite gedeckte Pfeifen geben, namentlich wenn sie schwach angeblasen werden, den Grundton fast ganz rein; engere lassen neben dem Grundton auch noch die Duodezime (Quint der Oktav) hören, weshalb sie auch Quintaten genannt werden.

Bei weiten, offenen Orgelpfeifen ist die Oktav des Grundtones noch ziemlich deutlich, die Duodezime schon sehr schwach. Engere offene Pfeifen der Orgel lassen dagegen, namentlich wenn sie stark angeblasen werden, eine Reihe von Obertönen hören, welche den Grundton kräftig begleiten, was dem Klange den schärferen geigenähnlichen Charakter gibt (Geigenprinzipal).

Die weiteren Orgelpfeifen, welche auch bei stärkerem Anblasen nicht in einen Oberton überspringen, und welche den Grundton voll und rein geben, werden Prinzipalstimmen genannt.

Wo es darauf ankommt, ein Register von scharf durchdringender Klangfarbe anzuwenden, wie es z. B. nötig ist, um den Gesang der Gemeinde zu begleiten, genügen die Prinzipalregister nicht, weil ihr Ton zu mild, zu arm an Obertönen ist. Geigenregister und Quintaten genügen nicht, weil ihr Ton zwar schärfer, aber auch schwächer ist. Bei solchen Gelegenheiten wird das Mixturregister angewandt, in welchem jede Taste mit mehreren Pfeifen verbunden ist, die sie gleichzeitig öffnet, von denen die eine den Grundton, die anderen aber die ersten Obertöne desselben (meist Oktav und Duodezime) geben. — Die Klänge der meisten musikalischen Instrumente hat man sich nun in ähnlicher Weise zusammengesetzt zu denken.

Über die Klänge der Saiten wurde bereits im § 231 und 243 Näheres mitgeteilt. Bei gut konstruierten Klavieren sind die Partialtöne bis zum 6ten sehr kräftig, während der 7te und 9te, deren Mitklingen die Harmonie der übrigen beeinträchtigen würde, ganz fehlen oder doch sehr schwach sind.

Solche Saiten, welche im Verhältnis zu ihrer Länge sehr dünn sind, geben, in entsprechender Weise angeschlagen, leicht viele hohe Obertöne. Diese vielen hohen Obertöne aber, welche einander in der Skala sehr nahe liegen, veranlassen ein eigentümlich unharmonisches Geräusch, welches wir mit dem Worte Klimpern zu bezeichnen pflegen.

Im Klange der Streichinstrumente ist der Grundton verhältnismäßig kräftiger als beim Klavier; die ersten Obertöne sind schwächer, die höheren aber vom 6ten bis zum 10ten dagegen viel deutlicher und verursachen die Schärfe des Klanges der Streichinstrumente.

Geschlagene Metallstäbe und Metallplatten der Art, wie wir sie im § 232 betrachtet haben, lassen neben dem Grundton eine Reihe sehr hoher unharmonischer Obertöne anhaltend und im gleichmäßigen Flusse mitklingen, und davon scheint die Eigentümlichkeit herzurühren, welche man als metallische Klangfarbe, als Metallklang bezeichnet.

Der Klang der Glocken ist ebenfalls von unharmonischen Obertönen begleitet, welche aber nicht so nahe beisammen liegen wie bei den ebenen Platten.

Wenn eine Glocke nicht ganz symmetrisch in Beziehung auf ihre Achse ist, wenn z. B. die Wand an einer Stelle des Umfanges etwas dicker ist als an anderen, so gibt die Glocke beim Anschlag im allgemeinen zwei wenig voneinander verschiedene Töne, welche miteinander Schwebungen geben.

Außer den Unterschieden der Klangfarbe bieten aber die Klänge verschiedener Instrumente auch noch andere Eigentümlichkeiten, welche einerseits davon abhängen, wie die Töne ansetzen, verlaufen und aufhören, andererseits aber auch durch Geräusche bedingt sind, welche mit der Erzeugungsweise der Töne zusammenhängen. So hört man bei den durch einen Luftstrom unterhaltenen Klängen der Blasinstrumente meisteuteils noch ein Sausen und Zischen der Luft, die sich an den scharfen Rändern der Anblaseöffnung bricht. Bei den mit dem Violinbogen gestrichenen Saiten hört man ziemlich viel Reibegeräusch usw.

Was die Klangfarbe der Zungenpfeifen anlangt, so ist das Ansatzrohr von wesentlichem Einfluß auf dieselbe. Freie Zungen, d. h. solche, welche ohne Ansatzrohr angeblasen werden, haben, da sie die Luftstöße sehr abgerissen, diskontinuierlich hervortreten lassen, einen scharfen, schneidenden, knarrenden Klang, und man hört in der Tat mit bewaffnetem oder unbewaffnetem Ohre eine lange Reihe von Obertönen bis zum 16ten, ja selbst bis zum 20sten. Die Stärke der Obertöne, welche eine Zunge ohne Ansatzrohr gibt, hängt aber ab von ihrer Beschaffenheit, ihrer Stellung zum Rahmen usw.

Durch Ansatzröhren wird der Klang der Zungen wesentlich verändert, indem diejenigen Obertöne außerordentlich verstärkt werden und aus der Klangmasse vortreten, welche den Eigentönen des Ansatzrohres entsprechen.

Als z. B. v. Helmholtz über eine Messingzunge, wie sie in Orgeln gebraucht werden, und welche b^0 gab, eine seiner größeren Resonanzkugeln als Ansatzrohr aufsetzte, welche gleichfalls auf b^0 abgestimmt war, erhielt er bei starkem Druck im Blasebalg einen vollen, starken und weichen Klang, dem fast alle Obertöne fehlten.

Als wesentlichste Resultate der Untersuchungen über Klangfarbe stellt v. Helmholtz folgendes zusammen:

1. Einfache Töne, wie Stimmgabeln mit Resonanzröhren, und weite gedeckte Pfeifen klingen weich und angenehm ohne alle Rauhigkeit, aber unkräftig und in der Tiefe dumpf.

2. Klänge, welche von einer Reihe niederer Partialtöne, etwa bis zum 6ten hinauf, in mäßiger Stärke begleitet sind, sind klangvoller, musikalischer. Sie haben, mit den einfachen Tönen verglichen, etwas Reicheres und Prächtigeres. Hierher gehören die Klänge des Klaviers, der offenen Orgelpfeifen usw.

3. Wenn nur ungeradzahlige Partialtöne da sind, wie bei engen gedeckten Pfeifen, den in der Mitte geschlagenen Klaviersaiten, den Klarinetten usw., so bekommt der Klang einen hohlen, und bei größerer Zahl von Obertönen einen näselnden Charakter.

4. Wenn die höheren Obertöne jenseits des 6ten und 7ten sehr deutlich sind, so wird der Klang scharf und rauh. Bei geringerer Stärke beeinträchtigen die hohen Obertöne die musikalische Brauchbarkeit nicht, sie sind

im Gegenteil günstig für den Charakter und die Ausdrucksfähigkeit der Musik. Von der Art sind die Klänge der Streichinstrumente, die meisten Zungenpfeifen, die Physharmonika usw. Solche Klänge, bei welchen die hohen Obertöne ganz besonders stark sind, wie bei den Blechinstrumenten, erhalten dadurch etwas ungemein Durchdringendes.

§ 253. Das menschliche Stimmorgan. Das Stimmorgan ist aus mehreren Teilen zusammengesetzt, welche ohne anatomische Betrachtung nicht vollständig studiert werden können, wir müssen uns daher hier darauf beschränken, im allgemeinen die Anordnung der Teile kennen zu lernen, welche am direktesten zur Hervorbringung der Stimme mitwirken.

Es ist bekannt, daß die Luftröhre eine Röhre ist, welche auf der einen Seite mit dem Schlunde, auf der anderen in den Lungen endigt. Ihre wesentlichste Funktion ist, die Luft durchzulassen, sei es nun beim Ein- oder beim Ausatmen; sie ist fast zylindrisch und aus knorpeligen Ringen zusammengesetzt, welche durch biegsame häutige Ringe verbunden sind. Am unteren Ende teilt sie sich in zwei Röhren, die Bronchien, von denen die eine rechts, die andere links geht. Jeder dieser Äste verzweigt sich weiter nach allen Seiten hin in das Gewebe der Lunge. Das obere Ende der Luftröhre wird durch den Kehlkopf gebildet, welcher vorzugsweise das Stimmorgan ist.

Der Kehlkopf besteht aus vier Knorpeln, welche häufig in späterem Alter verknöchern, nämlich dem Ringknorpel (Cartilago cricoidea), dem Schildknorpel (Cartilago thyreoidea) und den beiden Gießkannenknorpeln (Cartilagines arytaenoideae). Diese Knorpel sind unter sich und mit dem obersten Ringe der Luftröhre verbunden und können durch verschiedene Muskeln auf das mannigfaltigste bewegt werden. Die innere Wand des Kehlkopfes bildet eine Verlängerung der Luftröhre, die immer enger wird, bis zuletzt nur eine von vorn nach hinten gerichtete Spalte, die Stimmritze (Glottis), übrig bleibt. Die Ränder dieser Stimmritze sind durch die Stimmbänder gebildet. Nach vorn hin sind diese Stimmbänder an den Schildknorpel, am entgegengesetzten Ende aber ist das eine Stimmband an dem einen, das andere Stimmband an dem anderen Gießkannenknorpel angewachsen, so daß, je nachdem die Knorpel durch die entsprechenden Muskeln mehr genähert oder entfernt werden, die Stimmbänder mehr oder weniger gespannt sind und die Stimmritze weiter oder enger wird. Die Stimmbänder selbst bestehen aus einem sehr elastischen Gewebe.

Über den Lippen der Stimmritze befinden sich zwei sackartige Höhlungen, die eine auf der rechten, die andere auf der linken Seite, welche sich 17 bis 20 mm weit seitwärts erstrecken; es sind dies die Ventriculi Morgagni. Die oberen Ränder dieser Ventrikeln bilden gleichsam eine zweite Stimmritze, welche 11 bis 13 mm über der anderen liegt. Die obere Stimmritze kann durch den Kehldeckel (Epiglottis), welcher eine fast dreieckige Platte mit knorpeliger Grundlage ist, verdeckt werden; dieser Kehldeckel ist mit der einen Seite nach vorn hin angewachsen und verhindert, wenn er beim Schlucken sich über den Kehlkopfeingang legt, daß Speisen und Getränke in die Luftröhre geraten können, indem diese über den Kehldeckel hinweg in den Schlund gelangen.

Der Bau des Kehlkopfes wird durch die Figuren 827 und 828 deutlicher werden.

Fig. 827 stellt die vordere Hälfte des durch einen senkrechten Schnitt geteilten Kehlkopfes, und zwar von rückwärts gesehen, dar.

Fig. 827.

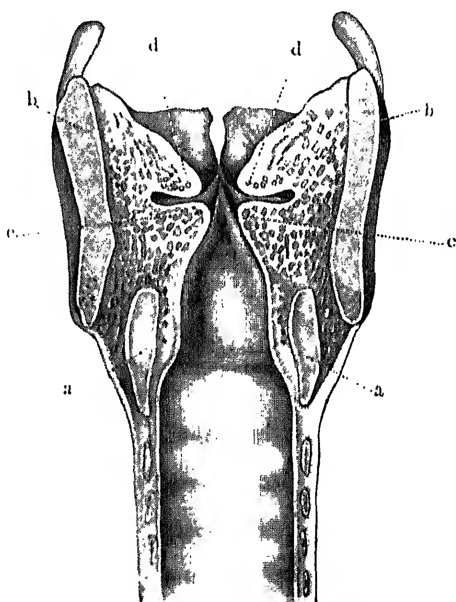


Fig. 828.

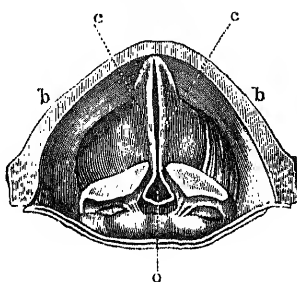
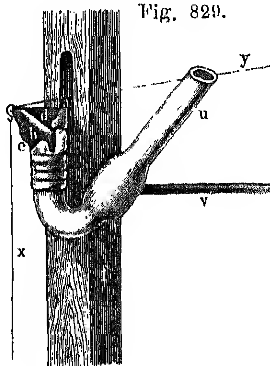


Fig. 829.



Es ist:

a der Durchschnitt durch den Ringknorpel,
b der Durchschnitt durch den Schildknorpel,
c der Durchschnitt durch die unteren Stimmbänder,
d der Durchschnitt durch die oberen Stimmbänder.

Zwischen den unteren und oberen Stimmbändern sieht man in Fig. 827 deutlich die Ventriculi Morgagni. Ferner ersieht man aus dieser Figur, wie sich die Luftröhre gegen die unteren Stimmbänder hin verengt. Fig. 828 zeigt die Stimmritze von oben gesehen.

Schon Ferrein[1]) hat durch treffliche Versuche, die auch von anderen bestätigt wurden, gezeigt, daß die Stimmbänder in gewisser Beziehung mit gespannten Saiten zu vergleichen seien; Biot und Cagniard de la Tour ersetzten die Stimmbänder durch elastische Membranen von Kautschuk, die sie über eine Röhre spannten; doch reichten diese Versuche noch nicht hin, um eine vollkommene Parallele zwischen diesen Zungenwerken und dem Stimmorgan zu begründen. Erst Johannes Müller hat es durch seine klassischen Untersuchungen über diesen Gegenstand[2]) außer Zweifel gesetzt,

---

[1]) Mém. de l'acad. des sciences 1741.

[2]) Handbuch der Physiologie des Menschen, zweiten Bandes erste Abteilung; und: Über die Kompensation der physischen Kräfte am menschlichen Stimmorgan.

daß die Bildung von Tönen im Kehlkopfe der in membranösen Zung ganz analog ist, welche wir bereits in § 237 kennen lernten.

Sowohl Beobachtungen an lebenden Menschen und Tieren, Versuche an ausgeschnittenen Kehlköpfen menschlicher Leichen zei die Töne in der Stimmritze und weder über noch unter ihr gebildet Befindet sich eine Öffnung in der Luftröhre (also unter der Stimm hört die Stimme auf, sie kehrt aber wieder, sobald diese Öffnung ver wird; hingegen bringt eine Öffnung in den Luftwegen oberhalb de ritze eine solche Wirkung nicht hervor.

Die entscheidendsten Versuche stellte Müller mit ausgeschnitte köpfen an, die er auf eine passende Weise auf einem Brettchen b Fig. 829 stellt einen solchen Kehlkopf von der Seite gesehen dar. *a* der Cartilagines arytaenoideae (der andere liegt hinter dem gezeichnet der untere Teil des Schildknorpels, *d* die innere Haut des Kehlkopfe den Stimmbändern endigt, welche zwischen den Knorpeln *a* und gespannt sind. Der obere Teil des Schildknorpels bis zu der Stelle Stimmbänder angewachsen sind, die Ventriculi Morgagni, die oberen bänder und der Kehldeckel sind weggeschnitten, damit man die Rä Stimmritze besser sehen kann.

Um den Kehlkopf gehörig zu befestigen, wird er mit seiner Wand auf das Brettchen gelegt und der Ringknorpel darauf festge um die Cartilagines arytaenoideae zu befestigen, wird ein Pfrien durch dieselben gesteckt, so daß sie nebeneinander auf demselben fix und man sie nach Belieben voneinander entfernen oder dicht zusamme kann; der Pfriemen selbst wird alsdann durch Schnüre ebenfalls Brettchen unbeweglich angezogen. Ist nun auf diese Art die hinte des Kehlkopfes befestigt, so läßt sich den Stimmbändern durch Anzi Schildknorpels jede beliebige Spannung geben. Mit so präparierte köpfen machte Müller eine Menge von Versuchen; wir können hier wichtigsten seiner Resultate hervorheben.

Die unteren Stimmbänder geben bei enger Stimmritze volle u Töne beim Anspruch durch Blasen von der Luftröhre aus; diese Töne denen der menschlichen Stimme sehr nahe; sie unterscheiden sich vo welche man erhält, wenn die Ventriculi Morgagni, die oberen Stim und der Kehldeckel noch vorhanden sind, nur durch ihre geringere indem diese Teile, wenn sie vorhanden sind, stark mitschwingen u nieren; die Ventriculi Morgagni haben offenbar nur den Zweck, die bänder von außen frei zu machen.

Bei gleicher Spannung der Stimmbänder hat die größere oder g Enge der Stimmritze keinen wesentlichen Einfluß auf die Höhe de nur spricht bei weiter Stimmritze der Ton schwerer an und ist klangvoll.

Im Leben geschieht die Spannung der Stimmbänder hauptsäch durch, daß die Musculi crico-thyreoidei den Schildknorpel gegen de knorpel herabziehen, was an unserem Präparate dadurch nachgeahmt kann, daß man in dem Schildknorpel mittels eines Hakens eine Schn festigt und diese mit Gewichten belastet. Indem Müller diese G von 8 bis 647 g vermehrte, konnte er alle Töne zwischen *ais''* und *d* ungefähr $2^1/_2$ Oktaven, hervorbringen.

D. Parallelstellung des Maßstabes zur vertikalen Umdrehungsachse.

Wenn auch die vertikale Umdrehungsachse des Instrumentes genau senkrecht gestellt ist, kann doch der Maßstab mit der Längenteilung in zweifacher Weise von dieser Lage abweichen. Erstens kann, wie in Fig. 63 chematisch dargestellt ist, der Maßstab MM' in der dem Fernrohr parallelen Vertikalebene aus der mit der Umdrehungsachse SS' parallelen Lage verdreht sein, zweitens kann er (Fig. 64) in der zum Fernrohr senkrechten bene abweichen, z. B. unten näher der Umdrehungsachse sein als oben. Die Folge dieser beiden Fehler ist lediglich die, daß die Messungen der Höhenunterschiede zu groß ausfallen. Der schief gestellte Maßstab MM' fungiert

Fig. 63.

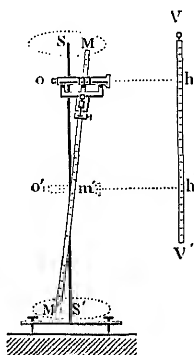


Fig. 64.

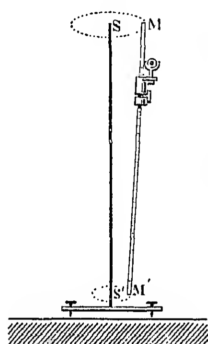
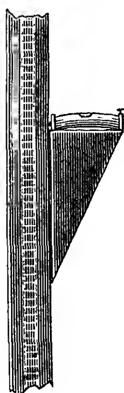


Fig. 65.



nämlich wie ein vertikal gestellter, dessen Skalenteile nur die Länge der Vertikalprojektion der Skalenteile des schiefen Maßstabes besitzen. Der Höhenunterschied hh', Fig. 63, wird gemessen durch die Länge mm'. Derselbe Fehler entsteht in dem durch Fig. 64 dargestellten Falle. Durch Umlegen des Fernrohrs und Drehung um die vertikale Drehungsachse läßt sich dieser Fehler weder erkennen noch rektifizieren, da das Fernrohr hierdurch nicht aus seiner Lage kommt, vorausgesetzt, daß die Umdrehungsachse wirklich genau vertikal steht. Im Falle der Fig. 64 kann man so verfahren, daß man mit dem Fernrohr einen in Visierdistanz aufgehängten dünnen Seidenfaden, welcher durch ein angehängtes, zur Beruhigung der Schwingungen in Wasser tauchendes Gewicht vertikal gespannt wird, anvisiert. Schiebt man dann den Schlitten um große Strecken auf und ab, so darf das Bild des anvisierten Fadens den Durchkreuzungspunkt des Fadenkreuzes nicht verlassen. Ein vorhandener Fehler ist mittels der Schräubchen s_1 und s_2, Fig. 58 d, zu korrigieren. Der in Fig. 63 dargestellte Fehler ist auf diese Weise nicht aufzufinden; man müßte hierzu ein Hilfsfernrohr in einer zu dem vorhandenen senkrechten Lage am Schlitten befestigen. Am einfachsten kommt man zum Ziele mittels einer Winkellibelle (Fig. 65), welche an den Seitenflächen des Maßstabes angelegt und längs derselben verschoben wird. Indem man diese Operation auf beiden Seiten vornimmt und darauf achtet, ob die einspielende Libelle ihren Stand nicht ändert, erkennt man, ob der

Wenn auch der Faden x nicht durch Gewichte belastet ist, so sind doch die Stimmbänder noch nicht völlig abgespannt; um eine stärkere Abspannung und noch tiefere Töne zu erhalten, bringt man eine Schnur y, Fig. 829, an, welche über eine Rolle gehend mit den Gewichten belastet wird, um dadurch den Schildknorpel gegen die Cartilagines arytaenoideae zu ziehen, wodurch die Wirkung des Musculus thyreo-arytaenoideus nachgeahmt wird. Bei einem solchen Versuche erhielt Müller durch ein Gewicht von 5,25 g den Ton *dis*[1], durch Vermehrung des Gewichtes bis zu 66,5 g konnte der Ton bis *h* [1] vertieft werden; durch eine solche Anspannung der Stimmbänder kann man also die tiefsten Baßtöne der Bruststimme hervorbringen.

Daß die Stimmbänder bei den Brusttönen schlaff, bei den Falsettönen gespannt sind, ist von Liskovius zuerst entdeckt worden; indessen läßt sich bei einem gewissen Grade der Abspannung bei verschiedenem Anspruch sowohl ein Brustton als ein Falsetton hervorbringen. Bei den Falsettönen schwingt aber nicht, wie bei den Flageolettönen der Saiten, ein aliquoter Teil der Länge der Stimmbänder; der wesentliche Unterschied beider Register besteht darin, daß bei den Falsettönen bloß die feinen Ränder der Stimmbänder, bei den Brusttönen die ganzen Stimmbänder lebhaft und mit großen Exkursionen schwingen. Diese Tatsache ist zuerst von Lehfeldt beobachtet worden. Der Falsetton erfolgt leichter bei ganz schwachem Blasen.

Bei großer Abspannung sind die Stimmbänder nicht allein ganz ungespannt, sondern im Zustande der Ruhe auch runzelig und faltig; sie erhalten erst durch das Blasen die zum Schwingen nötige Tension.

Bei gleicher Spannung der Stimmbänder läßt sich durch stärkeres Blasen der Ton oft bis zu einer Quinte und mehr in die Höhe treiben.

§ 254. Stimmorgane der Tiere. Bei den Säugetieren sind die Stimmorgane im wesentlichen ebenso konstruiert wie beim Menschen; auch bei ihnen wird der Ton durch die unteren Stimmbänder erzeugt, ja bei den Wiederkäuern fehlen die Ventriculi Morgagni und die oberen Stimmbänder sogar ganz. Bei den Affen sind die resonierenden Teile des Stimmorgans sehr eigentümlich; so findet sich z. B. beim Orang-Utan, dem Mandrill und dem Pavian ein häutiger Sack unter dem Zungenbeine. Am größten ist dieser resonierende Apparat bei den Heulaffen der Neuen Welt.

Die Stimme der Amphibien entsteht wie bei den Säugetieren im Kehlkopfe; sowohl die Frösche als auch die Krokodile haben Stimmbänder. Beim männlichen Frosche treten beim Tongeben zugleich häutige Säcke am Halse nach außen, welche zur Verstärkung des Tones dienen. Bei den Fröschen fehlt die Luftröhre; die Bronchien gehen sogleich aus dem Kehlkopfe hervor.

Bei den Vögeln befindet sich das Stimmorgan nicht am oberen, sondern am unteren Ende der Luftröhre, nämlich da, wo sie sich in die Bronchien teilt; Cuvier zeigte, daß eine Amsel, eine Elster, eine Ente nach Durchschneidung der Luftröhre noch zu schreien vermögen. Die anatomische Untersuchung bestätigt dieses Resultat, denn man findet am oberen Ende der Luftröhre nur eine Verengerung, eine Spalte, welche keineswegs zur Erzeugung von Tönen geeignet ist, während man am unteren Ende einen wunderbar eingerichteten, zur Hervorbringung einer großen Reihe hoher und tiefer Töne geeigneten Apparat findet; doch ist es nicht möglich, davon eine Idee zu geben, ohne zu sehr in anatomische Einzelheiten einzugehen.

Auch unter den Fischen, welche sonst sprichwörtlich als stumm gelten, gibt es mehrere Arten, welche Töne oder wenigstens Geräusche hervorbringen, so z. B. der bekannte Schlammpeizger, welcher ein feines hohes Quieken von sich gibt, wenn man ihn aus dem Wasser herausnimmt. Er bringt dasselbe durch Saugbewegungen der Lippen hervor. Andere Gattungen, wie z. B. die Knurrhähne (Trigla gurnardus), bringen ein knurrendes Geräusch hervor, über dessen Entstehungsweise man noch nicht im reinen ist. Eine förmliche unterseeische Musik, die aus 40 m Tiefe noch bis zur Oberfläche des Meeres dringt, erzeugen die Umberfische (Sciaenoidei).

Als tonerzeugendes Organ wird bei diesen wie den vorhin erwähnten Gattungen die Schwimmblase vermutet.

Die Insekten endlich besitzen außerordentlich zahlreiche und verschiedenartige Mittel zur Erzeugung von Stimmen oder Geräuschen, auf deren Einzelheiten wir natürlich hier nicht eingehen können [1].

§ 255. Klangfarbe der menschlichen Sprachlaute. Die Sprachlaute des Menschen werden gewöhnlich in Vokale und Konsonanten eingeteilt. Die ersteren sind wirkliche Klänge, welche beliebig lange klingen können und deshalb den betonten Teil der Silbe bilden. Die Konsonanten sind fast sämtlich nur Geräusche von kurzer Dauer, geeignet, den Vokal einzurahmen. Wir beschäftigen uns hier nur mit den Vokalen.

Wie so oft, so wurden auch in diesem Gebiet vor längerer Zeit von einzelnen Forschern wichtige, der Wahrheit mehr oder weniger nahe kommende Entdeckungen gemacht, die dann wieder in Vergessenheit gerieten [2].

Daß in den Vokalen Töne verschiedener Höhe enthalten seien, hat schon W. v. Kempelen (um 1780) entdeckt. Auch gelang es ihm schon, durch Verbindung einer aufschlagenden Zunge mit geeigneten Hohlräumen Vokale künstlich nachzuahmen; ja er konstruierte sogar eine förmliche Sprechmaschine, welche später von Faber verbessert unter dessen Namen in den größeren Städten Deutschlands gezeigt wurde [3]. Chr. Gottl. Kratzenstein gab sich um dieselbe Zeit mit ähnlichen Versuchen ab, wobei er die erste durchschlagende Zunge konstruierte, kam aber der richtigen Erklärung der Vokale nicht nahe. Dies gelang erst Robert Willis [4] 1830, welcher teils auf demselben Wege, teils mittels Zahnräder, gegen deren Zähne schwingende Federn anschlugen, Klänge ähnlich den Vokalen erzeugte und die letzteren durch das Zusammenwirken „primärer und sekundärer Pulsationen" erklärte. Die Aufeinanderfolge der Zähne lieferte die „primären Pulsationen" (den Grundton), die Eigenschwingungen der Feder die „sekundären Pulsationen" (den Oberton). In der Zungenpfeife liefert die Zunge die primären, die Ansatzröhre die sekundären Schwingungen.

---

[1]) Landois, Tierstimmen, Freiburg i. B. 1874; Haller in der Zeitschrift „Der zoologische Garten" **15** (1874); Grützner, Physiologie der Stimme und der Sprache, 5. Kap. (II. Teil des Handb. d. Physiologie von L. Hermann).

[2]) Eine ziemlich ausführliche Darstellung dieser älteren Entdeckungen, sowie der ganzen hier abzuhandelnden Materie ist von P. Grützner in seiner Physiologie der Stimme und der Sprache, welche den 2. Teil des I. Bandes des Handbuches der Physiologie von L. Hermann bildet, gegeben.

[3]) Näheres darüber außer bei Kempelen im Kadmus von F. K. du Bois-Reymond, S. 129, Berlin 1862.

[4]) Pogg. Ann. **24**, 397 (1832).

Noch näher der Wahrheit kam Wheatstone 1837, welcher die „multiple Resonanz“ der Hohlräume, d. h. das Gesetz entdeckte, daß ein Resonator auch auf die Obertöne des Eigentones in Mitschwingungen geraten kann. Er zeigte auch bereits mittels Stimmgabeln, daß die Mundhöhle bei bestimmten Stellungen auf bestimmte Töne abgestimmt sei und daß bei den Vokalen ein Oberton im Verhältnis zum Grundton stärker hervortrete als bei anderen Klängen.

Im Jahre 1854 veröffentliche Graßmann [1]) die Grundzüge einer Vokaltheorie, welche nicht die verdiente Beachtung gefunden hat. In derselben ist bestimmt ausgesprochen, daß die Vokale dadurch entstehen, daß durch die Schwingungen der Stimmbänder auch die Luft der Mundhöhle in Mitschwingungen versetzt wird und die dadurch entwickelten leisen harmonischen Obertöne sich dem Grundton der Stimmbänder beimischen. Graßmann bediente sich zur Analyse der Vokalklänge nur seines feinen Gehörs. „Ein aufmerksames Ohr hört leicht beim Übergange von *u* durch *ü* zum *i* eine Reihe leiser harmonischer Nebentöne (Obertöne), welche von c^2 bis c^5 fortschreiten können, und welche man bei denselben Mundstellungen auch für sich hervorbringen kann. Beim Vokal *a* klingt eine ganze Reihe der harmonischen Töne mit, welche das Ohr in der Regel noch bis zur vierten Oktave des Grundtones wahrnehmen kann.“

Graßmann hat dann später [2]) seine Theorie weiter ausgeführt. Ihre wesentlichen Punkte sind folgende. Die Vokale zerfallen in drei Gruppen, deren erster die Reihe *U*, *Ü* und *J*, deren zweiter nur das *A*, deren dritter *O*, *Ö* und *E* angehören.

Die Gruppe *U*, *Ü*, *J* ist dadurch charakterisiert, daß außer dem Grundton immer nur ein Oberton mitklingt, welcher beim *U* stets zwischen c^1 und c^3, beim *Ü* zwischen c^3 und c^4, beim *J* von c^4 aufwärts liegt. Das folgende Schema stellt dies dar:

c^0	c^1	g^1	c^2	e^2	g^2	b^2	c^3	d^3	e^3		g^3		b^3	h^3	c^4	cis^4	d^4	dis^4	e^4	f^4			g^4	gis^4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	....
U (1–8)								*Ü* (9–19)											*J* (20–25 ....)						

Wenn man also in der Tonhöhe c^0 ein *U* singt, wird mittels der Stimmbänder der Grundton c^0 mit allen seinen Obertönen hervorgebracht und gleichzeitig dem Munde eine solche Form und Öffnung gegeben, daß die Mundhöhle auf einen der Töne c^1, g^1 . . . . . bis c^3 Resonanz gibt. Die Formel des *U* wäre also dann $c^0 + c^1$ oder $c^0 + g^1$ oder $c^0 + c^2$ . . . ., d. h. es gibt für den Grundton c^0 eine ganze Reihe von *U*, welche desto dumpfer klingen, je tiefer, desto heller, je höher der eine Oberton ist, welcher dem Grundton beigemengt wird. Dasselbe gilt dann für *Ü* und für *J*, nur daß die Reihe der Obertöne, aus welcher der charakteristische Oberton genommen werden muß, höher liegt, wie das Schema andeutet.

Wird statt des Grundtones c^0 etwa c^1 gewählt, so enthält derselbe nur mehr die Partialtöne, welche früher die geradzahligen waren, nämlich:

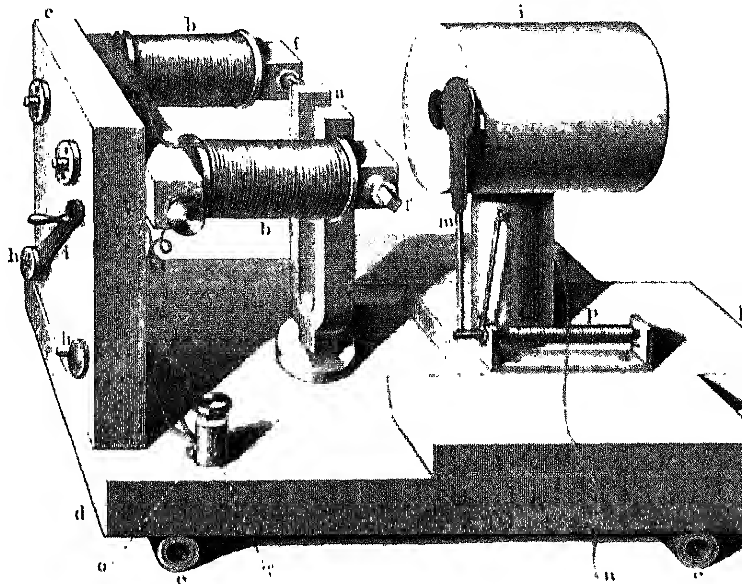
c^1	c^2	g^2	c^3	e^3	g^3	b^3	c^4	d^4	e^4 usw.
U				*Ü*					

[1]) Programm des Stettiner Gymnasiums 1854.

[2]) Wiedem. Ann. 1, 606 (1877).

Auf den Grundton c^1 gesungene U bestehen daher alle aus c^1 u
der nämlichen (absolut genommen gleich hohen) Obertöne wie frü
einem solchen zwischen c^1 und c^2. Die O bestehen wiederum au
einem der Obertöne zwischen c^2 und c^3, die J aus c^1 und einem der
oberhalb c^4. Ist zu einem Grundton der erforderliche Oberton n
handen, so treten die beiden benachbarten Töne für ihn ein, und
Verhältnis zu ihrer Nähe, dabei wird der Klang aber ein wenig verä

Fig. 830.



Im Gegensatz zur Gruppe U, O, J wird das A gebildet durch
handensein der ersten 8 bis 10 Obertöne des Grundtones in a
gleicher Stärke, wobei nur deren relative Höhe konstant bleibt.

Die Vokale O, $Ö$ und E sind nach Graßmann Mittelstufen
U und A, $Ü$ und a, J und a. Die Obertöne des O z. B. liegen
charakteristischen Ton des U, dem c^1, halb so weit entfernt als die
des A.

v. Helmholtz[1]) veröffentlichte 1859 seine wichtigen Versuche
Vokalklänge, welche dann in seinem oft zitierten Werke: „Zur L
den Tonempfindungen" 1863 vervollständigt erschienen. Auch nach
holtz entstehen die Vokale dadurch, daß aus der Klangmasse, w
den Stimmbändern ausgeht, gewisse Obertöne durch die Hohlu
Mundes verstärkt, die übrigen geschwächt werden. Das Unters
der Vokalklänge von den Klängen der anderen Instrumente li
v. Helmholtz darin, daß die Stärke ihrer Obertöne nicht
der Ordnungszahl, sondern überwiegend von deren a
Tonhöhe abhängt.

v. Helmholtz bediente sich der folgenden Methoden. Er u
die Resonanztöne der Mundhöhle durch vorgehaltene Stimmgabeln,

---

[1]) Gelehrte Anzeigen d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1859.

klänge mittels seiner Resonatoren und stellte endlich **künstliche Vokale** her durch gleichzeitiges Ertönenlassen von Stimmgabeln verschiedener Höhe, welche mit Resonanzröhren versehen waren. Die Fig. 830 zeigt die Anordnung einer solchen Stimmgabel. Dieselbe ist zwischen den Polen des Elektromagneten *bb* aufgestellt, welcher letztere durch den intermittierenden Strom einer Unterbrechungsgabel intermittierend magnetisiert wird und dadurch die Stimmgabel in *a* im Schwingen erhält. Ihr Ton wird aber erst dadurch laut hörbar, daß er in der Röhre *i* Resonanz findet, welche eintritt, sobald der Deckel vor der Mündung der Resonanzröhre entfernt wird, wozu der Mechanismus *mp* dient. Der Schieber *k* gestattet Annäherung oder Entfernung der Resonanzröhre. Acht bis zwölf solcher Gabeln von den Tonhöhen:

$$b^{-1},\ b^0,\ f^1,\ b^1,\ d,\ f^2,\ as^2,\ b^2,\ d^3,\ f^3,\ as^3,\ b^3$$

konnten auf diese Weise gleichzeitig durch die nämliche Unterbrechungsgabel, deren Tonhöhe $= b^{-1} = 120$ Schwingungen pro Sekunde betrug, im Schwingen erhalten werden. Mit diesem Apparat gelang es v. Helmholtz, mehrere Vokale künstlich nachzubilden.

Es entstand:

Mit dem Grundton b^{-1}:

Ein dumpfes *U* durch die Gabel b^{-1} allein.

Ein dem *U* ähnlicher Vokalklang durch b^{-1} mit b (schwach) und f^1 (schwach).

Ein schönes *O* durch b^{-1} (gedämpft), b^0 (schwach), b^1 (stark), f' (schwach), d'' (schwach).

Ein *A* durch b^{-1}, b^0 (schwach), f^1 (schwach), d^2 (stark), f^2 (stark), as^2 (stark), b^2 (stark).

Mit dem Grundton b:

U durch b^0 allein.

O durch b^0 (mäßig), b' (stark), f'' (schwächer).

A durch b^0, b^1 und f^2 mäßig stark, b^2 und d^3 kräftig.

Ä durch b^0, b^1 und f^2 stärker, b^2 schwächer, d^3 und f^3 möglichst stark.

E durch b^0 und b^1 (mäßig stark), f^3, a^3, b^3 (möglichst stark).

Die Nachahmung des *E* gelang minder gut, die des *J* gar nicht, weil die höheren Obertöne fehlten.

Mittels desselben Stimmgabelapparates hat v. Helmholtz auch Versuche angestellt über den Einfluß der Phasendifferenz der einzelnen Teiltöne auf die Klangfarbe. Die Phase kann nämlich durch geringe Änderung der Stimmung der Resonanzröhren bis zu $^1/_4$, durch Umkehrung der Stromrichtung um $^1/_2$ verändert werden. Das Resultat war ein negatives, d. h. die Phasendifferenz zeigte sich ohne Einfluß auf die Klangfarbe (vgl. § 250).

(Gegen die v. Helmholtzsche Ansicht, daß bei den Vokalklängen die **absolute** Höhe der charakteristischen Obertöne maßgebend sei, sind mehrfach Einwendungen erhoben worden[1]). Eine neuere von F. Auerbach[2])

[1]) v. Quanten, Pogg. Ann. **154** (1875); Schnebeli, Arch. d. sc. phys. et nat. I, p. 149 (1879).

in v. Helmholtz' Laboratorium ausgeführte Untersuchung hat denn auch ergeben, daß beim Vokalklang sowohl die absolute Höhe, als auch die relative Höhe der Obertöne in Betracht komme. Hierdurch wird freilich die Vokaltheorie eine sehr komplizierte.

Dies, sowie der Umstand, daß die behandelte Frage noch immer Gegenstand der Kontroverse ist [1]), endlich die Erwägung, daß dieselbe eigentlich mehr den Physiologen und Sprachforscher als den Physiker angeht, welcher letztere nur die Methoden der Untersuchung beizustellen hatte, veranlaßt uns, diesen Gegenstand mit dem Hinweis auf die betreffende Literatur abzuschließen [2]).

In experimenteller Beziehung wäre noch zu erwähnen, daß v. Helmholtz auch dadurch künstliche Vokale erhielt, daß er auf eine Zungenpfeife, welche b^1 gab, Hohlräume mit wechselndem Eigenton aufsetzte. Eine auf b^0 abgestimmte Resonanzkugel gab ein *U*, eine auf b^1 abgestimmte ein *O*; ein geschlossenes *A* wurde erhalten mit der Kugel b^2, ein scharfes *A* mit der Kugel d^3. Auch ist es v. Helmholtz gelungen, mit derselben Zungenpfeife die Vokale *A*, *E* und *J* hervorzubringen, indem er gläserne Hohlkugeln aufsetzte, in deren äußere Öffnung noch ein 6 bis 10 cm langes Glasröhrchen eingefügt war, um die doppelte Resonanz der Mundhöhle bei diesen Vokalen nachzuahmen. Zu solchen Versuchen ist der Apparat Fig. 768, S. 709 zu verwenden.

Nimmt man den Schallbecher ab und setzt statt dessen die zu einem Hohlraum zusammengelegten Hände auf, so kann man durch Formänderung und durch Erweiterung der Öffnung derselben den Übergang der Vokale ineinander ziemlich deutlich demonstrieren. Der Klang geht von *U* durch *O* in *A* über, wenn man die Hände allmählich weiter öffnet. Schließt und öffnet man die Mündung der Pfeife mit der flachen Hand, so hört man ein „Papa", tut man dasselbe mit den etwas abstehenden Fingern, so erfolgt ein „Mama".

Zur Vokalanalyse ist auch der Phonautograph, und zwar von Schneebeli benutzt worden. Endlich kann auch der in Fig. 823, S. 766 abgebildete Apparat mit manometrischer Kapsel dazu benutzt werden, wenigstens als Vorleseexperiment den Unterschied in der Zusammensetzung der Vokalklänge zu demonstrieren. Je mehr Obertöne der in den Trichter des Apparates gesungene Vokal enthält, desto mehr Spitzen zeigt das im rotierenden Spiegel beobachtete Flammenbild. Die Fig. 824 I, II, III entsprechen den Vokalen *U*, *O*, *A*.

Als ein weiteres interessantes Vorlesungsexperiment, welches mit der Vokalanalyse in Beziehung steht, mag endlich noch Tyndalls Vokalflamme [3]) erwähnt werden. Wenn man Leuchtgas aus einem Kautschuksack durch ein weites, nirgends verengtes Rohr einem zylindrischen Brenner von kleinem, kreisförmigem Querschnitt zuführt und anzündet, so erhält man bei hinlänglichem Druck eine 50 bis 60 cm hohe schmale Flamme von der Fig. 831 I dargestellten Form.

---

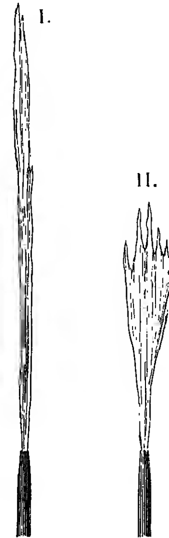
[1]) Man vergleiche die Arbeit von J. Lahr in Wiedem. Ann. 27, 94, welche die Graßmannsche Vokaltheorie aufrecht hält und durch neue Versuche zu bestätigen sucht.

[2]) Dieselbe findet sich in der oben zitierten Physiologie der Stimme und Sprache von Grützner zusammengestellt.

[3]) Tyndall, Der Schall, deutsche Ausgabe von H. v. Helmholtz und G. Wiedemann, S. 287.

Vermehrt man die Belastung des Kautschuksackes, so fängt endlich die Flamme zu rauschen an und wird gleichzeitig kürzer. Die größte Belastung, bei welcher diese Veränderung eben noch nicht eintritt, ist für die Versuche die geeignetste. Bei passenden Dimensionen des Brenners und unter Bedingungen, die man nicht ganz in seiner Gewalt hat und ausprobieren muß, gelingt es, eine sensible Flamme zu erhalten, welche gegen tiefere Töne ganz unempfindlich ist, dagegen beim Erklingen hoher Töne sofort bis zur Form Fig. 831 II zusammenknickt. Spricht man in der Nachbarschaft der Flamme den Vokal *U* oder *O*, so rührt sich die Flamme nicht oder nur wenig, bei *a*, *e*, *i* knickt sie aber auffallend zusammen. Dasselbe erfolgt beim Zischen, beim Schütteln eines Schlüsselbundes, beim Zerreißen von Papier, kurz bei Geräuschen, welche die passenden hohen Töne enthalten, um die der Vibration schon nahestehende Flamme vollends in Schwingungen zu versetzen.

Fig. 831.



§ 256. Der Phonograph von Edison. Dieser höchst interessante Apparat, eine Erfindung des Amerikaners Thomas A. Edison, welcher Ende 1877 bekannt wurde, löst, wie sein Name sagt, für den Schall dieselbe Aufgabe wie der Photographenapparat für das Licht. Er fixiert erhaltene Schalleindrücke, welche dann zu beliebiger Zeit und beliebig oft reproduziert werden können.

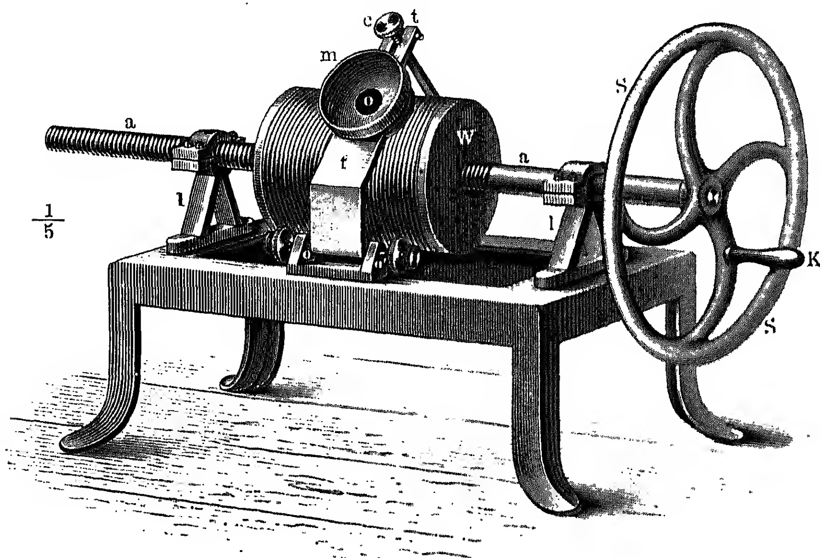
Fig. 832 (a. f. S.) zeigt einen solchen Phonographen in der ursprünglichen einfachen Ausführung in perspektivischer Darstellung, Fig. 833 (S. 783) einen Vertikaldurchschnitt durch die wichtigsten Teile desselben.

Auf einem soliden Gestelle ist die metallene Walze *w* mittels ihrer horizontalen Achse *aa* in den Lagern *ll* drehbar. Sowohl die Walze als die Achse sind mit Schraubenwindungen gleicher Ganghöhe versehen. Das linksseitige Achsenlager bildet die Schraubenmutter für das Gewinde auf der Achse. Dreht man das Schwungrad *SS* an der Kurbel *K*, so wird die Walze bei jeder Rotation gleichzeitig um einen Schraubengang in der Achsenrichtung verschoben. Das Mundstück *m* ist eine trichterförmige Dose von Messing, welche in dem starken messingenen Träger *tt* mittels des Zwischenstückes *rr* (Fig. 833) durch Schraubengewinde befestigt werden kann. Die Basis des Mundstückes *m* ist mit einer zentralen, kreisförmigen Öffnung *o* versehen, der Boden des Zwischenstückes *rr* ist durch eine dünne Glimmerplatte *nn* (oder durch eine dünne Metallplatte oder auch eine tierische Membran) verschlossen. Auf die Mitte der Glimmerplatte ist an der Unterseite eine kleine Metallplatte mit zentraler Spitze aufgekittet, gegen welche das Ende der Stahlfeder *f* angedrückt wird. Diese Feder trägt selbst wiederum eine abgerundete Stahlspitze *g*, welche gegen die Mitte einer Schraubenrinne der Walze *W* gerichtet ist.

Der Träger *t* ist aufzuklappen, wobei er um die Spitzen der Schrauben *oo'* gedreht wird. Diese Schrauben gestatten auch eine Verschiebung des Trägers parallel der Walze und eine Feststellung der so eingestellten Lage mittels Gegenschrauben. Die Schraube *c* mit der Anschlagstelle *d* hat den

Zweck, das Mundstück in die richtige Entfernung von der Walze zu stellen. Die Walze wird mit einem Blatt Stanniol von ungefähr 0,05 mm Dicke überzogen. Man schneidet dasselbe um 1 cm länger, als der Umfang der Walze beträgt, so daß es an den Enden etwas übergreift, befestigt den übergreifenden Rand mit konzentriertem Schellackfirnis und sorgt durch Andrücken und Streichen mit Baumwollebauschen, daß das Stanniolblatt eine recht glatte Mantelfläche bildet. Der übergreifende Rand muß so liegen, daß er beim Vorwärtsdrehen der Walze nicht vom Stahlstift g abgestreift werden kann. Man stellt nun die Walze so, daß der Stahlstift am Anfange des Schrauben-

Fig. 832.

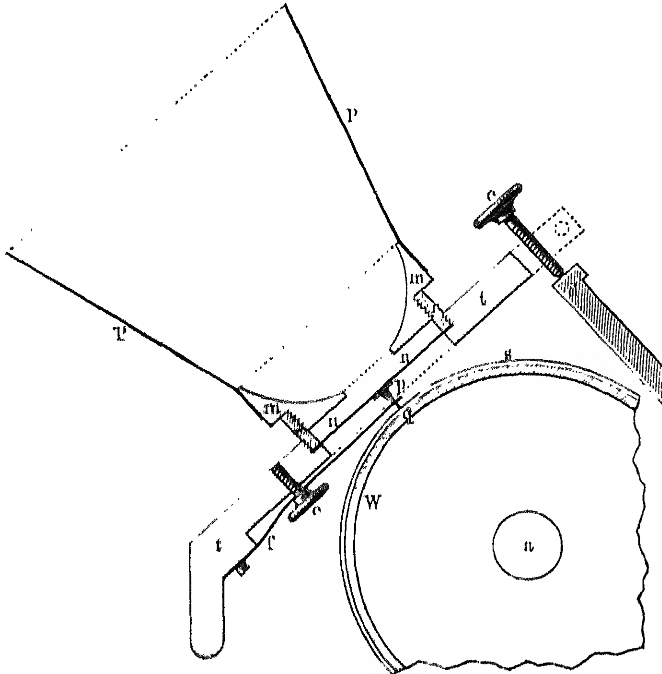


gewindes steht, korrigiert, wenn nötig, die Schrauben oo' so, daß der Stahlstift g genau auf die Mitte einer Schraubenrinne trifft, und stellt endlich die Schraube c so ein, daß derselbe Stahlstift beim Drehen der Walze eine seichte Rinne ins Stanniol eindrückt. Der Apparat ist dann zum Versuche fertig. Gibt man nun der Walze eine gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit (ungefähr zwei Umgänge pro Sekunde) und spricht währenddessen laut in das Mundstück, wobei man sich möglichst nähert, so übertragen sich die Luftschwingungen auf die Glimmerplatte und weiterhin auf den Stift g, welcher infolgedessen in das Stanniolblatt punktförmige Vertiefungen eindrückt, die man sofort mit freiem Auge sehen kann. Um nun die gesprochenen Worte zu reproduzieren, klappt man den Teil t zurück, dreht dann die Walze in die Anfangsstellung zurück, bringt die Dose mit dem Stift genau in die frühere Lage, setzt zur Verstärkung noch einen Schalltrichter aus Pappe PP auf und dreht die Kurbel mit möglichst derselben Geschwindigkeit wie das erste Mal. Die gesprochenen Worte müssen, wenn der Versuch gut geleitet ist, so laut und so deutlich reproduziert werden, daß sie von einem ganzen Auditorium gehört und auch von solchen Personen verstanden werden, welche nicht wußten, was früher in den Apparat gesprochen wurde. Damit dies gelinge, ist insbesondere darauf zu achten,

daß die Stanniolfläche glatt sei, der Stift genau in der Mitte der Furche nicht zu tief und nicht zu hoch stehe. Ferner müssen die einzelnen Bestandteile so fest konstruiert und so adjustiert sein, daß sie weder schwingen noch schlottern. Der Stift q darf weder zu spitzig noch zu stumpf sein, die Feder f muß die richtige Spannung haben. Übrigens geben auch Apparate, bei denen die Feder f mit der Spitze q ganz fehlt und die Spitze p unmittelbar ins Stanniol drückt, gute Resultate.

Eine Modifikation besteht darin, daß der schwingende Stift nicht schraubenförmige Kreise um einen Zylinder, sondern spiralförmige Kreise

Fig. 833.



auf einer ebenen rotierenden Platte beschreibt. Die unter dem Namen Grammophon verkauften Apparate reproduzieren Musikstücke mittels solcher stereotypierter einzulegender Platten. Auch der von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien zur Aufnahme von Sprachen und Dialekten konstruierte Phonograph benutzt solche ebene, aus wachsartiger Masse gegossene Platten, welche nachher galvanoplastisch reproduziert und aufbewahrt werden und die gesprochenen Worte zu beliebiger Zeit und beliebig oft wiederzugeben vermögen.

Der Phonograph ist seit seiner ersten Konstruktion wesentlich verbessert worden. Statt der Stanniolfläche wird eine aus einer wachsartigen Masse hergestellte Walze ohne Schraubenunterlage verwendet. Die Rotation der Walze und ihre Verschiebung parallel zur Achse wird durch ein Uhrwerk, die Aufnahme und dann die Wiedergabe des Schalles wird durch zwei verschiedene auswechselbare Apparate bewerkstelligt.

Eine Erklärung der Wirksamkeit des Apparates ist nach dem, was im § 244 über den Phonautographen gesagt wurde, wohl kaum mehr nötig.

Der Phonograph schreibt seine Schrift als Relief, während der Phonautograph in der Ebene der Schreibfläche schreibt. Beim zweiten Drehen der Walze gleitet der Stift über das Relief, muß daher dessen Erhöhungen und Vertiefungen in derselben Reihenfolge nachgehen, also dieselben Schwingungen wiederum durchmachen, welche er vollbrachte, als er die Eindrücke in die Walzenmasse machte. Es muß daher auch die Membran und mit ihr die Luft oberhalb derselben die nämlichen Schwingungen, also auch dieselben Töne, wenn auch mit geringerer Intensität reproduzieren.

Weitere Versuche sind folgende:

Man gibt der Walze beim Reproduzieren eine geringere oder größere Geschwindigkeit. Die Worte wiederholen sich dann nicht nur langsamer oder rascher, sondern sämtliche Tonhöhen werden niedriger oder höher. Man hat deshalb versucht, durch dieses Experiment die Frage zu entscheiden, ob beim Vokalklange die absolute oder die relative Höhe der Partialtöne in Betracht komme. Haben die charakteristischen Obertöne eine konstante absolute Höhe, so müssen sich die Vokale nicht bloß in der Tonhöhe, sondern im Klangcharakter ändern, sobald man schneller oder langsamer dreht als während des Sprechens. Sind aber die charakteristischen Töne der Vokale von konstanter relativer Höhe, so müssen auch die vom Apparat reproduzierten Vokale ihren Charakter behalten. Das Experiment gibt aber keinen Ausschlag zur ausschließlichen Geltung der einen oder anderen Ansicht. Wohl nähert sich z. B. der Vokal *A* beim langsamen Drehen etwas dem *O*, beim schnelleren Drehen dem *Ä*; *Ü* geht beim langsameren Drehen in *U*, beim schnelleren Drehen in *J* über.

Dies zeigt, daß sowohl das absolute als das relative Moment den Vokalklang beeinflußt.

Ein zweiter Versuch besteht darin, daß man die beschriebene Stanniolfläche ablöst und dann wieder auflegt. Geschieht dies mit der nötigen Genauigkeit und ist das Stanniol nicht zu dünn und nicht zu sehr verletzt worden, so gelingt die Reproduktion. Es wäre also immerhin möglich, auf diese Weise die gesprochenen Worte zu stereotypieren, zu versenden und an irgend einem anderen Orte und zu irgend einer Zeit an einem genau gleich konstruierten Apparat zu reproduzieren. Sicher gelingt dies mit den Walzen oder Platten aus Wachsmasse oder den galvanoplastischen Kopien derselben.

Ein dritter Versuch zeigt, daß eine mehrmalige Reproduktion möglich ist, jedoch mit allmählich abnehmender Deutlichkeit, weil das Stanniol allmählich seine Form verliert. Dagegen haben die galvanoplastischen Platten genügende Widerstandsfähigkeit.

Bei einem vierten Versuch kann man über eine geschriebene Stelle der Walze nochmals schreiben. Sie reproduziert dann, allerdings minder deutlich, beide Wortreihen zugleich, als wären sie zugleich gesprochen worden.

Setzt man den Schalltrichter auf, so werden die Eindrücke stärker, aber der Umstand, daß die Eigentöne des Schalltrichters gegenüber den anderen Tönen verstärkt werden, stört etwas die Deutlichkeit.

Außer den Sprechlauten wird auch Gesang, Pfeifen, Trompeten usw. reproduziert. Dabei ist aber noch wichtiger als bei jenen, daß die ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten werde, da sonst die Änderungen der Tonhöhe störend werden. Am besten wird lautes Lachen, Nachahmung von Hundegebell, Hahnenschrei usw. wiedergegeben.

Maßstab senkrecht steht. Zeigt sich ein Fehler, so ist derselbe an Schräubchen s_3 und s_4 (Fig. 58 d und e), welche auf die Schrauben s_3' un wirken, zu korrigieren.

Endlich könnte man auch so verfahren, daß man mittels des zu prüfen Kathetometers die Höhe eines vertikal aufgehängten Normalmaßstabes ge mißt. Stimmt die am Instrumente abgelesene Höhendifferenz mit der messenen genau überein, so steht auch der Maßstab nicht merklich sc zur vertikalen Drehungsachse des Instrumentes, es müßte dann der Fe der schiefen Stellung durch eine fehlerhafte Länge der Skalenteile c kompensiert werden, in welchem Falle die Messungen nicht unrichtig wer

Nach Vollendung dieser Operationen kann man erst daran gehen, da Sorge zu tragen, daß während des Visierens der eine Faden des Fadenkreu welcher durch die Schraube p gehoben und gesenkt werden kann, ge horizontal liege. Die Lage dieses Fadens wird durch das Drehen des F rohrs in seinen Lagern geändert und dadurch festgestellt, daß ein aus c Rohr vorspringender Zapfen an die stumpfe Spitze einer Schraube anschl welche durch eine mit dem Träger G' verbundene Schraubenmutter getra wird. Man visiert ein punktförmiges Objekt an, das genau im horizonta Faden erscheint, und dreht das Instrument um die sorgfältig vertikal geste Achse. Verläßt der Punkt den Faden nicht, so ist derselbe horizontal. nicht, wird die erwähnte Schraube so gedreht, daß nach dem Anschlagen Zapfens obige Bedingung erfüllt ist. Beim Heben und Senken des Fernro mittels der Schraube o darf dann der vertikale Faden ebenfalls einen Pu nicht verlassen. Damit ist, die Rechtwinkeligkeit des Fadenkreuzes vora gesetzt, auch die horizontale Lage der Achse a konstatiert.

Durch die genau horizontale Lage des einen Fadens gewinnt man c Vorteil, daß man die Bilder der anzuvisierenden Objekte nicht notwendig den Durchkreuzungspunkt der Fäden einzustellen braucht, sondern an irg eine Stelle des Horizontalfadens bringen kann; ferner, daß man sich c Mikrometerschraube p zur Messung kleiner Höhenunterschiede bedie kann, ohne den Schlitten in Bewegung setzen zu müssen.

E. Prüfung und Korrektion des Ganges des Schlittens.

Damit beim Heben und Senken des Schlittens die Fernrohrachse st sich parallel bleibe, muß der Schlitten enge an den Maßstab sich anschließ zugleich soll er aber sehr leicht beweglich sein. Diese beiden Bedingung sind schwer zu erfüllen. Man wird daher stets bemerken, daß beim Hel und Senken des Schlittens die Libelle ihren Stand ändert. Denselben Erf haben geringe Abweichungen von der Geradlinigkeit des Maßstabes. I hierdurch hervorgebrachten Abweichungen der Visierlinie von der horizo talen Richtung sind aber eine sehr gefährliche Fehlerquelle, welche, we nicht berücksichtigt, die ganze Genauigkeit der Messung vollständig illusori machen kann. Bei einer Visierdistanz von D Metern bringt eine Wink abweichung der Visierlinie $= \alpha$ einen Fehler in der Höhenmessung $= D \tan$ hervor; dies beträgt z. B. für $D = 1$ m und $\alpha = 5$ Sekunden schon 0,025 m bei größeren Visierdistanzen nimmt der Fehler im Verhältnisse derselben z Es ist daher unerläßlich, vor jeder Ablesung mittels der Schraube o das Fer rohrgestell um die Achse a so zu drehen, daß die Libelle, welche sehr empfin lich sein muß, aufs genaueste einspielt.

Die gebrauchten Stanniolblätter können nach sorgfältigem Glätten wohl wieder benutzt werden, aber nicht mit gleich gutem Erfolg. Die Stahlspitze wird nach längerem Gebrauch durch Abschleifen scharfkantig und muß dann wiederum abgerundet werden, da sie sonst das Stanniol aufreißt.

Mehrere Physiker, so Alfred M. Mayer[1]), Jenkin und Ewing in Edinburgh[2]) und jüngstens J. Lahr[3]), haben das Profil der Stannioleindrücke durch Fühlhebelapparate vergrößert abgezeichnet. Die erhaltenen Kurven dienten dann zu Studien über die Zusammensetzung des Vokalklanges, indem dieselben nach dem Fourierschen Theorem in eine Reihe von Sinuskurven zerlegt und so die Ordnungszahlen und Intensitäten der Partialtöne ermittelt wurden. J. Lahr findet in den erhaltenen Resultaten eine Bestätigung der Graßmannschen Vokaltheorie.

L. Hermann[4]) hat den Phonographen benutzt, um die Frage nach dem Einfluß der Phase auf die Klangempfindung zu lösen. Er ließ zu diesem Behufe einen Vokal auf die Walze einwirken und reproduzierte denselben, indem er die Walze in entgegengesetzter Richtung zurückdrehte. Dadurch wird offenbar die Abszisse der Wellenkurve umgekehrt, also auch sämtliche Phasen aller Teiltöne. Durch eine besondere Vorrichtung kann man auch die Phonographenmembran veranlassen, sämtliche Schwingungen in entgegengesetzter Richtung zu reproduzieren, wodurch die sämtlichen Ordinaten der Kurve umgekehrt werden. Der Vokalcharakter bleibt hierbei derselbe[5]). Damit ist bewiesen, daß die gleichzeitige Änderung aller Phasen, also die vollständige Umwandlung der Vokalkurve in ihr Spiegelbild keinen Einfluß auf den Klang hat. Es folgt jedoch daraus noch nicht, daß auch eine relative Verschiebung der Phasen der Partialtöne, welche eine vollständige Änderung der Wellenform zur Folge hat, keinen Einfluß auf den Klang hat.

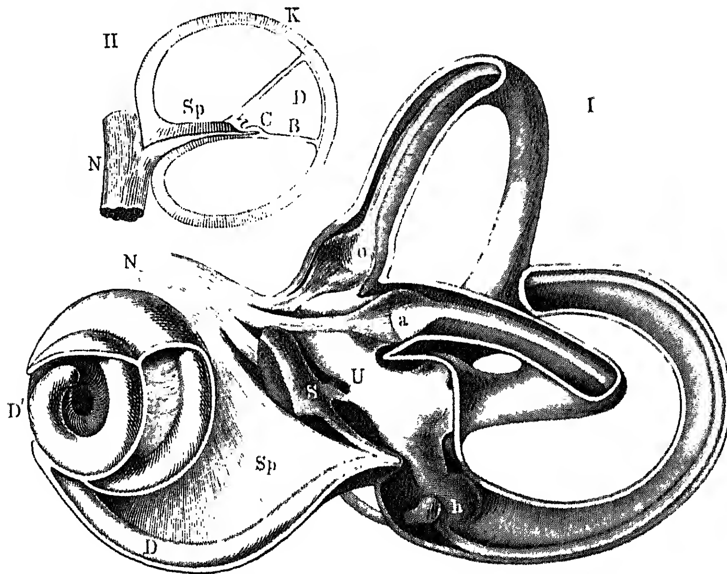
§ 257. **Das Gehörorgan** besteht aus drei Hauptteilen, dem äußeren Ohre, welches durch die Ohrmuschel und den Gehörgang gebildet wird; der Trommelhöhle, welche von dem Gehörgang durch das Trommelfell getrennt ist, und dem Labyrinth. Das Labyrinth zerfällt in das knöcherne und das häutige. Ersteres besteht aus einer Reihe komplizierter, untereinander kommunizierender, von Knochensubstanz begrenzter Hohlräume, in welchem das häutige Labyrinth mit der Endausbreitung der Gehörnerven eingeschlossen ist. Das häutige Labyrinth hat im allgemeinen dünne, membranöse Wandungen und ist von einer Flüssigkeit, der Endolymphe, erfüllt. Es liegt nur teilweise direkt an den Wandungen des knöchernen Labyrinthes; im übrigen ist es durch einen von einer Flüssigkeit, der Perilymphe, erfüllten Zwischenraum von diesem getrennt. Um auf den Gehörnerven wirken zu können, müssen die Schallvibrationen der ganz von Knochen umgebenen Flüssigkeit im Labyrinth mitgeteilt werden; dies wird durch zwei Öffnungen des knöchernen Labyrinthes vermittelt, sie heißen das ovale und das runde Fenster; beide sind mit einem zarten Häutchen überspannt; auf die Mem-

[1]) Nature 17, 469 (1878).
[2]) Trans. Roy. Soc. Edinb. 28, 1.
[3]) Wiedem. Ann. 27, 94 (1886).
[4]) Pflügers Archiv 56, 467.
[5]) Vgl. A. Samojloffs Versuch mit der Violine, § 243.

bran des ovalen Fensters ist ein Knöchelchen aufgewachsen, welches Steigbügel genannt und von welchem sogleich näher die Rede sein wird.

Die Fig. 834 I [1]) stellt das linke knöcherne Labyrinth in ungefähr fünffach vergrößertem Maßstabe zum Teil geöffnet dar, so daß man das ein-

Fig. 834.



geschlossene häutige Labyrinth sehen kann. Es besteht aus drei Hauptteilen, der Schnecke, dem Vorhof und den drei halbkreisförmigen Kanälen oder Bogengängen.

Der akustische Nerv findet seine Endausbreitung an sechs getrennten Stellen der Innenfläche des häutigen Labyrinthes. Je eine fleckenförmige an den beiden Säckchen des Vorhofes (sacculus *s* und utriculus *u*) und je eine leistenförmige an den sogenannten Ampullen, das sind flaschenförmige Erweiterungen am Beginn der häutigen Bogengänge (*o*, *a*, *h*). Die größte Masse der Fasern des Gehörnerven geht aber in die Achse der knöchernen Schnecke, um von dort aus die ganze Länge des häutigen Schneckenkanals (*D*, *D'*) mit Nervenendigungen zu versorgen.

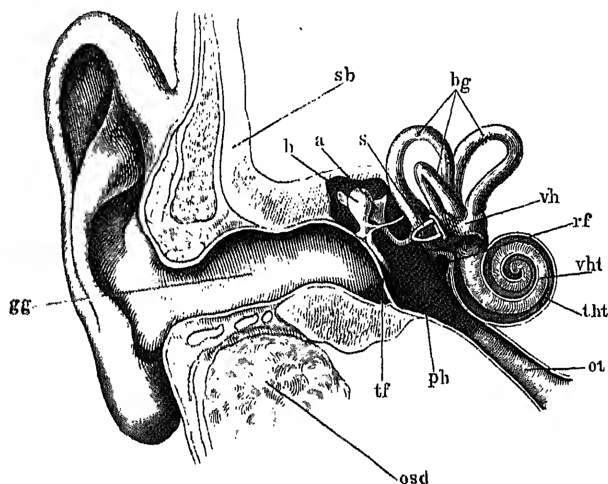
Der häutige Schneckenkanal (*D*) erscheint im Querschnitt eines Schneckenganges dreieckig, wie Fig. 834 II zeigt. Seine äußere Wand ist mit der äußeren Wand der knöchernen Schnecke (*K*) verwachsen, seine innere und seine untere Wand sind frei. Dort, wo aber die innere und untere Wand zusammentreffen, sind beide an ein knöchernes Spiralblatt angewachsen, welches um die Achse der knöchernen Schnecke läuft und in das Innere des knöchernen Schneckenganges hineinragt (*Sp* I und II). In diesem Knochenblatt gehen nun die Fasern des Schneckennerven nach außen, um auf die innere Fläche der unteren Wand des häutigen Schneckenkanales zu gelangen, wo sie in einem sehr komplizierten Apparate, dem Cortischen Organ (II, *C*), ihr Ende finden. Die untere Wand des häutigen Schneckenkanales ist als

---

[1]) Ich verdanke diese treffliche Abbildung meinem Freunde V. v. Ebner.

Träger der Nervenenden von größter Wichtigkeit; sie bildet die direkte Fortsetzung des knöchernen Spiralblattes (*Sp*) und wird als **Basilarmembran** (II, *B*) bezeichnet. Dieselbe besteht in der Hauptsache aus dicht gedrängten, radiär gespannten Fasern oder Saiten. Die Saiten sind nach Hensen wahrscheinlich für bestimmte Töne abgestimmt und erregen durch Mitschwingen die auf ihnen liegenden Nervenenden. Daß in der Schnecke ein Apparat

Fig. 835.



enthalten sein müsse, welcher nach dem Prinzip des Mitschwingens fungiert, hat zuerst v. Helmholtz ausgesprochen. Da die Basilarmembran von unten nach oben breiter, beziehungsweise die Saiten derselben von unten nach oben länger werden, müssen die hohen Töne von der Basis, die tiefen von der Spitze der Schnecke aufgenommen werden. Die Basilarmembran ist nach Hensen beiläufig 33,5 mm lang, ihre Breite wächst von der Basis zur Schneckenspitze von 0,041 bis 0,495 mm.

Die Nervenendstellen an den Säckchen und Ampullen sind vermöge ihrer anatomischen Einrichtungen zur Klanganalyse wohl nicht geeignet. Auf den Nervenendstellen der Säckchen, nicht aber auf jenen der Ampullen, befinden sich — in eine gallertige Masse eingeschlossen — kleine Kristalle aus kohlensaurem Kalk, der sogenannte **Ohrsand**. Es ist möglich, daß alle diese Nervenendstellen Geräuschempfindungen vermitteln, da sie zur Klanganalyse nicht geeignet erscheinen.

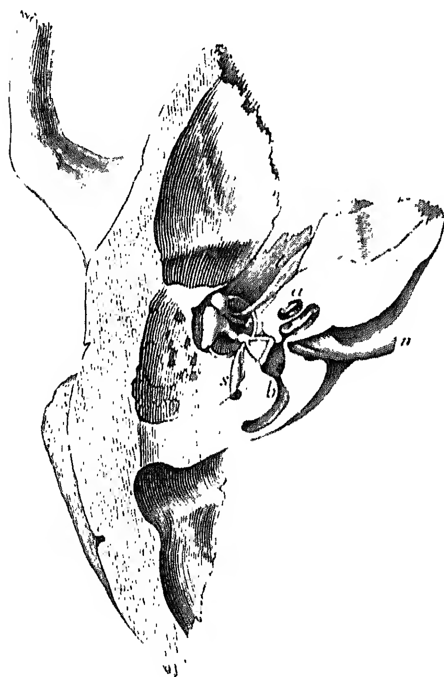
Zu dem Labyrinth werden nun die Schallschwingungen durch die in der Trommelhöhle befindlichen kleinen Knöchelchen fortgeleitet; diese Knöchelchen sind der **Hammer**, welcher mit seinem Griffe an der inneren Seite des **Trommelfelles** angewachsen ist; an den Hammer setzt sich der **Amboß** an, und mit diesem hängt durch das **linsenförmige Knöchelchen des Sylvius** der **Steigbügel** zusammen, dessen Tritt gerade das ovale Fenster verschließt. Aus der von Thomé entnommenen Übersichtsfigur, Fig. 835, in welcher der Deutlichkeit wegen die inneren Teile des Ohres unverhältnismäßig groß gezeichnet sind, ist ungefähr die gegenseitige Lage aller dieser Teile zu ersehen. *gg* ist der Gehörgang, welcher die Schall-

wellen von der Ohrmuschel zum Trommelfell führt. Das Trommelfell *tf* trennt die Trommelhöhle *ph* von dem Gehörgange. Durch die Ohrtrompete *ot* steht die Trommelhöhle mit der Mundhöhle in Verbindung, so daß die Luft in der Trommelhöhle stets mit der äußeren sich ins Gleichgewicht stellen kann. *h* ist der Hammer, welcher einerseits an das Trommelfell angewachsen, mit seinem anderen Ende aber an den Amboß *a* angesetzt ist. *s* ist der Steigbügel, welcher, wie man sieht, das ovale Fenster verschließt, *rf* ist das runde Fenster; *vh* ist der Vorhof des Labyrinthes, *bg* sind die drei Bogengänge. Die Schnecke ist geöffnet, ohne ihren häutigen Inhalt dargestellt; *tht* ist die Trommelhöhlentreppe, *vht* die Vorhoftreppe, welche durch das (in Fig. 834 II im Profil dargestellte) knöcherne Spiralblatt teilweise von der ersteren getrennt ist.

Das runde Fenster sowohl wie das ovale sind, wie bereits bemerkt wurde, durch Membranen verschlossen. Auf der Mitte der Membran des ovalen Fensters ist die Platte des Steigbügels aufgewachsen.

Die inneren Teile des Gehörorganes sind nicht so freiliegend, wie es aus Fig. 835 etwa scheinen möchte; hier ist die knöcherne Hülle, welche das Labyrinth einschließt, der Deutlichkeit wegen ganz weggelassen. Der Gehörgang selbst geht durch den Knochen des Schlafenbeines *sb* hindurch, die Trommelhöhle ist ringsum von Knochenwanden umgeben; aber auch das Labyrinth ist so vollständig in einen Knochen, welcher seiner Harte wegen den Namen des Felsenbeines tragt, eingewachsen, daß man es nur mit Mühe bloßlegen kann. Um eine richtige Vorstellung davon zu geben, wie die einzelnen Teile des Gehörganges in die Knochenmasse eingewachsen sind, ist in Fig. 836 ein wirklicher anatomischer Horizontaldurchschnitt desselben von der linken Schädelhälfte in natürlicher Größe, von oben gesehen, dargestellt. *a* ist der Durchschnitt der Schnecke, *b* einer der halbzirkelförmigen Kanäle, *n* der akustische Nerv, *t* das Trommelfell; auch der Hammer, Amboß und der Steigbügel sind in Fig. 836 deutlich zu erkennen.

Fig. 836.



Die Ohrmuschel dient dazu, die Schallwellen aufzunehmen und durch den Gehörgang zum Trommelfelle hinzuleiten; dadurch nun wird das Trommelfell in Vibrationen versetzt, die durch die Gehörknöchelchen zum Labyrinth geleitet werden. Durch einen Muskel (Fig. 836, *l*) kann das Trommelfell mehr oder weniger gespannt und nach innen gezogen, durch einen anderen Muskel (*s*, Fig. 836) kann der Steigbügel bewegt, dadurch aber auch natürlich die Intensität der Mitteilung des Schalles modifiziert werden.

Was die Funktionen des runden Fensters betrifft, so war man früher der Ansicht, daß es bestimmt sei, solche Schallschwingungen aufzunehmen und der Schnecke zuzuführen, welche sich von dem Trommelfell auf die Luft in der Trommelhöhle fortgepflanzt haben. Eduard Weber hat aber gezeigt, daß diese Ansicht irrig sei. Nach ihm ist die Fenestra rotunda eine Gegenöffnung des Labyrinthes, welche dazu dient, die Mitteilungen der Bewegungen des Steigbügels an das Labyrinthwasser möglich zu machen. Wenn die Höhle des Labyrinthes nur eine Öffnung, das ovale Fenster, hätte, so könnten die Bewegungen des auf der verschließenden Membran dieser Öffnung befestigten Steigbügels nur dadurch dem Labyrinthwasser mitgeteilt werden, daß diese fast inkompressible Flüssigkeit komprimiert und dilatiert würde, was die schwachen Bewegungen des Steigbügels nicht zu leisten imstande sind. Die Stöße des Steigbügels werden vielmehr von dem ovalen Fenster zum runden Fenster durch das Labyrinthwassser hindurch fortgepflanzt und setzen die dasselbe verschließende Membran in entsprechende Schwingungen. Indem die Membranen des ovalen und des runden Fensters synchronisch hin und her schwingen, wird das zwischen ihnen befindliche Labyrinthwasser mechanisch, d. h. ohne Verdichtungs- und Verdünnungswellen, hin und her bewegt und mit ihnen die Nervenendapparate des häutigen Labyrinthes.

Das Wesentlichste am Gehörorgan ist der Gehörnerv; daher kann das Trommelfell verletzt und die Reihe der Gehörknöchelchen unterbrochen sein, ohne daß deshalb das Gehör ganz aufhört; ja bei manchen Tieren, wie bei den Krebsen, besteht das Gehörorgan nur aus einem mit Flüssigkeit gefüllten Bläschen, auf welchem sich der Hörnerv ausbreitet.

Säckchen und Bogengänge finden sich bei allen Wirbeltieren in guter Ausbildung, dagegen bleibt die Schnecke bei den Fischen ganz rudimentär und erreicht auch bei den Amphibien und den meisten Reptilien nur eine geringe Entwickelung.

Die Kette der Gehörknöchelchen des Menschen und der Säugetiere ist bei Vögeln und Reptilien durch ein einziges Knochenstäbchen, welches vom Trommelfell bis zum ovalen Fenster reicht, ersetzt.

Daß das Trommelfell in der Tat ganz dieselbe Rolle spielt wie die elastische Membran des Phonautographen, Fig. 804, d. h., daß sie ganz nach den in § 244 besprochenen Prinzipien durch die in den Gehörgang eintretenden Schallwellen in Vibrationen versetzt wird, geht auch daraus hervor, daß Politzer ganz ähnliche Zeichnungen, wie die in Fig. 805 dargestellten, einfach dadurch hervorbrachte, daß er den Scottschen Phonautographen ohne weiteres durch das Gehörorgan ersetzte. Das schreibende Stielchen war entweder auf dem Hammer, oder auf dem Amboß, oder endlich an der unteren Fläche des Steigbügels befestigt; die Töne wurden durch Orgelpfeifen erzeugt und im Ohre durch einen v. Helmholtzschen Resonator verstärkt.

Daß das Gehörorgan sowie das Gesichtsorgan doppelt vorhanden, ist für die Physiologie von größter Bedeutung. Die beiden Ohren leisten nämlich viel mehr als das Doppelte eines Ohres. Professor A. Steinhauser[1]) hat nachgewiesen, daß durch das doppelte Vorhandensein des Gehörorgans, sowie insbesondere durch die Winkelstellung der Ohrmuscheln und die dadurch

[1]) Die Theorie des binauralen Hörens, Wien 1877.

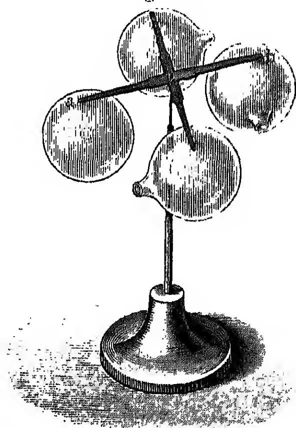
bedingten Intensitätsunterschiede der Schallempfindungen in den beiden Ohren es ermöglicht wird, Richtungswahrnehmungen zu machen, welche mit einem einzigen Ohre unmöglich wären. Der genannte Autor hat auch einen Apparat, Homophon genannt, konstruiert, welcher zum experimentellen Nachweise dieser Entdeckung geeignet ist. Derselbe besteht aus einer Vorrichtung, um in beiden Ohren gleichzeitig verschieden intensive, aber sonst gleichartige Schallempfindungen hervorzurufen, wodurch subjektive Täuschungen über die Schallrichtung veranlaßt werden, welche mit den Täuschungen des Stereoskops, welche wir in der Optik kennen lernen werden, eine gewisse Analogie besitzen.

§ 258. Akustische Bewegungserscheinungen. Daß durch die Wellen, welche von einer Schallquelle ausgehen, andere Körper in Schwingungen versetzt werden können, worauf eben deren Resonanz beruht, haben wir bereits erfahren. Daß durch sehr heftige Wellenbewegungen, z. B. durch einen Kanonenschuß oder eine Explosion, mechanische Wirkungen, Zertrümmerung von Glasscheiben usw. hervorgebracht werden, ist allbekannt. Weniger bekannt dagegen sind eine Anzahl von Versuchen mehrerer Physiker [1], durch welche mittels Schallwellen kontinuierliche Bewegungen, z. B. fortdauernde Rotationen, bewirkt werden.

Wir wollen hier nur einige Beispiele beschreiben, welche Dvořák [2] mitgeteilt hat.

Hängt man vor die offene Mündung einer Kundtschen Röhre (§ 214) an zwei Fäden eine beiderseits offene Glasröhre, welche auf den Ton der Kundtschen Röhre abgestimmt ist, so auf, daß die Achsen beider Röhren zusammenfallen, so wird das Röhrchen beim Tönen heftig abgestoßen. Dieselbe Erscheinung tritt auch bei einer einerseits geschlossenen Glasröhre auf, wo aber die Wirkung nicht so frappant ist wie bei der beiderseits offenen Röhre, welche keinen Angriffspunkt darzubieten scheint. Der Versuch kann auch mit einem Stimmgabelresonanzkästchen angestellt werden, vor dem man einen aus Papier gefertigten zylindrischen Resonator an Fäden aufhängt.

Fig. 837.



Wenn man das oben erwähnte Glasröhrchen genügend verstimmt, so wird es angezogen statt abgestoßen. In großer Nähe der Kundtschen Röhre sowie bei sehr starkem Tönen wird es aber auch dann abgestoßen.

Um eine kontinuierliche Rotation hervorzubringen, befestigte Dvořák vier leichte gläserne Resonatoren von 44 mm Durchmesser und 4 mm Öffnung an einem leichten Holzkreuz, Fig. 837, von der Größe $ab = 85$ mm in der Weise, daß die Mündungen horizontal und tangential gleich gerichtet waren.

[1]) Lord Rayleigh, A. M. Mayer, E. Mach, A. Haberditzel, Dvořák.
[2]) Wien. Akad. Ber. 72 (1875).

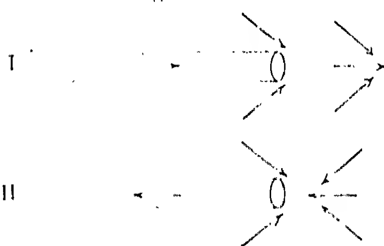
Das Holzkreuz ruhte auf einer Spitze. Dieser Apparat kann bis auf 40 cm Abstand vom Resonanzkasten einer Stimmgabel vom Ton g^1 (392 Schwingungen) noch in Rotation versetzt werden. Jeder Resonator wird dabei stets in der Richtung seiner Achse abgestoßen, so daß die Kraft gegen seine Mündung gerichtet scheint. Es kann deshalb der Apparat auch mit einem einzigen Resonator rotieren.

Außer diesen Versuchen sind noch viele andere beschrieben, welche noch nicht alle erklärt sind. Die Erklärung der obigen beruht auf folgenden Erwägungen. Wenn ein Resonator tönt, so treten an seiner Mündung die Luftmassen aus und ein. Beim Austreten der Luftmassen findet eine Reaktionswirkung statt, welche jener am Segnerschen Wasserrade analog ist, beim Einsaugen der Luft würde diese Reaktionswirkung wieder durch entgegengesetzte Aktion aufgehoben werden, wenn diese der Aktion beim Austritt an Größe gleich wäre. Gerade dies ist aber nicht der Fall.

Um dies einzusehen, denken wir uns den Fall einer Kanone, welche infolge des Schusses einen Rückstoß erleidet. Was würde nun geschehen, wenn umgekehrt das Geschoß durch Verdünnung der Luft im Rohr von der Mündung aus zurückgesaugt würde? Das Geschütz würde nur ein wenig nach vorn bewegt, käme aber sofort zur Ruhe, da das Geschoß seine nach einwärts erlangte Geschwindigkeit an das Geschütz abgeben würde. Könnte das Geschoß durch das Rohr hindurchfliegen und seine Bewegung nach rückwärts fortsetzen, so wäre die Wirkung ein Vorstoß analog dem Rückstoß infolge des Schusses. Dies hat schon Guericke mit seiner Verdünnungswindbüchse gezeigt.

Man braucht nur das Gesetz der Erhaltung des Schwerpunktes in Anwendung zu bringen, um dies zu verstehen. Geschütz und Kugel haben einen gemeinsamen Schwerpunkt, welcher unverrückt bleibt, wenn nicht äußere Kräfte einwirken. Wäre also keine Bodenreibung usw., so würde nach dem Schusse die Kugel nach vorn und das Geschütz nach rückwärts fortgehen, so daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt unverrückt bliebe. Denken wir uns aber jetzt die Kugel an die Mündung des evakuierten Rohres gehalten und den Luftdruck auf dieses System wirkend, so werden Geschütz und Kugel sich mit Geschwindigkeiten, welche verkehrt wie ihre Massen sich verhalten, gegeneinander bewegen und durch unelastischen Stoß zur Ruhe kommen.

Fig. 838.



Ganz ähnlich verhält es sich bei einem Segnerschen Rade passender Konstruktion, wenn man an dem Zuführungsrohre desselben abwechselnd bläst oder saugt. Das Blasen treibt das Rad, das Saugen nicht (oder doch nur im ersten Moment). Befestigt man daher am Zuführungsrohr einen Kautschukballen, den man abwechselnd drückt und sich wieder ausdehnen läßt, so kommt das Rad in dauernde Rotation. Der Kautschukballen kann aber nach Mach auch durch eine mit einer Membran versehene tönende Pfeife ersetzt werden.

Die Anwendung auf die Resonatoren ergibt sich demnach von selbst. Der Rückstoß beim Austritt der Luft wird nicht durch einen gleichen Vorstoß beim Eintritt derselben ausgeglichen, daher eine andauernde Rückwärtswirkung resultieren muß.

Um die Erscheinungen an der beiderseits offenen Resonanzröhre begreiflich zu machen, müssen wir überdies an das Phänomen des aerostatischen Paradoxons erinnern (§ 188).

Hält man eine Glasröhre mit der Mündung in eine Flamme oder Rauchwolke, so kann man sich überzeugen, daß die Bewegungen der Luftmassen vor der Mündung beim Blasen und Saugen nicht genau in entgegengesetzter Weise vor sich gehen.

Beim Blasen wird die Luft, wie Fig. 838 I zeigt, in der Achsenrichtung fortgestoßen und zugleich von seitwärts angesaugt. Beim Saugen wird die Luft von allen Seiten angesaugt, Fig. 838 II. Es kann daher auch die Resultierende der beiden Wirkungen nicht gleich Null sein. Denkt man sich jetzt eine beiderseits offene Resonanzröhre, welche an beiden Enden Luft ein- und austreten läßt, während sie tönt, so konnte, wenn die Schallbewegung an beiden Mündungen gleich intensiv wäre, durch die symmetrische Wirkung der beiderseitigen Resultierenden keine Bewegung der Röhre bewirkt werden. Diese Gleichheit ist aber eben nicht vorhanden, wenn die Röhre mit der einen Mündung der Schallquelle näher ist als mit der anderen, folglich wird es in diesem Falle zu einer Bewegung der Röhre in der Achsenrichtung kommen müssen.

Auf analoge Weise müssen auch die Rotationen der sogenannten Schallradiometer Dvořáks ihre Erklärung finden. Es sind dies um ihre vertikale Achse rotierende, mit leichten vertikal stehenden Flügeln aus Karton versehene Rädchen, bei welchen die Flügel mit konischen, also nach beiden Seiten unsymmetrisch gestalteten Löchern bedeckt sind. Dieselben rotieren vor der Mündung von Resonanzkästen.

Auch Edison hat akustische Rotationsapparate gebaut. B. Davis[1] hat dieses Prinzip zur Untersuchung der Knoten und Bauche stehender Wellen in Orgelpfeifen und in freier Luft angewendet.

---

[1]) Siehe das Referat hierüber in Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Bd. XXII, S. 129, 1902.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

A.

B.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese Drehung nicht, indem sie den Fehler der schiefen Stellung der Visierlinie beseitigt, einen anderen Fehler herbeiführen kann. Die richtige Messung der Höhendifferenzen setzt voraus, daß bei der unteren Ablesung wie bei der oberen der vertikale Abstand zwischen dem Nullpunkte des Nonius am Schlitten und der Visierlinie des Fernrohrs konstant bleibe. Damit dieses der Fall sei, muß vor allem die Achse a senkrecht über dem Nullpunkte des Nonius in der Verlängerung seiner Kante liegen. Denn liegt diese Achse seitwärts, so wird durch deren Drehung die Fernrohrachse nicht bloß gedreht, sondern auch gehoben oder gesenkt. Wir machen auf diesen Umstand aufmerksam, weil Kathetometer aus sonst renommierten Werkstätten mit diesem Fehler behaftet sind, der durchaus nicht zu vernachlässigen ist.

Die richtige Lage der Achse a vorausgesetzt, besteht der vertikale Abstand der Fernrohrachse vom Nullpunkte des Nonius aus zwei Teilen. Einmal aus dem Abstande der Fernrohrachse von der Achse a, dann aus dem Vertikalabstande der Achse a vom Nullpunkte des Nonius. Der erstere dieser Abstände ist stets konstant, da ja das Fernrohr immer mit der Libelle gerichtet wird; der zweite dieser Abstände ist aber nicht konstant, wenn der Schlitten schief steht; denn dann steht auch die Verbindungslinie zwischen Noniusnullpunkt und Achse a schief, und es kommt statt derselben ihre senkrechte Projektion in Betracht. Ist dieser Abstand $= d$, die Winkelabweichung $= \alpha$, so beträgt die Projektion von d auf die Vertikale $d \,.\, \cos\alpha$ und der Fehler in der Höhenmessung $d - d\cos\alpha = d\,(1 - \cos\alpha)$, eine Größe, welche unter allen Umständen verschwindend klein bleibt, wie man sich durch eine Proberechnung überzeugen kann.

Unter der Bedingung, daß die Achse a die richtige Stellung habe, ist also nicht zu fürchten, daß durch Korrektion der Fernrohrstellung an der Schraube o ein merklicher Fehler entstehen könne.

F. Richtigkeit der Skala, Temperaturkorrektion, genaueste Methode der Messung.

Nach den vorausgegangenen Prüfungen ist nun nur noch die Richtigkeit der Skala zu untersuchen, was nur durch Vergleichung mit einem Normalmaßstab, auf den man visiert, möglich ist; auch kann man wohl zur Kontrolle der relativen Richtigkeit der Teilung einen konstanten Höhenunterschied an verschiedenen Stellen des Instrumentes wiederholt messen. Dabei ist nun aber zu berücksichtigen, daß die Temperatur des Maßstabes einen nicht unbedeutenden Einfluß auf die Länge der Teilung hat (siehe § 16). Schon die unvermeidlichen Erwärmungen des Instrumentes durch die Nähe des menschlichen Körpers können bei sehr genauen Messungen störend wirken. Dieser Umstand, sowie die anderen Fehlerquellen lassen es sicherer erscheinen, das Kathetometer als Vertikalkomparator zu konstruieren beziehungsweise zu gebrauchen. Zu diesem Zwecke verzichtet man auf die Anbringung oder Benutzung eines Maßstabes an der Kathetometersäule und bringt zwei Fernrohre (oder Mikroskope) an, welche unabhängig voneinander verschiebbar und mit Mikrometer ausgerüstet sind. Man hängt neben den zu bestimmenden Höhenunterschied einen in Millimeter geteilten Normalmaßstab senkrecht auf, dessen Temperatur genauer ermittelt werden kann als

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

U.

V.

W.

Y.

Z.

Verbesserungen.

Seite 304 u. 305 ist in den Formeln (5), (8) und (10a) statt $\cos^2 \varphi$ zu lesen $\cos$

Seite 445, Zeile 22 ist ebenfalls statt $\cos^2 \varphi$ zu lesen $\cos 2 \varphi$.

Verbesserungen zum ersten Bande.

Seite 30, Zeile 3 von unten statt Zinnober lies Quecksilberoxyd.

„ 46, „ 15 „ oben „ $6'' : l + 0{,}000\,09$ mm lies $6''$, $l = 0{,}000\,09$ mm.

„ 53, „ 25 und 26 von oben statt m, l lies μ, λ.

„ 69, „ 16 von oben statt A lies O.

„ 83, „ 25 „ „ „ Hohweï lies Hohwü.

„ 113, „ 3 „ „ „ 1000 B lies 10 000 B.

„ 113, „ 24 „ „ „ Wege lies Flächen.

„ 122, „ 18 „ „ „ $2\frac{125}{52}$ „ $2\frac{125}{5^2}$.

„ 122, „ 19 „ „ „ $\frac{2{,}980}{x + 5{,}75 + 59{,}5}$ lies $\frac{2{,}980}{x + 57{,}5 + 59{,}5}$.

„ 144, „ 18 „ „ „ $\frac{c^2 \sin 2\alpha \, tg\, \alpha}{2}$ lies $\frac{c^2 \sin 2\alpha \, tg\, \alpha}{2g}$.

„ 144, „ 18 „ „ „ $\frac{g}{2c^2 \cos \alpha}$ lies $\frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha}$.

„ 186, „ 11 „ „ „ $A'x$ lies $A'x'$.

„ 186, „ 19 „ „ „ By'', $B'y$ lies $B'y''$, By.

„ 201, „ 10 von unten statt $p'l$ lies $p'l'$.

„ 230, „ 11, 10 u. 9 von unten statt $\frac{q_2 g}{2m_1 + q}$ lies $\frac{q^2 g}{2m_1 + q}$.

„ 238, „ 3 von oben statt des Fadens lies der Feder.

„ 276, „ 19 „ „ „ Menge lies Stange.

„ 292, „ 20 bis 27 von oben statt $D = 80{,}502$, $M = 0{,}082$ lies $D = 809{,}8$, $M = 0{,}83$.

„ 295, „ 3 von unten statt $\sqrt{\overset{n}{\frac{a_n + 1}{a_1}}}$ lies $\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}$.

„ 304, Formel 5 und 8, statt $\cos^2 \varphi$, $\sin^2 \varphi$ lies $\cos 2\varphi$, $\cos 2\varphi$.

„ 304, „ 9 statt 0,000 001 96 lies 0,000 000 196.

„ 305, „ 10 a statt $\cos^2 \varphi$ lies $\cos 2\varphi$.

„ 310, Zeile 13 von oben statt T' lies t'.

„ 310, „ 20 „ unten statt 5,648 lies 6,648.

„ 310, „ 16 „ „ „ 1^{-8} lies 1^8.

„ 313, „ 12 „ oben statt 9 $(MD - md)$ lies $(MD - md)$.

„ 339, „ 4 „ „ „ $\frac{Mc_2}{2}$ lies $\frac{Mc^2}{2}$.

„ 342, „ 3 „ „ „ Mv lies Mc.

„ 377, „ 5 „ unten „ $\frac{p'}{p''}$ lies $\frac{p''}{p'}$.

„ 416, Kopf der Tabelle, statt Wasserstoff = 1 lies Wasserstoff = 2.

„ 432, Zeile 6 von unten statt § 159 lies § 158.

„ 437, „ 2 „ „ „ Fig. 548 lies Fig. 448.

Seite 445, Zeile 22 von oben statt $\cos^2 \varphi$ lies $\cos 2\varphi$.

" 511, " 6 " " " § 183 lies § 184.

" 535, " 5 " " " $= 0{,}00112\,g$ lies $-0{,}00112\,g$.

" 539, " 11 " " " 1,672 — 0,314 = 1,358 lies 3,349 — 0,314 = 3,035.

" 572, " 1 " " " $\frac{C}{\lambda}$ lies $\frac{C}{n}$.

" 576, Anmerkung, statt $\frac{t}{T} = \frac{x}{\lambda}$ lies $\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}$.

" 592, Formel 6, statt $\frac{P x \delta'}{d\,C}$ lies $\frac{P k \delta'}{d\,C}$.

" 595, Zeile 16 von oben statt $O a_2$ lies $O a_0$.

" 603, " 4 " unten " Fig. 623 lies Fig. 622.

" 664, " 4 " " " $2z$ lies $\frac{z}{2}$.

" 687, " 4 " oben " Schwingungszahl lies Schwingungsdauer

" 701, " 14 " unten " sich lies sie.

" 714, " 7 " oben " $z\,b''$ lies $z\,b'$.

" 720, " 10 " unten " d lies b.

" 722, " 4 und 5 von oben statt g, gh lies h, hk.

" 729, Formel 2, statt $\frac{2\pi}{\lambda_m} \cdot m x$ lies $\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot m x$.

" 746, Zeile 5 von unten statt $1 n - n'$ lies $2 n - n'$.

Auf Seite 81 ist außerdem zu berichtigen, daß der Anfangspunkt für die Zählung der Sternzeit mit der Kulmination des Frühlingspunktes zusammenfällt, also im Laufe eines Jahres alle 24 Stunden des mittleren Tages durchwandert. Es gibt auf den Sternwarten auch Uhren nach bürgerlicher Zeit. Als besonders gut werden die Pendeluhren von Dr. Riefler in München empfohlen, welche an Gleichmäßigkeit und Zuverlässigkeit ihres Ganges, nach Prof. K. Oertels Urteil, jede Pendeluhr älteren Systems bei weitem übertreffen.

jene des Maßstabes des Instrumentes. Man visiert auf den oberen Punkt des Objektes bei genau einspielender Libelle, dreht dann das Instrument um die vertikale Achse, so daß der Normalmaßstab im Fernrohr erscheint, kontrolliert neuerlich die Libelle und liest am Normalmaßstab den Stand des Horizontalfadens ab, wobei man zwischen den nächsten Teilstrichen mittels der Mikrometerschraube interpoliert. Ebenso verfährt man am unteren Ende mit dem zweiten Fernrohr und nimmt dann die Differenz der Ablesungen. Noch sicherer ist ein Verfahren, welches wir im Institute der internationalen Meterkommission in Paris in Anwendung gesehen haben, nach welchem bei feststehendem Kathetometer mit zwei Fernrohren auf die Endpunkte des zu messenden Objektes visiert und letzteres dann mittels einer Drehvorrichtung an Stelle des Normalmaßstabes gebracht wird, den man dann anvisiert. Begreiflicherweise ist dieses Verfahren nur in speziellen Fällen anwendbar.

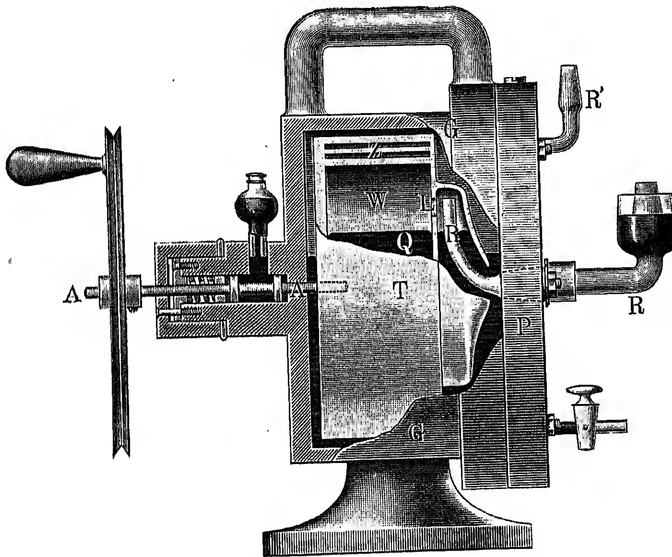
Wir schließen unsere Mitteilungen über das Kathetometer mit der Bemerkung, daß dasselbe, wenn gut konstruiert und rektifiziert, ein vorzügliches Instrument ist, daß es aber zu den gröbsten Fehlern Anlaß geben kann, wenn es diesen Bedingungen nicht entspricht oder nicht mit Sachkenntnis behandelt wird. Dieser Umstand mag zugleich die Ausführlichkeit rechtfertigen, mit welcher wir dasselbe behandelt haben.

§ 23. Längenteilmaschine. Kreisteilmaschine. Wir erwähnen hier kurz auch die Längenteilmaschine, weil sie nicht bloß zur Anfertigung von Teilungen, sondern mit geringen Zutaten auch als Längenkomparator dienen kann. Die Fig. 66 stellt eine solche Teilmaschine dar. Auf einem eisernen Support mit Schienen $U_1 U_2$ läßt sich eine eiserne Platte T durch eine möglichst exakt gearbeitete Schraube S, welche zwischen den Schienen liegt und in eine Mutter unten an der Platte eingreift, verschieben. Die Schraubenspindel trägt an ihrem äußeren Ende eine Kurbel K und eine auf der hohen Kante geteilte Kreisscheibe A, die mit einem am Support befestigten Vernie abgelesen wird. Hat also beispielsweise die Schraube eine Ganghöhe vo 1 mm, der Kreis 100 Teile und gestattet der Vernier, noch 0,1 Teil abzulesen so kann man die Platte durch Drehen an der Kurbel K mit einer Genauig keit von 1 μ verschieben. In der Mitte des Supports ist eine nach obe hervorragende Platte seitlich festgeschraubt, welche das Reißerwerk M zum Ziehen der Striche trägt. Dasselbe besteht aus zwei Hebeln, von dene der eine seine Drehungsachse in mm, der andere in nn besitzt; der letzte trägt den Stahlstichel N. Durch einen besonderen, in der Figur nicht deu lich sichtbaren Mechanismus wird derselbe aufgehoben, dann auf den Sta welcher auf der Platte T mit Klammern festgemacht ist, heruntergelass und zurückgezogen, wobei er senkrecht zur Längsrichtung der Platte auf de Stabe nach Bedürfnis kürzere oder längere Striche zieht. Nach Aufheb des Stichels schiebt man Platte mit Stab durch eine Umdrehung der Kurb genau um 1 mm weiter und zieht wieder einen Strich usw. Will man so ga Meter teilen, so muß bei feststehendem Reißerwerk wie in der Figur Platte etwas über 1 m und der Support etwas über 2 m lang sein, so also jene mit der 1 m langen Schraube um diese Größe unter dem Stic fortzuschieben ist. Da so lange Schrauben nie ganz genau herzustellen si so müssen entweder ihre Fehler, d. h. die Abweichungen ihrer Umgänge

Nachtrag zu Seite 503.

Rotierende Quecksilberluftpumpen sind neuerdings mehrere konstruiert worden, unter denen die von Dr. W. Gaede in Freiburg i. Br. durch rasche Wirkung und handliche Konstruktion hervorragt. Wir geben nachstehend eine Beschreibung und Abbildung derselben[1]). Das Prinzip besteht darin, daß in einem Quecksilberbade innerhalb eines Hohlraumes ein System von Kammern rotiert, welche abwechselnd in das Quecksilber eintauchen und wieder herausgehoben werden. Die herausgehobenen Kammern schließen in

Fig. 538 a.



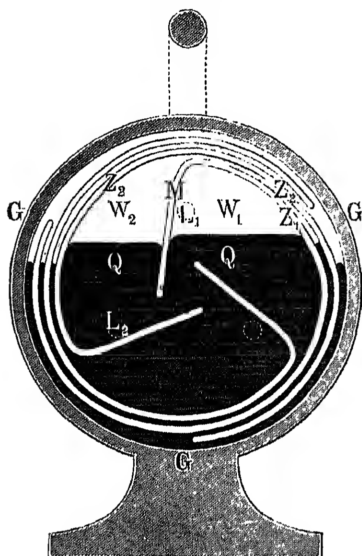
sich ein Torricellisches Vakuum ab, das mit dem Rezipienten verbunden wird; beim darauffolgenden Wiedereintauchen wird das aus dem Rezipienten geschöpfte Gasquantum durch das Quecksilber nach außen verdrängt. Das System hat daher eine gewisse Ähnlichkeit mit der Gasuhr, nur daß bei dieser das bewegte Gas die Rotation bewerkstelligt, während bei der Pumpe die Rotation durch äußere Kraft erfolgt und das Gas in Bewegung setzt.

Die Gaedesche Pumpe ist in ihren Hauptbestandteilen durch Fig. 538a in $^1/_4$ der natürlichen Größe dargestellt. Das zylindrische, mit Handgriff und Fuß versehene Gehäuse *G* aus Gußeisen ist bei *P* durch eine, in einen

[1]) Wir verdanken dieselbe dem Erfinder Dr. W. Gaede.

Gußeisenring gefaßte, 2 cm dicke Glasplatte verschlossen und bis Q mit Quecksilber gefüllt. In diesem Quecksilberbade rotiert im Inneren des Gehäuses eine Porzellantrommel T um die Stahlwelle AA und wird von außen her durch Drehen des auf der Welle sitzenden Rades mit der Hand oder einem kleinen Laboratoriumsmotor angetrieben. In die 2 cm dicke Glasplatte sind drei Glasröhren eingeschliffen. Das unterste, mit Hahn versehene Rohr dient bei der Montierung zum Füllen, bzw. Ablassen des Quecksilbers aus der Pumpe. An das Rohr R, das durch die Glaswand hindurch in das Innere der Porzellantrommel führt, wird mittels Quecksilberschliffes der auszupumpende Rezipient angesetzt. Das Rohr R' schließlich wird mittels Schlauches mit einer gewöhnlichen Luftpumpe (Wasserstrahlpumpe oder Stiefelpumpe) verbunden, welche kein höheres Vakuum als 10 bis 20 mm zu geben braucht. Gegen die äußere Atmosphäre ist das Gehäuse an der Eintrittsstelle der drehbaren Achse A durch eine mit Quecksilber gefüllte Stopfbüchse abgedichtet, deren Einzelheiten aus Fig. 538a ersichtlich sind. An der Auflagefläche der Glasscheibe P auf dem Gehäuse ist die Dichtung dadurch erzielt, daß in dem Flansch des Gehäuses eine mit Quecksilber auszufüllende Rinne eingeschnitten ist.

Fig. 538b.

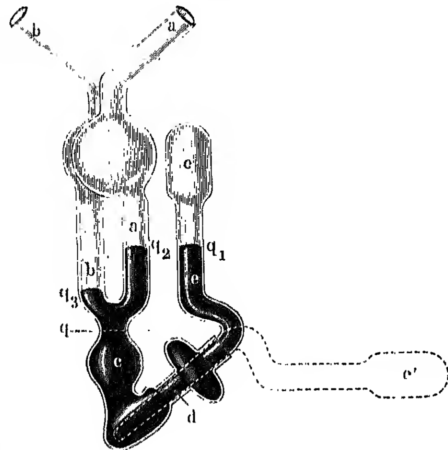


Hat man mittels der Hilfspumpe Gehäuse und Rezipient auf einen Druck von 10 bis 20 mm evakuiert, so wird durch Drehen der Trommel das Vakuum im Rezipienten bis zu den höchsten Verdünnungsgraden gesteigert. Diese Wirkung der Trommel beruht darauf, daß dieselbe durch Zwischenwände in Kammern unterteilt ist, und daß diese Kammern über dem Quecksilberspiegel Q Räume abschließen, welche sich bei der Drehung der Trommel abwechselnd vergrößern und verkleinern. Die Kammern mit den sich vergrößernden Räumen, wie in Fig. 538a der Raum W, füllen sich durch die Öffnung L und das Rohr R mit der Luft des Rezipienten. Die wieder in das Quecksilber eintauchenden Kammern geben das aufgenommene Gasvolumen an das mit der Hilfspumpe erzeugte Vorvakuum ab. In welcher Weise die Zwischenwände in der Trommel angeordnet sind, damit diese Pumpwirkung zustande kommt, zeigt der Querschnitt Fig. 538b senkrecht zur Rotationsachse. Die Trommel hat drei Wände, die ungefähr spiralförmig von innen nach außen verlaufen und nach Fig. 538a vorn und hinten durch ebene Trommelböden begrenzt sind. Die Teile M und Z_1 der einen Wand schließen über dem Quecksilberspiegel Q einen Raum W_1 ab, der bei einer Rotation der Trommel, entgegen dem Sinn des Uhrzeigers, sich vergrößert, und durch die im vorderen Trommelboden befindliche Öffnung L_1 Luft aus dem Rezipienten ansaugt. Kommt durch Drehen der Trommel die Öffnung L unter die Quecksilberoberfläche, so haben wir die Verhältnisse wie in der linken Kammer. Das

Gas im Raume W_2 ist vom Rezipienten abgeschlossen und wird bei der Drehung der Trommel durch die als Kolben wirkende Quecksilberoberfläche aus dem Raum W_2 unter Kompression in den Raum zwischen den Wänden Z_1 und Z_2 gedrängt und von hier aus bei fortgesetzter Drehung an das Vorvakuum abgegeben.

Der in Fig. 538c in $^1/_2$ der natürlichen Größe skizzierte Glasapparat wird bei a und b an die Rohrleitungen R und R' (Fig. 538a) der Pumpe angeschlossen und dient erstens als Barometer, um den Druck im Rezipienten und im Pumpengehäuse abzulesen, und zweitens als Hahn, um nach Belieben Kommunikation zwischen diesen beiden Räumen herstellen zu können. ab ist ein U-förmiges Rohr mit einem Ansatz c, der durch den mit Quecksilber gedichteten Schliff d mit dem Rohr e verbunden ist. Bei Beginn des Versuches ist das Rohr e vollständig und das Rohr c bis q mit Quecksilber gefüllt. Das U-Rohr ab ist somit frei von Quecksilber und bietet, da a mit R und dem Rezipienten, b mit R' und der Hilfspumpe verbunden ist, dem Gasinhalt des Rezipienten freien Durchtritt zur Hilfspumpe. Hat die Hilfspumpe auf etwa 20 mm Druck evakuiert, so sinkt das Quecksilber in e und steigt in die Röhren a und b, so daß die Kommunikation zwischen Hilfspumpe und Rezipient unterbrochen ist. Nun beginnt man die Pumpe zu drehen. Die Höhendifferenz der Quecksilberkuppen q_1 und q_2 gibt den Druck im Rezipienten, und die Höhendifferenz der Kuppen q_2 und q_3 gibt den Unterschied zwischen dem Vakuum und dem Vorvakuum. Will man für einen neuen Versuch Luft in den Rezipienten einlassen, so dreht man die Trommel entweder rückwärts, oder besser, man bringt das Rohr e durch Drehen im Schliff d in die Lage e'. Das Quecksilber fließt aus dem Rohr ab in das Rohr e' zurück, und die Kommunikation durch das U-Rohr ist hergestellt. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß ebenso wie bei den übrigen Pumpen, die Wasserdämpfe zweckmäßig durch Anschluß eines mit Phosphorpentoxyd oder Chlorcalcium gefüllten Gefäßes bei R oder R' entfernt werden.

Fig. 538c.



Der Vorteil, den das Verwenden einer Hilfspumpe mit sich bringt, liegt darin, daß der Höhenunterschied der Quecksilberspiegel innerhalb und außerhalb der Trommel nur 10 bis 20 mm beträgt, wenn der Rezipient ganz ausgepumpt ist. Hätten wir außerhalb der Trommel im Pumpengehäuse Atmosphärendruck, so müßten die Dimensionen der Pumpe, um innerhalb und außerhalb der Trommel einen Höhenunterschied von 760 mm zu ermöglichen, ganz ungeheuerliche sein. Die Pumpe ist im ganzen nur 30 cm hoch und pumpt bei einer Quecksilberfüllung von $1^1/_2$ Liter 10- bis 20 mal so rasch, wie die bisher gebräuchlichen Quecksilberluftpumpen. So wurde ein $6^1/_4$ Litergefäß beim Druck des Wasserstrahlvakuums von 12 mm beginnend in

3 Minuten auf 0,09 mm, in 6 Minuten auf 0,004 mm, in 9 Minuten auf 0,0006 mm, in 12 Minuten auf 0,0001 mm und in 15 Minuten auf 0,00006 mm evakuiert. Verglichen mit den Ölluftpumpen, zeigt sich hier der Vorteil, den die geringe Dampfspannung des Quecksilbers gegenüber der nach den Messungen von Nutting 20- bis 30 mal größeren Spannkraft des Öls bietet, indem Vakua unterhalb 0,1 mm mit Gaedes Quecksilberluftpumpe ungleich schneller erzielt werden, als mit der Ölluftpumpe. Die Spannkraft des Quecksilberdampfes in der Pumpe kann noch wesentlich vermindert werden, wenn man die ganze Pumpe in ein mit Eis oder einer Kältemischung gefülltes Blechgefäß einsetzt, das die Antriebswelle durch eine seitliche, mit der Kappe der Stopfbüchse wasserdicht verschließbare Öffnung durchläßt. Ihrer raschen Wirkung und bequemen Handhabung verdankt die Pumpe ihren hohen Demonstrationswert für Vorlesungen.

wahren Millimetern ermittelt und bei Anfertigung der Teilungen berücksichtigt werden, oder man fertigt die Teilungen durch Kopierung der verifizierten eines Normalmaßstabes an. Derselbe wird dann auf der Platte parallel zum zu teilenden befestigt und ein Mikroskop mit Fadenkreuz, das an einem über die Platte herüberragenden Arme am Träger des Reißerwerkes angebracht ist, auf die Teilstriche des Maßstabes successive unter Verschiebung der Platte eingestellt, worauf man jedesmal einen Strich auf dem zu teilenden Stabe zieht. Ist dieses Mikroskop noch mit einem Filarmikrometer versehen, so können mittels desselben sogar die bekannten Fehler des Normalmaßstabes berücksichtigt und für die anzufertigende Teilung eliminiert werden, was übrigens auch ohne ein solches mittels Ablesung an der Teilung *A* der Schraubenscheibe geschehen kann.

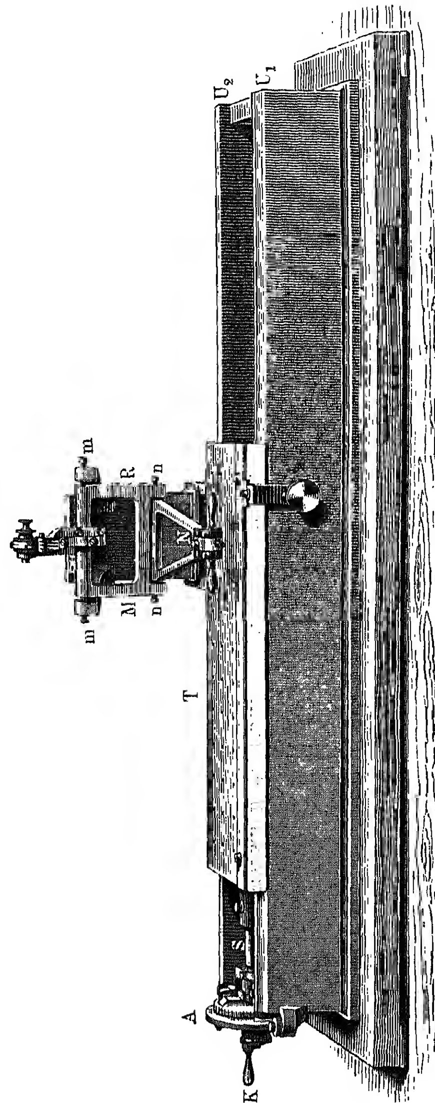


Fig. 66.

Denken wir uns an demselben Arme, der dieses Mikroskop trägt, näher zum Halter des Reißerwerkes noch ein zweites Mikrometermikroskop befestigt, so kann man offenbar dieses Instrument ebenfalls als **Komparator** gebrauchen. Man braucht bloß an Stelle des zu teilenden einen nach dem Normalstabe zu verifizierenden Stab zu versetzen und die Filarmikrometer auf die Striche der hintereinanderliegenden Stäbe einzustellen, dann die Platte mit den Stäben zu verschieben, bis andere zu vergleichende Striche unter beide zu liegen kommen, und wieder beide Mikrometer einzustellen. Der Unterschied gegenüber dem früher betrachteten Längenkomparator besteht dann darin, daß hier die beiden parallelen Stäbe **longitudinal** unter den nahe hintereinander befindlichen Mikroskopen für die Vergleichung verschoben werden, während dort der Tisch mit den Stäben **transversal** unter den um die zu messenden Längen auseinanderstehenden Mikroskopen nur um die Distanz der Stäbe zu verschieben war. Man unterscheidet auch wohl demgemäß Komparatoren mit transversaler und solche mit longitudinaler Verschiebung

der Stäbe. Offenbar sind die ersteren, abgesehen von speziellen Zwecken, vorzuziehen.

Man hat auch Teilmaschinen konstruiert, bei welchen der Tisch zur Aufnahme der zu teilenden Stäbe fest ist und das Reißerwerk längs desselben verschoben werden kann. Die Bank braucht dann offenbar nur halb so lang wie bei der vorigen Maschine zu sein.

Da ferner die Nähe des Beobachters beim Teilen durch Erwärmung Verstellungen an der Maschine (Reißerwerk, Stäbe usw.) zur Folge haben kann, so sind auch automatische Teilmaschinen konstruiert worden, welche diese Fehlerquelle vermeiden, indem sie an Stelle des Beobachters ein mechanisches Laufwerk setzen.

Ähnlich wie die Längenteilmaschine sind auch die Kreisteilmaschinen eingerichtet; das Reißerwerk ist nahezu gleich und kann über den größeren Originalkreis auf einer Bahn radial herübergeführt werden, damit man den Stichel auf den kleineren zu teilenden Kreis einstellen kann, der genau konaxial zum ersteren befestigt ist. Auch hierfür hat man automatisch funktionierende Maschinen konstruiert.

§ 24. Verifikation von Längenteilungen. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler. Wir haben in § 16 vorausgesetzt, daß ein geteilter Normalmaßstab gegeben sei, dessen Millimeter alle wahren Millimetern bei 0^0 entsprechen, d. h. Tausendstel des internationalen Meterprototyps bei dieser Temperatur darstellen. Ein solches Meter gibt es aber in Wirklichkeit nicht, indem nicht bloß seine ganze Länge, sondern auch seine Unterabteilungen mehr oder weniger von dem richtigen Wert abweichen werden. Der Physiker hat sich daher selbst bei Maßstäben aus renommierten Werkstätten stets davon zu überzeugen, ob und inwiefern sie den zu stellenden Genauigkeitsanforderungen entsprechen.

In den meisten größeren Staaten bestehen zurzeit Institute, sogenannte Normaleichstätten, in welchen nach den oben erwähnten nationalen Prototypen des Meters aus Platin-Iridium für wissenschaftliche Institute des Landes Verifikationen ganzer Meterstäbe mit genügender Genauigkeit ausgeführt werden. Für den Fall aber, daß dies nicht tunlich ist, kann man sich zu dem Ende an das Internationale Bureau für Maß und Gewicht in Sèvres (Bureau international des poids et mesures, Pavillon des Breteuil, Sèvres près de Paris) wenden.

Hat sich der Physiker so auf die eine oder andere Weise in Besitz eines geteilten Meters gesetzt, dessen ganze Länge wenigstens unmittelbar oder mittelbar nach dem internationalen Meterprototyp verifiziert worden ist, so daß der Fehler des Meters gegeben ist, so kann er nun selbst dessen Unterabteilungen in folgender Weise auf ihre Fehler untersuchen. Es kann dies sowohl mit Hilfe des in § 20 beschriebenen Horizontallängenkomparators als auch mittels der Teilmaschine des § 23 geschehen, wenn dieselbe mit einem Mikrometermikroskop versehen ist. Man läßt sich zum betreffenden Meter einen aus gleichem Material angefertigten Schieber konstruieren, der etwas über ein Decimeter lang und halb so breit als das Meter ist, so daß sein einseitig zugeschärfter Rand bis zur Mitte der Teilstriche reicht, wenn der andere Rand mit einer angesetzten, nach unten vorspringenden Leiste sich an die Kante des Meters anlegt. Auf dem zugeschärften und mit einer

Silberlamelle belegten Rande des Schiebers wird eine bis zur Kante reichende Teilung angebracht, die aus folgenden wenigen Strichen besteht: Nullstrich, dann ein um 1 mm davon entfernter Strich, darauf ein vom Nullstrich um 1 cm abstehender Strich und endlich ein letzter Strich, der mit dem Nullstrich 1 dcm einschließt[1]). Mit diesem Decimeter, Centimeter und Millimeter des Schiebers erfolgt die ganze Verifikation. Zunächst vergleicht man der Reihe nach alle Decimeter des Maßstabes mit dem Decimeter des Schiebers unter allmählicher Verrückung desselben längs des Meters, indem man jeweilen mit dem Mikrometermikroskop am einen und anderen Ende des Schieberdecimeters die Abweichungen seiner Striche von den betreffenden Decimeterstrichen des Maßstabes mißt. Bei der Teilmaschine verschiebt man zu dem Ende unter dem Mikroskop die Platte mit dem Maßstab um einen Decimeter, beim Horizontalkomparator muß jeweilen das Mikroskop um ein Decimeter verschoben werden, wenn nicht beide auf 1 dcm Distanz einander genähert werden können. Auf diese Weise erhält man also alle 10 dcm des Maßstabes durch den einen Decimeter des Schiebers ausgedrückt, und da die ersteren zusammen das ganze Meter, dessen Fehler bekannt ist, ausmachen, so wird also auch das 10 fache des Schieberdecimeters durch die bekannte korrigierte Länge des ganzen Meters gegeben sein, woraus man die wahre Länge des Schieberdecimeters und damit dann auch die wahre Länge aller 10 Decimeter des Maßstabes findet. In ganz entsprechender Weise werden die Centimeter jedes Decimeters mittels des Centimeters des Schiebers und ebenso die Millimeter jedes Centimeters, wenn nötig, auch mit dem Millimeter des Schiebers ausgemessen und ihre wahre Länge daraus abgeleitet. Da bei einigermaßen guten Teilungen die Millimeter kaum bis zu 0,01 mm fehlerhaft zu sein pflegen, so ist ihre Untersuchung nur für eigentliche Präzisionsmessungen geboten.

Fehlerbestimmung von Mittelwerten. Sowohl bei der Verifikation des ganzen Meters als bei derjenigen der Unterabteilungen desselben wird man sich nie auf eine einzelne Messung einer Größe beschränken, sondern deren stets eine mehr oder minder große Zahl durch Wiederholung derselben anstellen. Man erhält so eine Reihe etwas verschiedener Werte für die gesuchte Größe. Haben wir keine Ursache, dem einen oder dem anderen derselben ein größeres Gewicht beizulegen, so zieht man einfach das arithmetische Mittel aller dieser Werte, welches jedenfalls eine größere Sicherheit als die einzelnen Daten gewähren wird. Die Methode der kleinsten Quadrate lehrt den Fehler solcher Mittelwerte, wie auch den der einzelnen Beobachtung in folgender Weise finden. Man bildet die Abweichungen v_1, v_2, v_3 usw. bis v_n der n einzelnen beobachteten Werte unserer Größe vom Mittel aller, dann ist der mittlere Fehler

[1]) Statt auf dem Rande eines Metallschiebers kann auch eine entsprechende Teilung auf einem Glasstreifen benutzt werden, welcher, mit der geteilten Seite nach unten gekehrt, direkt auf die Maßstabteilung gelegt wird; wegen der sehr verschiedenen Ausdehnung von Glas und dem zu Maßstäben gewöhnlich angewendeten Messing muß dann aber bei den Messungen viel strenger auf Erhaltung konstanter Temperatur geachtet werden.

$$\text{einer Beobachtung} = \overset{\text{streng}}{\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}} \quad \text{oder} \quad \overset{\text{angenähert}}{= \frac{\Sigma v}{n} \, 1{,}7724 \, \sqrt{\frac{n}{2n-1}}},$$

$$\text{des Mittels} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\Sigma v}{n} \, 1{,}7724 \, \sqrt{\frac{1}{2n-1}},$$

wo die Summe Σ auf die Quadrate aller Abweichungen auszudehnen ist un $\frac{\Sigma v}{n}$ einfach das Mittel der n Abweichungen ohne Rücksicht auf ihr Vo zeichen darstellt. Die wahrscheinlichen Fehler sowohl der einzelnen Beob achtung als des Mittels sind rund zwei Drittel der obigen mittleren Fehle Es folgt aus dem Obigen, daß der mittlere Fehler des Mittels um so kleine ausfällt, je größer die Zahl n der Beobachtungen wird.

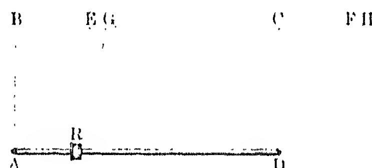
§ 25. Flächenmessung. Amslers Planimeter. Als Einheit d Fläche gilt ein Quadrat, dessen Seitenlänge gleich Eins ist. So entstehe die in § 15 aufgeführten Flächenmaße Quadratmeter, Quadratdecimete Quadratcentimeter und Quadratmillimeter. Die Ausmittelung von ebenen od gekrümmten Flächen, welche von geraden oder krummen Linien begrenzt sin ist Aufgabe der Geometrie bzw. der Integralrechnung. Es gibt aber auc mechanisch-physikalische Methoden zur Ausmittelung ebener Flächenräum

Eine solche schon von Th. Young vorgeschlagene besteht darin, da man die Fläche auf gleichmäßig starkem Kartonpapier aufzeichnet und au schneidet, aus demselben Karton ein Quadrat oder einen Kreis von gena ermitteltem Flächeninhalt ausschneidet und beide abwägt. Es verhalten sic dann die Flächenräume wie die Gewichte.

Eine andere Methode, welche insbesondere bei mikroskopischen Objekte angewandt wird, besteht darin, daß man die Fläche mit einem durchsichtige Quadratgitter bekannter Dimension bedeckt und die Quadrate abzahlt, sow die Bruchteile derselben schätzt, welche die Fläche ausfüllen.

Endlich gibt es noch sehr sinnreich konstruierte mechanische Instr mente, Planimeter genannt, welche mit einem Fahrstift versehen sind, d man nur an der Peripherie der Fläche herumzuführen braucht, um dann d gesuchten Flächenraum an einer Teilung ablesen zu können. Unter d Instrumenten dieser Art ist das Planimeter von Amsler am meisten a gewendet. Wir können dasselbe i elementarer Weise folgendermaßen e klären. Denken wir uns einen Stange zirkel AD (Fig. 67) aus einem rund Stabe mit zwei Spitzen an den End auf eine Zeichnungsebene aufgesetz Bewegen wir denselben parallel zu si selbst nach BC, so beschreibt d Gerade AD ein Rechteck, dessen Flächenraum gleich der Länge A multipliziert mit dem zurückgelegten Wege AB, ist. Diesen Weg könnt wir durch die Rolle R messen. Er ist gegeben durch die Peripherie, mult pliziert mit der Anzahl der Umdrehungen. Der Flächenraum $ABCD$ i also jedenfalls proportional der Anzahl der Rollenumgänge. Ganz dasselb ist aber auch der Fall, wenn wir AD parallel zu sich selbst auf der schief

Fig. 67.



Bahn AE und DF nach EF bringen, denn der Flächenraum $AEFD$ ist ebenso groß, und auch die Anzahl der Rollenumgänge ist dieselbe wie früher. Es ist zwar der Weg AE größer als AB. Allein wir können uns die Bewegung von A nach B zerlegt denken in eine Anzahl Verschiebungen senkrecht auf AD und eine Anzahl Verschiebungen parallel zu AD. Die letzteren wirken aber nicht auf die Rolle, und die Summe der ersteren ist folglich AB. Endlich könnten wir die Gerade AD auch so parallel verschieben, daß ihre Enden irgend zwei parallele Kurven AG und DH beschreiben. Es ist leicht einzusehen, daß in allen diesen Fällen der Flächenraum gleich ist der Anzahl der Rollenumgänge, multipliziert mit einer Konstanten.

Jetzt denken wir uns den Stangenzirkel AD in Fig. 68 im Punkte A mit einer zweiten Stange OA im Punkte A drehbar verbunden. Das Ende O dieser Stange sei um den fixen Punkt O drehbar. Fährt man dann bei feststehendem Ende A mit der Spitze D (dem Fahrstift) auf der Zeichnungsebene fort, so beschreibt die Stange OA einen Kreisbogen AC um den Mittelpunkt O. Wir wollen nun aber den Fahrstift so bewegen, daß die Gerade AD abwechselnd als Radius einen Bogen um ein fixes Zentrum beschreibt, dann wieder parallel mit sich selbst sich fortbewegt. Also wir gehen z. B. zuerst bei fixem A von D nach E, wodurch der Kreissektor DAE beschrieben wird. Dann gehen wir aus der Lage AE in die parallele Lage BF, wodurch eine Art Parallelogramm beschrieben wird, dann wieder bei fixem B in die Lage BG, wodurch wieder ein Sektor beschrieben wird, dann wieder parallel fort nach CH. Von dort gehen wir wieder rückwärts, aber auf anderem Wege. Wir beschreiben zuerst den Sektor CHJ, wobei CJ parallel zu AD gewählt wird, und gehen endlich parallel in die Anfangslage AD zurück. Der Fahrstift D hat dann die Fläche $DEFGHJD = F$ umschrieben. Die Stange AD hat zuerst auf dem als positiv bezeichneten Wege von AD bis CH die horizontal schraffierte Fläche $ADHCA = F_1$ und auf dem als negativ bezeichneten Rückwege die vertikal schraffierte Fläche $HCADJH = F_2$ beschrieben. Die Fläche $DEFGHJD = F$ soll nun gemessen werden. Sie ist offenbar die Differenz der Flächen

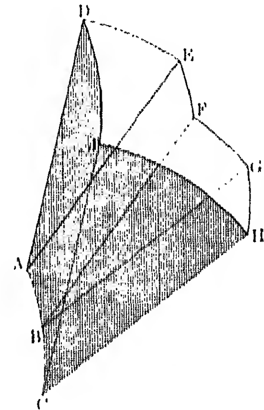


Fig. 68.

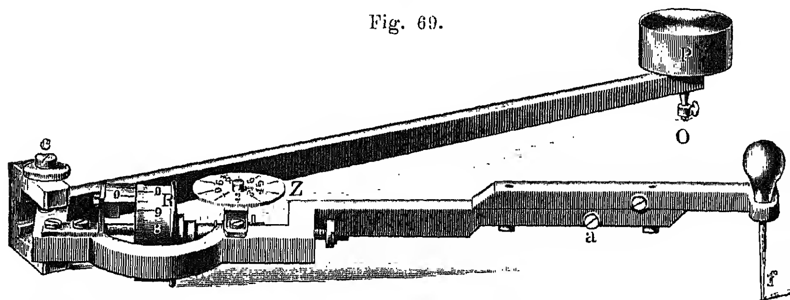
$$ADEFGHCA - ACHJDA = F_1 - F_2.$$

Jede dieser Flächen besteht aus Sektoren und Parallelogrammen. Bezeichnen wir die Summe der positiv zurückgelegten Sektoren mit $\Sigma_1 s$, die der positiv beschriebenen Parallelogramme mit $\Sigma_1 p$, so ist $F_1 = \Sigma_1 s + \Sigma_1 p$. Ebenso ist $F_2 = \Sigma_2 s + \Sigma_2 p$. Nun muß aber $\Sigma_1 s - \Sigma_2 s = 0$ sein, denn da die Stange am Ende wieder in der Anfangslage sich befindet, so ist die Summe der Winkeldrehungen auf dem Wege nach abwärts nachher auf dem Rückwege wieder kompensiert worden. Somit ist $F = F_1 - F_2 = \Sigma_1 p - \Sigma_2 p$.

Diejenigen Umdrehungen der Rolle, welche von der Bewegung längs S toren zustande kommen, heben sich einander auf. Von den Umdrehun der Rolle, die durch Bewegung längs Parallelogrammen zustande kom bleibt dagegen ein Rest, und dieser muß proportional der Differenz $\Sigma_1 p -$ sein, also proportional der Fläche F, die der Fahrstift umschrieben hat, d wir erhalten die Fläche F, indem wir die effektiv verbleibende Drehung Rolle mit einer Konstanten des Instrumentes multiplizieren.

Es ist nun leicht einzusehen, daß wir die Bewegung des Fahrstifte längs irgend einer geschlossenen Kurve zerlegt denken können in unendliche Anzahl unendlich kleiner Bewegungen, bei denen von AD wechselnd Sektoren und Parallelogramme beschrieben werden. Da die o Zerlegung unabhängig ist von der Anzahl der Teilbewegungen, so folgt, auch in diesem Falle der Flächeninhalt der umschriebenen Fläche der An der effektiv verbleibenden Umdrehungen der Rolle proportional sein m Wir brauchen also nur noch ein Zählwerk, welches diese Umdrehungen deren Bruchteile zählt. Der Leser wird nun an der Abbildung eines Pl meters (Fig. 69) leicht sich zurechtfinden. Die Spitze f entspricht d

Fig. 69.



Fahrstifte D der Fig. 68, die Achse c dem Punkte A, die Spitze O d Punkte O. Die Rolle R ist am Umfange eingeteilt und auf der lin Seite mit einem Nonius versehen, welcher fest steht. Die Achse der R greift auf der rechten Seite mittels einer Schraube in die Zähne eines h zontalen Rades, an dessen Scheibe Z die Anzahl der ganzen Umdrehung abzulesen ist. Durch Änderung des Abstandes cf kann die Konstante Instrumentes verändert und auf eine runde Zahl, gewöhnlich eine Pot von 10, gebracht werden. Die Ausführung einer Flächenmessung erfo also so, daß man zunächst die Spitze O an einer passenden Stelle außerh der Fläche durch das aufgelegte Gewicht P fixiert. Hierauf markiert m einen Anfangspunkt am Umfange der zu messenden Fläche, setzt den Fa stift dahin und liest die Anfangsstellung an dem Zählwerk ab. Dann fü man den Fahrstift sorgsam dem Umfang entlang, bis man zum Anfangspun zurückgekehrt ist. Die nunmehrige Ablesung an dem Zählwerk ist e größere oder kleinere als die erste, je nachdem man den Fahrstift rechts her oder links herum geführt hat. Die Differenz beider Ablesungen, multiplizi mit der Konstanten des Instrumentes, gibt den gesuchten Flächenraum. U fährt man die Peripherie 10 mal im gleichen Sinne, so erhält man d 10 fachen Flächenraum, also auch 10 fache Genauigkeit. Hat die Fläche ihrem Inneren Inseln, die nicht mitgerechnet werden sollen, so geht man d m Fahrst ft auf einem beliel ig n Wege bis zu dem Umfang umführt

in umgekehrter Richtung und geht dann auf demselben Wege zur äußeren Peripherie zurück. Das Papier, auf welchem die Operation ausgeführt wird, darf nicht zu glatt, aber auch nicht zu rauh sein, damit die Rolle weder gleitet noch gehemmt wird[1]).

§ 26. Volumenmessung. Auch für die Bestimmung des räumlichen Inhaltes oder Volumens eines Körpers ist die Messung gewisser Längen genügend, wenn die Gestalt desselben eine einfache geometrische Form repräsentiert.

Bei unregelmäßiger Form des Körpers benutzt man zur Volumsbestimmung indirekte Methoden. Die eine besteht darin, daß man den Körper in eine Flüssigkeit eintaucht, die in einem geeichten Gefäße enthalten ist, und alsdann an der Volumseinteilung desselben die Quantität abliest, um welche infolgedessen die Flüssigkeit im Gefäße gestiegen ist.

Eine andere Methode stützt sich auf den Satz, daß die Masse eines Korpers M durch das Produkt seines Volumens V in seine Dichtigkeit D dargestellt wird, also V nach der Formel:

$$V = \frac{M}{D}$$

zu berechnen ist, wenn die Masse und Dichtigkeit des Körpers gegeben sind. Wie diese beiden Größen bestimmt werden, soll im Verfolg gezeigt werden.

Ebenso werden wir später einige Apparate (Volumenometer, Stereometer) kennen lernen, welche das Volumen der Körper unter Anwendung der Druckgesetze der Gase bestimmen lassen.

Den Hohlraum von Gefäßen mißt man durchweg durch die Menge Wasser, welche sie fassen, wozu, wie wir gleich sehen werden, das metrische Maß- und Gewichtssystem sich ganz besonders eignet. In manchen Fällen benutzt man statt des Wassers Quecksilber. Bei dieser Methode ist, wenn große Genauigkeit verlangt wird, auf das Rücksicht zu nehmen, was im § 34 über die Bedeutung des Liters gegenüber dem Cubikdecimeter gesagt ist.

§ 27. Von der Winkelmessung im allgemeinen. Bestimmung der Vertikal- und Horizontalrichtung. Als Einheit der ebenen Winkel gilt der Grad, d. i. der 360. Teil des vollen Kreises oder der 90. Teil eines Quadranten. Manchesmal wird auch die Dezimalteilung benutzt, indem man den Quadranten in 100 Teile teilt.

Der Grad wird dann wieder in 60 Minuten und die Minute in 60 Sekunden geteilt, oder man teilt den Grad nach dem Dezimalsystem.

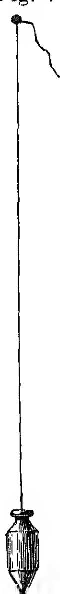
Die Messung ebener Winkel ist entweder eine absolute oder eine relative, je nachdem man die Richtung der Winkelschenkel auf eine bestimmte Richtung im Raume bezieht oder nur die gegenseitige Neigung der beiden

---

[1]) Es ist ersichtlich, daß man mittels des Planimeters auch die mittlere Ordinatenhöhe der Punkte einer Kurve, beziehungsweise den Mittelwert einer veränderlichen Größe (z. B. den mittleren Barometerstand während eines Tages) bestimmen kann, indem man den Flächenraum unter dem Kurvenstück durch die Länge des zugehörigen Abszissenstückes dividiert. Weitere Anwendungen siehe Jac. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über ein neues Planimeter. Schaffhausen 1858. 8⁰.

Schenkel in Betracht zieht. Die absolute Winkelmessung verlangt also vor die Festlegung bestimmter Richtungen im Raume, welche selbst wieder mit Bezug auf eine bereits vorhandene Richtung, z. B. die Erdachse, erfolg kann. Zwei Richtungen sind besonders wichtig: die vertikale und die horizontale. Die erstere ist die Richtung des Lotes, die zweite ist eine darauf senkrecht stehenden[1]). Winkel, deren einer Schenkel mit der Vertikrichtung zusammenfällt, heißen Zenitdistanzen, solche, deren einer Schen mit der Horizontalen zusammenfällt, heißen Höhen-(Tiefen winkel. Bei Winkeln, die in der Horizontalebene liegen, sind zwei wichtigsten Bezugsrichtungen die des Meridians und darauf senkrechte, von Ost nach West gehende.

Fig. 70.



Bestimmung der Vertikalen, Senklot, Libelle. Bestimmung der Vertikalen dient das Senklot, auch Blei genannt, welches der Fig. 70 gemäß aus einem Faden beste an dem unten ein regelmäßig gestalteter zylindrischer Met körper, der in eine konische Spitze ausläuft, zentrisch befest ist. Die Spitze dieses Körpers wird sich dann jeweilen von sel vertikal unter den Aufhängepunkt des Senklotes einstellen u so der Faden oder die Verbindungslinie von Aufhängepunkt u Spitze des Senklotes eine Vertikale darstellen, so daß man dan unmittelbar die Vertikalität der Kanten von Stäben u Wänden beurteilen kann.

Bestimmung der Horizontalen. Die einfachste Vorrichtung hierzu ist die uralte Setzwage, ein gleichschenkliges Dreie an dessen Spitze ein Lot aufgehängt ist. Fällt dieses Lot der Halbierungslinie des Winkels an der Spitze zusammen, steht die Basis des Dreiecks horizontal. Die Prüfung dieses geringe Genauigkeit gewährenden Apparates erfolgt durch U setzen der Basis um 180⁰, wobei das Lot wiederum mit derselben Marke sammenfallen muß.

Will man eine horizontale Visierrichtung herstellen, so kann man s der alten Wasserwage bedienen, einer kommunizierenden Röhre mit dur sichtigen Schenkeln, in denen das Wasser in gleichem Niveau steht. größere Genanigkeit gewährt die Libelle in ihren Hauptformen als Röhr libelle und Dosenlibelle.

Die Röhrenlibelle besteht aus einer Glasröhre, welche im Innern n einem schwach gekrümmten Zylinder, dessen Achse also einen Teil ei Kreisbogens von großem Radius darstellt, ausgeschliffen ist. Dieselbe ist beiden Enden geschlossen — entweder zugeschmolzen oder mit eingeschliffe und mit Hausenblase dicht aufgekitteten Glasdeckeln versehen — und auf eine kleine Blase mit reinem Äther gefüllt. Nur bei ganz rohen Inst

[1]) Nach der Wortableitung bedeuten lotrecht, senkrecht die Richtung Lotes oder Senkels, d. i. die Richtung der Schwere, vertikal die Richtung entgegengesetzten Sinne durch den Scheitel. In der Geometrie ist aber „senkrec für „rechtwinklig“ in Gebrauch gekommen. Es empfiehlt sich, für diese relat Richtungsbezeichnung den Ausdruck normal zu gebrauchen und die ersteren zeichnungen für die absolute Richtung beizubehalten. Ganz strenge genom weicht die lotrechte Richtung von der vertikalen (durch den Erdmittelpunkt stimmten) ein wenig ab.

es gefrieren könnte und auch das Glas angreift. Auf der konvexen Außenfläche der Röhre ist eine Teilung mit am besten vom einen zum anderen Ende fortlaufender Bezifferung angebracht. Mit der geteilten Seite nach oben gekehrt ist die Glasröhre zum Schutz und zur Aufstellung in eine Messingröhre gefaßt, welche über der Teilung einen Ausschnitt hat und entweder, wie dies aus Fig. 71a, 71b und 71c ersichtlich ist, mit halbsechseckig ausgeschnittenen Füßen zum Aufsetzen auf zu nivellierende Zylinder versehen ist oder durch zwei Endplatten, wie Fig. 72 zeigt, mit einer ebenen, linealartigen Metallplatte verbunden ist, um sie auf horizontal zu machende

Fig. 71a.

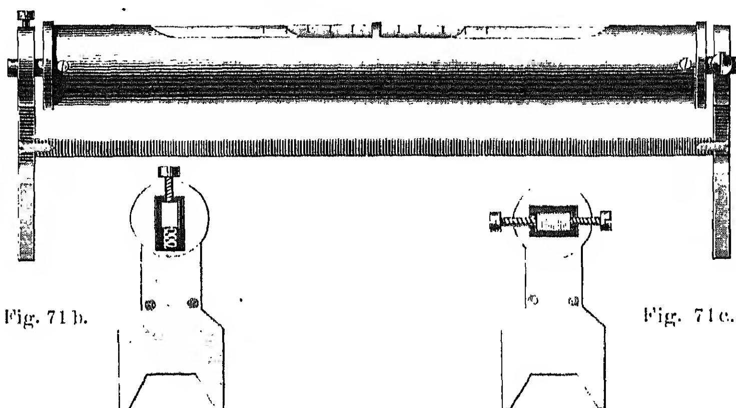


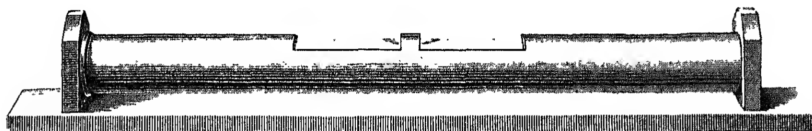
Fig. 71b. Fig. 71c.

ebene Flächen auflegen zu können. Auch hier läßt sich die Röhrenfassung durch in der Figur nicht sichtbare Justierungsschrauben gegen die Endplatten etwas verschieben, um die gleich zu erwähnenden Korrektionen ausführen zu können.

Die Luftblase wird nämlich in der Röhre immer die höchste Stelle des Kreisbogens einnehmen, wobei ihre ebene Basis ein horizontales Segment des Kreises darstellen und der Kreisradius durch ihre Mitte vertikal sein wird. Ist die feste Basis der Libelle — das Lineal oder der Zylinder, auf den wir uns die Füße von Fig. 71a aufgesetzt denken — senkrecht auf dem Kreisradius, der durch die Mitte der Teilung der Libelle geht, so wird die Luftblase auf diese Mitte mit ihrer eigenen Mitte jeweilen einstehen, wenn jene feste Basis der Libelle horizontal sein wird; wir können also die Unterlage der Libelle ohne weiteres durch Justieren, bis die Blase auf die Mitte der Teilung einsteht, horizontal machen. Um nun zu erkennen, ob jene Bedingung erfüllt sei, setzt man die Libelle auf eine ebene Fläche bzw. einen Zylinder, die nivellierbar sind, auf und verändert deren Neigung, bis die Libellenblase auf die Teilungsmitte einsteht; kehrt man die Libelle hierauf um 180^0 um, so ist sie richtig, wenn dabei die Blase auf der Mitte der Teilung stehen bleibt. Ist dies nicht der Fall, so wird der Fuß der Libelle, von welchem die Blase sich entfernt hat, offenbar zu kurz sein, und man hat dann vermittelst der in Fig. 71b ersichtlichen Korrektionsschraube und der unter ihr befindlichen Druckfeder die Libellenröhre bei diesem Fuß zu heben, wenn er der entferntere ist, oder sie zu senken, wenn er der nähere ist. Diese

Korrektion wird aber nur so weit getrieben, bis die Blase von ihrer Seite stellung ungefähr um die Hälfte ihrer Distanz von der Mitte dieser genähe wird; die übrige Hälfte, also ihr neues Einstehen auf die Mitte der Teilu wird durch entsprechende Justierung der Unterlage der Libelle erzielt. Dre man hierauf die Libelle in ihre frühere Lage zurück und bleibt die Blase no nicht unverändert auf der Mitte, so wird wieder zur Hälfte an der Libelle u zur anderen Hälfte an der Unterlage korrigiert usf., bis endlich in beid Lagen die Libellenblase auf der Mitte der Teilung stehen bleibt (siehe § 22, C Dann ist die Libelle in bezug auf ihre Fassung berichtigt bzw. die erwähn Bedingung erfüllt, und die Gegenstände, auf welche man sie aufsetzt, werd beim Einspielen der Blase auf die Teilungsmitte in der zu ihr paralle Richtung horizontal sein. Ist also eine ebene Fläche mit der Libel horizontal zu machen, so muß man die Libelle noch um 90° drehen, u

Fig. 72.



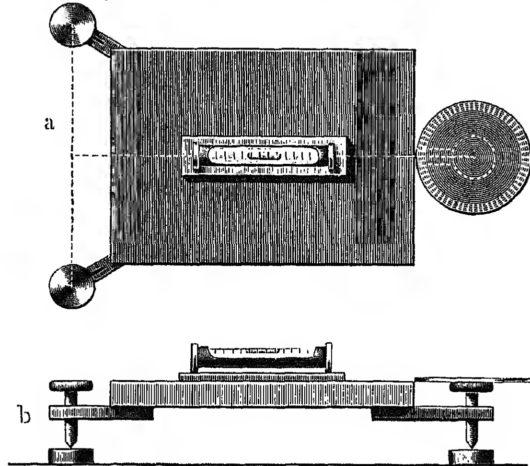
da sie ja bereits berichtigt ist, jetzt nur in dieser Richtung die Unterlage i ihrer Neigung verändern, bis die Libellenblase auch jetzt wieder auf d Mitte einsteht. — Die seitlichen Justierungsschrauben am zweiten Fu Fig. 71 c der auf einen Zylinder aufzusetzenden Röhrenlibelle haben zu Zweck, die Achse der letzteren der Achse des Zylinders parallel machen z können. Man erkennt die Erfüllung dieser Bedingung daran, daß d Libellenblase ihren Stand nicht verändert, wenn man die Libelle auf de Zylinder durch schwache Drehung nach der einen oder anderen Seit hin neigt.

Die Dosenlibelle besteht aus einer metallischen zylindrischen Dos deren Deckel von einer innen nach einer Kugelfläche ausgeschliffenen Gla platte gebildet wird. In diese sind nahe der Mitte zwei konzentrische Kreis eingeschliffen, und die Ränder der Glasplatte sind in der gut passenden Fa sung der Dose eingekittet. Von einer Schraubenöffnung im Boden der Dos aus wird diese auch mit Äther so weit gefüllt, daß der Rand der übrig bleibe den Luftblase eben zwischen die beiden konzentrischen Kreise des Glasdecke zu liegen kommt, wenn der eben abgeschliffene untere Rand der Dose a eine horizontale Ebene aufgesetzt wird. Hat man die Unterlage so justier daß die Blase der Dose, wie angedeutet, einsteht, so erkennt man sofort, o die Dose richtig konstruiert ist, also die Unterlage in der Tat horizontal is indem man die Libelle um 90° und 180° umdreht. Verläßt dabei die Blas die Mitte des Deckels, so ist die Libelle unrichtig und muß durch Nac schleifen des unteren Randes korrigiert werden.

Prüfung der Empfindlichkeit der Libelle. Bei den Libellen wir gewöhnlich vom Verfertiger angegeben, welches der Bogenwert eine Skalenteiles derselben ist, d. h. um welchen Winkel man die Libelle neige müsse, um die Mitte der Blase um einen Teilstrich fortrücken zu mache Leider kann man sich selbst bei renommierten Werkstätten nicht ganz auf dies Angabe verlassen, wie man auch nicht sicher sein kann, ob der Bogenwert a

jeder Stelle der Skala derselbe sei oder mit anderen Worten die Libelle im Innern wirklich genau nach einem Kreisbogen ausgeschliffen sei oder sich dieser Zustand nach guter Anfertigung nachher erhalten hat. Deshalb ist es für den Physiker nötig, seine Libelle selbst untersuchen zu können. Hierzu kann mit geringer Modifikation das sog. Stellbrett, das sowieso in keinem physikalischen Laboratorium fehlen darf, dienen. Es besteht aus einer eben abgeschliffenen Metall- oder Glasplatte, die mit drei Stellschrauben versehen ist, wie die Fig. 73a und b zeigt. Denken wir uns nun, wie die Figur es andeutet, auf dem Kopf der einen Fußschraube einen etwa in ganze Grade geteilten Kreis zentrisch aufgesetzt und auf der Platte einen auf die Kreisteilung weisenden Zeiger befestigt, so wird eine dieser Fußschraube zugewandte, auf die Platte gesetzte Röhrenlibelle um bekannte Winkelgrößen geneigt werden können, wenn wir die Höhe eines Schraubenganges der Fußschraube und die Entfernung ihrer Fußspitze von einer Geraden durch die Fußspitzen der beiden anderen Stellschrauben — die punktierten Linien in Fig. 73a — kennen. Diese Größen sind aber unschwer zu ermitteln. Es sei diese Entfernung e und die Schraubenganghöhe der ersteren Fußschraube h, so ist offenbar der Neigungswinkel v der Platte, welcher einer Umdrehung dieser Schraube entspricht, gegeben durch:

Fig. 73a und b.



$$tang\ v = \frac{h}{e}.$$

Angenommen, es sei:

$$h = 0{,}5 \text{ Millimeter} \quad \text{und} \quad e = 286{,}48 \text{ Millimeter},$$

so wird:

$$v = 6 \text{ Bogenminuten} = 360 \text{ Bogensekunden}.$$

Es wird also der Drehung der Fußschraube um 1^0 des auf ihr befestigten Kreises eine Neigung der Platte um 1 Bogensekunde entsprechen. Indem man also die Schraube dreht, bis die Libellenblase mit ihrer Mitte um einen, 5 oder 10 Skalenteile fortgerückt ist, und dann am Kreise die ganzen Umdrehungen und Bruchteile derselben abliest, wird man den Wert der Skalenteile in Sekunden erhalten und auch Unregelmäßigkeiten in ihrem Verlauf auffinden.

Die eigentlichen Niveauprüfer[1]) unterscheiden sich von dem eben geschilderten Hilfsapparat im wesentlichen nur dadurch, daß besondere Träger

[1]) Siehe z. B. Hunäus, Die geometrischen Instrumente, S. 17. Hannover 1864.

für die zu untersuchenden Libellen oder Niveaus die parallele Stellung der selben zu der Linie *e* im obigen sichern. Als Beispiel der Prüfung eine Röhrenlibelle mittels eines solchen teilen wir nachstehende Beobachtunge mit, wobei die Neigungsschraube je um 10 Sekunden vorwärts gedreht wurde

Stellung der Schraube	Ablesungen der Enden der Blase an der Skale	Mitte der Luftblase	Differenz in Skalenteilen	Wert eines Skalenteiles
0″	8,6—21,6	15,1		
			1,7	5,88″
10	10,3—23,3	16,8		
			1,9	5,26
20	12,2—25,2	18,7		
			1,9	5,26
30	14,1—27,1	20,6		
			1,9	5,26
40	16,0—29,0	22,5		
			2,0	5,00
50	18,0—31,0	24,5		
			2,0	5,00
60	20,0—33,0	26,5		

Hiernach wäre also der Wert eines Skalenteiles der Libelle von 16,8 bis 22,5 Skalenteile Blasenmitte konstant: 5,26 Sekunden und von 16,8 bi 26,5 Blasenmitte im Durchschnitt: 5,16 Sekunden mit einer Unsicherheit vo $\pm$ 0,1 Sekunde. Das Intervall von 16,8 bis 15,1 Blasenmitte ist als zu ver schieden im Wert von der Benutzung auszuschließen.

Mit einer so geprüften Libelle kann man selbstverständlich auch kleiner Neigungswinkel mit großer Sicherheit messen.

§ 28. Instrumente zur Winkelmessung, Theodolit. Die Winkel meßinstrumente bestehen im allgemeinen aus einem geteilten Kreise ode Kreisbogen (Limbus) und einem um den Mittelpunkt desselben drehbare Radius (Alhidade), welcher nacheinander in die Richtung der Schenkel de zu messenden Winkels gebracht wird. Die Differenz der zugehörigen Ab lesungen am Teilkreise gibt dann den Winkel. Wir übergehen als bekann die einfacheren geometrischen Instrumente dieser Art, den Regeltrans porteur, das Anlegegoniometer usw., und wenden uns zu dem wichtig sten Instrumente, welches gestattet, Winkel in Horizontal- und Vertikalebene zu messen. Dies ist der Theodolit, dessen Name vom englischen *Th alydeday* abstammen soll, das selbst wieder aus dem arabischen Worte: *hadâ* führen, abgeleitet wird.

Der in den Figuren 74, 75 und 76 in seinen wesentlichen Teilen dar gestellte Theodolit besteht aus einem Dreifuß *G* mit Stellschrauben *S*, welche den horizontalen Teilkreis oder Limbus *L* trägt. In der Vertiefung desselbe liegt eine an den inneren Rand des Teilkreises sich innig anschließend Scheibe, die Alhidade *A*, welche auf dem konischen, in einer entsprechende Büchse von *G* steckenden, vertikalen Zapfen *C* befestigt ist und sich so um das Zentrum des Kreises drehen läßt. Die Stellung der Alhidade wird an de Kreisteilung mit den auf ihr angebrachten, diametral sich gegenüberstehende Indices *nn* oder Vernieren abgelesen. Auf der Alhidade erheben sich die beide

Träger *T* mit den Achsenlagern der horizontalen Achse *H* des Fernrohrs *F*. Am einen Ende dieser Achse ist der Vertikalkreis *V* befestigt, und am betreffenden Träger *T* sitzt ein Querarm mit den festen Vernieren *n' n'* zur Ablesung desselben. Auf die Zapfen der Horizontalachse ist eine Röhrenlibelle mit Füßen (Fig. 71 a) zur Nivellierung aufzusetzen.

Bei genaueren Instrumenten der Art ist der Limbus des Horizontalkreises und des Vertikalkreises auf eingelassenem Silberstreifen in $\frac{1}{6}^0$ geteilt und sind die Verniere so eingerichtet, daß man mit ihnen noch 10″ ablesen

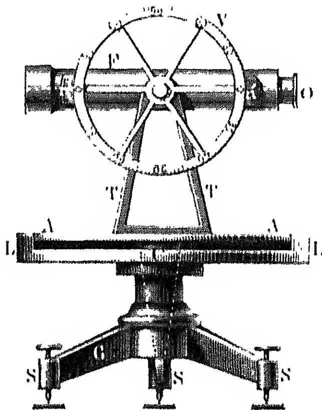


Fig. 74.

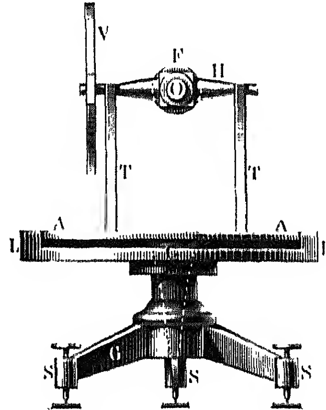


Fig. 75.

kann; ferner sind an beiden Kreisen Klemmen und Mikrometerschrauben behufs feinerer Einstellung des Fernrohrs angebracht.

Zur Berichtigung des Theodoliten behufs Messung von horizontalen und vertikalen Winkeln wird zunächst mit Hilfe der auf die horizontale Achse aufgesetzten Libelle die Drehungsachse der Alhidade vertikal und damit der Limbus horizontal gemacht, indem man abwechselnd die Libellenfüße und den Dreifuß justiert, bis die Libellenblase beim Umdrehen der Alhidade auf der Mitte der Teilung stehen bleibt. Um hierbei rascher zum Ziel zu gelangen, stellt man die Horizontalachse zuerst über den einen Fuß hin und nivelliert nur in dieser Richtung unter Umdrehung der Achse um 180°; alsdann dreht man die Alhidade um 90° und hat dann zur vollständigen Nivellierung der Vertikalachse nur noch die beiden anderen Stellschrauben am Dreifuß die eine zurück-, die andere vorwärtszudrehen, bis die Libelle auch in dieser Richtung einsteht. — Darauf legt man, wie im § 22 C. beschrieben ist, die Libelle auf dem Zapfen der Fernrohrachse um 180° um; bleibt die Blase in der Mitte stehen, so ist diese Achse wirklich horizontal, d. h. die Höhe der Achsen-

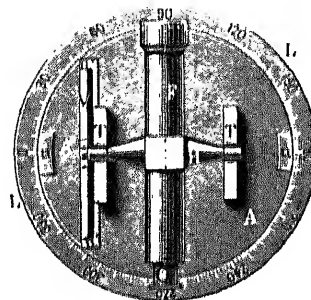
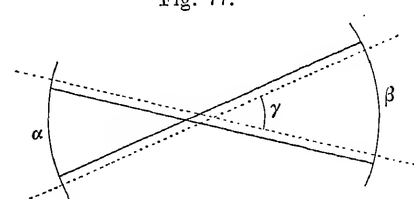


Fig. 76.

lager dieselbe [1]). Tritt dagegen eine Verschiebung der Blase ein, so ist wie die Libelle und der eine Träger T' je zur Hälfte zu korrigieren, bis die U legung der Libelle keine Standänderung der Blase an ihrer Skala zur Fo hat. Nach dieser Korrektion ist dann auch gemäß der mechanischen A fertigung der Vertikalkreis genau genug wirklich vertikal. — Schließlich ist no die optische Achse des Fernrohrs, d. h. die Verbindungslinie der Mitte Objektivs mit dem Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes beim Okular, senkre zur horizontalen Drehungsachse desselben zu machen. Man stellt zu d Ende das Fadenkreuz des Fernrohrs auf irgend einen entfernten schar Punkt nahe am Horizont ein, dreht dann die Alhidade nach dem Horizont kreis genau um 180° im Horizont um und richtet durch Durchschlag des Fernrohrs, d. h. Drehen desselben in der Vertikalebene dasselbe wie auf das fragliche Objekt. Steht dann das Fadenkreuz des Fernrohrs ni wieder genau auf dieses Objekt ein, so verschiebt man mit den betreffend Korrektionsschrauben am Okular O das Fadenkreuz horizotal um die ha Distanz und korrigiert die andere Hälfte desselben durch Drehen an Alhidade. Ist dies gut ausgeführt, so wird bei Zurückführung des Fernro in die frühere Lage der Vertikalfaden des Fadenkreuzes wieder genau a den fraglichen Punkt einstehen. Damit ist der sogenannte Kollimationsfeh des Fernrohrs annuliert.

Man kann nach dieser Rektifikation des Theodoliten jetzt ohne weite durch successive Einstellung des Fernrohrs auf zwei nahe gleich entfern Objekte [2]) und jeweiliges Ablesen d Verniere am Horizontalkreis d Horizontalwinkel bestimmen, welch zwei Vertikalebenen durch die O jekte miteinander einschließen. Hät man hierbei für die Ablesung a Horizontalkreis nur einen Index od Vernier benutzt, so würde man b exzentrischer Lage der Alhida zum Limbus, wie dies Fig. 77 darstellt, entweder einen zu kleinen Winkel oder zu großen β erhalten haben, während das Mittel aus den Ablesung an beiden, diametral gegenüberstehenden Vernieren: $\frac{\alpha + \beta}{2}$ gleich de wahren Winkel γ, wie bei zentrischer Lage ist. Um ferner zugleich Höhenwinkel der Objekte, d. h. in den betreffenden Vertikalebenen die Wink der Visierlinien zu den Objekten mit dem Horizont zu erhalten, muß auß den Ablesungen der Verniere am Vertikalkreis bei der Einstellung des Fade

Fig. 77.



[1]) Dies gilt allerdings nur, wenn die beiden Zapfen, wie es sein soll, glei dick sind. Ob diese Bedingung erfüllt ist, kann man durch Umlegen der Fernro achse in ihren Lagern erkennen. Verschiebt sich dabei die Blase der Libelle, ist daraus die Ungleichheit der Zapfendicke zu erkennen und auch zu mess worauf man an den Neigungen der Achse für die Messungen eine hier nicht näh zu besprechende Korrektion anzubringen hat.

[2]) Wäre die Distanz der Objekte vom Beobachter erheblich verschieden, müßte behufs deutlichen Sehens die Fadenkreuz- und Okularstellung vom ein zum anderen verändert werden, wodurch eventuell eine Verstellung der optisch Achse erfolgen könnte. Es wäre dann an der Messung eine bezügliche Korrekti anzubringen.

kreuzes auf die Objekte auch noch diejenige Ablesung an demselben bekannt sein, welche bei horizontaler Visur erhalten wird. Die letztere wird aber dadurch gefunden, daß man den Horizontalfaden des Fadenkreuzes auf einen scharfen Fixpunkt nahe dem Horizont einstellt, die Verniere am Vertikalkreis abliest, dann die Alhidade um die Vertikalachse um 180° dreht und das Fernrohr unter Durchschlagen desselben wieder genau auf denselben Punkt richtet. Das Mittel aus der früheren und jetzigen Ablesung der Verniere am Vertikalkreis gibt die dem Zenit des Ortes entsprechende Ablesung am letzteren an, und man hat also bloß 90° davon abzuziehen, um die Stellung des Fernrohrs für den Horizont zu erhalten. Gewöhnlich ist der Vertikalkreis auf seiner Achse bereits so befestigt, daß nahezu 0° und 180° Ablesung der Verniere an ihm der Horizontalstellung der optischen Achse des Fernrohrs entsprechen, so daß man durch die vorstehende Beobachtung den sogenannten Indexfehler am Vertikalkreis erhält. Je nach der Richtung, in welcher am letzteren die Bezifferung fortschreitet, wird man dabei zu der kleineren Ablesung eventuell 360° hinzuzuzählen haben, um richtige Werte für den Zenit zu erhalten; ein bezüglicher Irrtum ist indessen nicht möglich, da man ja ohne weiteres ersieht, welche Ablesung bei annähernd vertikaler Lage des Fernrohrs erhalten werden soll.

Die Winkelmessung mittels der Poggendorffschen Spiegelmethode wurde bereits in § 17 besprochen.

§ 29. Von der Zeitmessung im allgemeinen, Zeiteinheit. Die Messung von Zeiträumen führt auf die Winkelmessung zurück, da wir die Drehung der Erde um ihre Achse dabei zugrunde legen.

Als Einheit der Zeit gilt allgemein in der Physik die Sekunde des mittleren Sonnentags, d. h. also der 86400ste Teil dieses Tages, indem der Tag: d (dies), in 24 Stunden: h (hora), die Stunde in 60 Minuten: m und die Minute in 60 Sekunden: s geteilt wird. Es ist also:

$$1^d = 24^h = 1440^m = 86400^s.$$

Dieser Tag wird in folgender Weise aus dem Sterntag, d. i. der Rotationsdauer unserer Erde abgeleitet, welche wir als eine sehr nahe konstante Zeit betrachten können [1]).

Der Sterntag oder 24 Stunden Sternzeit der Astronomen wird so genannt, weil wir die Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse am besten nach Beobachtungen an den Fixsternen bestimmen, indem sie die Zeit darstellt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen, d. h. Durchgängen eines und desselben Sternes durch den Meridian eines Ortes [2]). So sehr sich

[1]) Die Rotationsdauer der Erde nimmt infolge des Einflusses von Ebbe und Flut angestellten Berechnungen zufolge in 1000 Jahren nur um $0{,}012^s$ zu [siehe Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik (deutsche Ausgabe) I, 2, S. 403, Braunschweig 1874].

[2]) Man sieht unmittelbar ein, daß wir so die wahre Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse nur erhalten, wenn die Visierlinie von der Erde zum Stern im Raume sich parallel bleibt, trotz der Fortbewegung der ersteren in ihrer Bahn um die Sonne während eines Tages, die $2{,}565 \cdot 10^6$ Kilometer beträgt. Da aber nach § 12 die Entfernung des nächsten Fixsternes, α Centauri, von der Erde immerhin noch gleich $41{,}1 \cdot 10^{12}$ Kilometer ist, so würden zwei Gerade zu ihm von den um einen Tag differierenden Bahnstellen der Erde nur einen Winkel von $0{,}013''$ einschließen,

daher der Gebrauch dieser Sternzeit für die Astronomen eignet, so unbequem wäre aber ihre Anwendung im bürgerlichen Leben, weil sie nicht mit der scheinbaren Bewegung der Sonne, an welche sich alle Einrichtungen unseres Lebens knüpfen, in Übereinstimmung ist.

Der wahre Sonnentag entspricht der scheinbaren täglichen Umlaufszeit der Sonne um unsere Erde und ist um ungefähr 4 Minuten länger als der Sterntag. Infolge der Bewegung der Erde um die Sonne projiziert sich nämlich diese für uns nach und nach auf andere Sternbilder, d. h. auf andere Stellen des unendlich entfernten Sternenhimmels, so daß sie da von West nach Ost unter den Sternen fortzurücken scheint. Es kommt also die Sonne gegenüber den benachbarten Sternen jeden Tag etwas später, nämlich um nahe 4^m, zur Kulmination.

Indessen können wir auch diesen wahren Sonnentag nicht praktisch als Zeitmaß verwenden, weil die wahre scheinbare Umlaufszeit der Sonne um die Erde im Laufe des Jahres keine gleichförmige ist. Da nämlich die Erdachse auf der Ebene ihrer Bahn um die Sonne schief steht (Neigung $23^1/_2{}^0$) und die Erde sich außerdem in ihrer elliptischen Bahn mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegt (in der Sonnennähe rascher als in der Sonnenferne), so ist die scheinbare Bewegung der Sonne eine durchaus ungleichförmige, und es wird also die Differenz zwischen Sonnentag und Sterntag zu verschiedenen Jahreszeiten variieren. Einer solchen Bewegung könnte man aber den Gang einer gewöhnlichen Uhr, der notwendig ein gleichförmiger ist, nicht anpassen.

Mittlerer Sonnentag. Man hat daher an Stelle der wahren Sonne gewissermaßen eine mittlere Sonne gesetzt, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Äquator bewegen würde und mit der scheinbaren Bewegung der wahren Sonne nur die Umlaufszeit um die Erde gemein hätte. Diese fingierte Sonne eilt der wahren Sonne bald voraus, bald bleibt sie hinter ihr zurück. Diese positiven und negativen Differenzen zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit heißt man die Zeitgleichung. Die immer gleiche Zeit nun zwischen aufeinanderfolgenden Kulminationen dieser gedachten mittleren Sonne hat man den mittleren Sonnentag oder den Tag mittlerer, bürgerlicher Zeit genannt.

Nach dieser Zeit werden nämlich im bürgerlichen Leben die Uhren reguliert, während, wie schon bemerkt, die Astronomen die ihrigen nach Sternzeit richten. Das genaue Verhältnis beider ist:

$$1 \text{ mittlerer Sonnentag} = 1{,}0027379 \text{ Sterntag}$$
$$= 1 \text{ Sterntag} + 3^m\ 56{,}555^s \text{ Sternzeit,}$$

oder

$$1 \text{ Sterntag} = 1 \text{ mittlerer Sonnentag} - 3^m\ 55{,}909^s \text{ Sonnenzeit}$$
$$= 86164{,}091 \text{ Sekunden mittlerer Sonnenzeit.}$$

Außer durch diese Verschiedenheit in der Größe der Zeiteinheit unterscheidet sich aber die bürgerliche Zeitrechnung und die der Astronomen auch

---

während es des ganzen Halbmessers der Erdbahn um die Sonne bedarf, um diesen Winkel, die sogenannten Parallaxe des fraglichen Sternes, auf die Größe von 0,75″ zu erheben.

noch dadurch, daß wir den Tag im bürgerlichen Leben um Mitternacht beginnen und gewöhnlich statt 24 Stunden deren zweimal 12 zählen, die wir dann durch den Zusatz Vormittag und Nachmittag oder durch die Zeichen a (*ante meridiem*) und p (*post meridiem*) unterscheiden, während die Astronomen sowohl für Sternzeit als mittlere Zeit den Tag um Mittag des betreffenden bürgerlichen Tages anfangen und die Stunden bis 24 zählen. Es ist also nach mittlerer Zeit z. B.:

$$11^d\ 22^h \text{ astronomisch } = 12^d\ 10^h \text{ a bürgerlich gezählt.}$$

Was die absolute Vergleichung von astronomischer Sternzeit und mittlerer Sonnenzeit wie auch wahrer Sonnenzeit betrifft, so ist dieselbe ohne weiteres den astronomischen Ephemeriden[1]) für das betreffende Jahr zu entnehmen.

Außer dem Tag wird zur Zählung größerer Zeitabschnitte auch das Jahr, d. h. die tropische Umlaufszeit der Erde um die Sonne gebraucht[2]). Dasselbe beträgt etwas weniger als $365^1/_4$ Tag. Da das bürgerliche Jahr nur 365 ganze Tage zählt, so wird bekanntlich zur Regulierung alle vier Jahre im Februar ein Tag zugeschaltet: Schaltjahr. Damit wird aber wieder etwas zu viel zugelegt, und um diesen Fehler wieder gut zu machen, läßt man alle 100 Jahre den Schalttag wegfallen.

Zur Feststellung beziehungsweise Ableitung unserer Zeiteinheit, das ist der Sekunde des mittleren Sonnentags, bedürfen wir der Zeitmeßinstrumente, die wir daher zunächst zu betrachten haben.

§ 30. Zeitmeßinstrumente, Uhren. Zu den ältesten Zeitmeßinstrumenten gehören jedenfalls die Sonnenuhren. Diese geben unmittelbar durch den Schatten, den die Sonne von undurchsichtigen Gegenständen auf helle Flächen wirft, oder durch Lichtpunkte, welche sie durch Öffnungen in Schirmen mit oder ohne Linsen auf beschatteten Flächen erzeugt, nur die wahre Sonnenzeit an, und man hat daher an ihren Angaben, wenn man die mittlere Sonnenzeit erhalten will, noch die oben erwähnte Zeitgleichung anzubringen, die man für den betreffenden Tag unmittelbar den astronomischen Ephemeriden entnehmen kann. Bei der Äquatorial-Sonnenuhr von Fléchet ist auf der beschatteten Platte eine die Zeitgleichung darstellende Kurve statt einer einfachen Meridianlinie gezogen, so daß man durch Einstellung des von einer Linse entworfenen Sonnenbildchens auf sie nicht bloß unmittelbar die mittlere Sonnenzeit an der Uhr ablesen kann, sondern nach Einstellung auf die Breite des Ortes am bezüglichen Gradbogen das Instrument auch nach dem Meridian des Ortes orientieren kann, indem man es so lange im Horizont

---

[1]) Nautical Almanac, Berliner astronomisches Jahrbuch, Connaissance des temps. Weniger vollständig: Nautisches Jahrbuch von Bremiker, in dem man aber auch kurze Anleitungen zu astronomischen Beobachtungen und Berechnungen findet.

[2]) Man unterscheidet das siderische und das tropische Jahr, von denen sich das erstere auf die Rückkehr der Sonne zu ein und demselben Stern der Ekliptik, das letztere auf die Rückkehr der Sonne zum Frühlingsäquinoktialpunkt bezieht. Die bürgerliche Zeitrechnung hält sich an das letztere, das tropische Jahr, weil nach dem ersteren Tag- und Nachtgleiche sich allmählich infolge der Präzession der Erdachse verschiebt.

im Jahre 1899 . . .	— 0,43^s	und	— 0,02^s
„ „ 1900 . . .	— 0,58	„	— 0,06
„ „ 1901 . . .	— 0,46	„	— 0,05

Für 1899 bis 1901 ergeben die auf 0° und einen Barometerstand von 700 mm reduzierten täglichen Gänge im Mittel:

$$- 0{,}226^s \quad \text{und} \quad \pm 0{,}093^s.$$

Noch ist zur besseren Beurteilung des Ganges dieser Uhr hinzuzufügen, daß von den im ganzen aus 221 Zeitbestimmungen abgeleiteten täglichen Gängen je

82	Werte nur	± 0,00^s	bis	0,05^s	Abweichungen vom Mittel
63	„ „	± 0,05	„	0,10	„ „ „
42	„ „	± 0,10	„	0,15	„ „ „
15	„ „	± 0,15	„	0,20	„ „ „
6	„ „	± 0,20	„	0,25	„ „ „
1	„ „	± 0,25	„	0,30	„ „ „
1	„ „	± 0,30	„	0,35	„ „ „

aufweisen, also die größeren Abweichungen fast gar nicht vorkommen.

Ein Box-Chronometer von Wirén Nr. 150 in St. Petersburg zeigte im meteorologisch-magnetischen Observatorium in Pawlowsk (bei St. Petersburg) in den Jahren 1891, 1893 und 1894 nur mittlere monatliche Abweichungen von seinem täglichen Gange im Betrage von + 0,14^s mit den extremen Werten ± 0,01^s und ± 0,37^s [1]).

Bei der Prüfung, allerdings nur während $1^1/_2$ Monate, fand man im Observatorium zu Neuchâtel für Marine-Chronometer als extreme Abweichungen vom mittleren täglichen Gange [2]):

U. Nardin in Locle Nr. 4/5805	— 0,26^s	und	+ 0,24^s,
H. Grandjean u. Co. in Locle Nr. 98 . .	— 0,22	„	+ 0,25.

§ 31. Messung von Zeiträumen. Die Aufgaben der Zeitmessung in der Physik bestehen gewöhnlich nicht darin, den absoluten Zeitpunkt vom Eintritt eines Ereignisses anzugeben, sondern die Zeitdauer eines solchen zu bestimmen. Wollen wir z. B. die Geschwindigkeit eines gleichförmig sich fortbewegenden Körpers ermitteln, so haben wir den Zeitabstand zu messen, in welchen derselbe in seiner Bahn zwei in einem bestimmten Abstande sich befindende markierte Punkte passiert; ist die Schwingungsdauer eines Pendels oder eines um eine vertikale Achse oszillierenden Magnets zu finden, so sind die Zeitintervalle zu messen, in welchen dieselben ihre Gleichgewichtslage aufeinanderfolgend passieren und dergleichen mehr.

Die einfachste Methode nun, solche Zeitintervalle mit den Uhren zu messen, besteht darin, daß man nach den Schlägen einer Pendeluhr mit Sekunden- oder Halbsekundenpendel oder eines Box-Chronometers — dieselben

---

1) Annalen des physikalischen Zentral-Observatoriums in St. Petersburg von 1891, 1893 und 1894. Teil I: Einleitung zu den Beobachtungen in Pawlowsk.

2) Bulletin de la Société des sciences nat. de Neuchâtel, T. XV, 1886. Rapport du directeur Hirsch pour 1884.